Lycée E.Mimard, Saint-Etienne

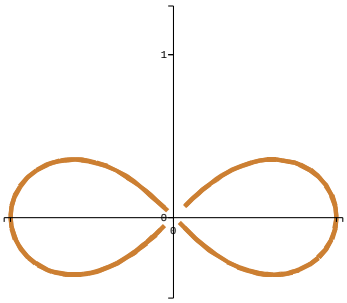
M+ **Exercices de Mathématiques** **Sup/Spé**

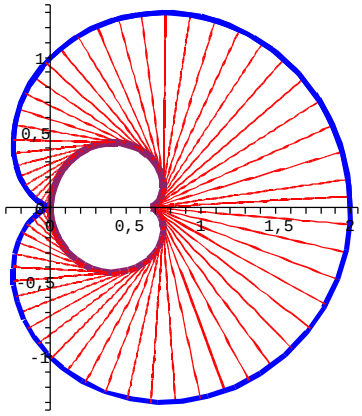
En 2 parties. **Table des matières p.142s.** **Exercices avec indications et lecture :**

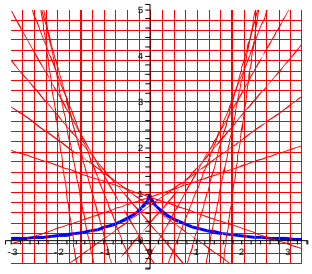
de niveau Sup, mais avec pas mal de géométrie (00-33)

et Spé, avec diverses questions culturelles (34-60).

. exemples : une "Lemniscate de Bernoulli" (symbole de l'infini) ;
. deux "Cardioïdes" (la petite étant dite "développée" de la grande) ; enfin
. la "Tractrice et sa développée, la chainette" : c'est aussi l'enveloppe des normales !







à Clément-Marie, à mes parents et ma famille,
aux nombreux étudiants, collègues et à divers amateurs,
M. Henri Chambon, 19 rue Saint-Joseph, 42000 Saint-Etienne.

2021/puis 2026-27

Ces pages doivent beaucoup à Lucien Sportisse, ancien collègue en Spé-PT, m'ayant appris aussi le TeX et à Jean-Pierre Jouvinroux, ancien collègue en Spé-PSI, qui a relu les exercices de Spé. Qu'eux et tant d'autres soient tous, ici, remerciés !

"Pourquoi y a-t-il quelque chose plutôt que rien" ? *Leibnitz (Leipzig 1646- Hanovre 1716) ;*
"Pourquoi y a-t-il de la musique, plutôt que du bruit" ? *Hubert Reeves (astrophysicien 1932-2023)*

Exercices de programme SUP

0. Ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Raisonnements

0.1 Plusieurs questions concernant les nombres entiers (...)

1. Montrer que : $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111. [Réc. ou 111=3.37 divise $10^3 - 1$.]
2. Idem $n.4^{n+1} - (n+1).4^n + 1$ divisible par 9. [Réc. ou $(x-1)^2$ divise $n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.]
3. Découpage en parts indivisibles. Comment acheter 100 volailles avec 100 écus si 10 poussins coûtent 1 écu, 1 coq : 2 écus, une dinde : 3 écus ? [$10.\pi$ poussins, c coqs, d dindes ; réponse : 60p., 26c.,14d.]
4. Nombre minimum d'objets si "comptés par lots de 3 : il en reste 2 ; par 5 : il en reste 3 ; par 7 : 2" ? [Th. chinois, $\geqslant 23$] et cf. **(21.1,9) Th. de Fermat** $a^p \equiv a(p)$, $p \in \mathbb{P}$ **; Th. de Wilson** $p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1(p)$.

0.2 (*) Comparaisons (cf. les tailles d'un groupe en rectangle)

1. Pour $a_{ij} \in \mathbb{R}$, montrer que : $max_i[min_j(a_{ij})] \leqslant min_j[max_i(a_{ij})]$; $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$.
2. De même, montrer l'inclusion entre parties : $\cup_i(\cap_j A_{ij}) \subset \cap_j(\cup_i A_{ij})$.

0.3 (*) Pgcd et ppcm (nombres, polynômes, nombres de Fermat)

1. $a, b \in \mathbb{N}$: $(15a+4b) \wedge (11a+3b) = a \wedge b$? Ici polynômes : $(X^p - 1) \wedge (X^q - 1) = X^{p \wedge q} - 1$?
2. Avec $F_n = 2^{2^n} + 1 = x + 1$ [Fermat], déduire que : $F_{n+k} - 2 = F_n.(entier)$; et $F_n \wedge F_{n+k} = 1$.
3. $F_n/(2^{2^{n+1}} - 1)/2^{2^{2^n}} - 1 = \frac{2^{F_n} - 2}{2}$ car $(x-1)/(x^p - 1)$ mais $m/(2^m - 2) \Rightarrow m$ premier si $m < 341 = 11.31$.

0.4 (*) Résoudre $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbb{N}^*$. Les solutions sont (...)

pgcd(x,y,z)=1 : $x = a^2 - b^2$, $a \wedge b = 1$, parité différente ; $y = 2ab$; $z = a^2 + b^2$; autres : $*d \in \mathbb{N}^*$.

0.5 (*) Décomposition des nombres en facteurs premiers (...)

Si $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, p_k distincts, $\alpha_1 = \nu_{p_1}(n)$: valuation en p_1 de n. [$\nu_2(18) = 1$, $\nu_3(18) = 2$, $\nu_5(18) = 0$].

1. Montrer que : $\nu_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} E(n/p^k)$. En déduire le nombre de 0 à la fin du nombre : 1000 !
2. Soit $a = p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}$. Montrer que le nombre de diviseurs positifs de a est : $(\alpha_1 + 1)...(\alpha_n + 1)$ et que leur somme vaut : $(p_1^{\alpha_1+1} - 1)/(p_1 - 1)$. ... $.(p_n^{\alpha_n+1} - 1)/(p_n - 1)$.

0.6 Théorème de Johnson 1916 : 5 cercles de même rayon (...)

1. Soit 3 cercles de rayon r sécants BHC, CHA, AHB ; tracer les losanges $AJHK$, $KHIB$, $IHJC$.
2. Avec $O = t_{\overrightarrow{JC}}(A)$ justifier que ABC, de centre O, donc a aussi pour rayon r ; et d'orthocentre H.
3. Puis AI, BJ, CK,OH, même milieu : IJK, sym. de ABC, aussi de rayon r ; et d'orthocentre O.

0.7 Relation RST $(D, D') \equiv (\Delta, \Delta')$ antiparallèles=bissectrices.même.dir.

Montrer que $(D, D') \equiv (\Delta, \Delta') \overset{?}{\Leftrightarrow} (D, \Delta) = (\Delta', D')(\pi) \overset{?}{\Leftrightarrow} (D \cap \Delta, D \cap \Delta', D' \cap \Delta, D' \cap \Delta')$ cocycliques.

Ajout : Si A, B, C, D sur un cercle, $(AB), (CD)$ est antiparallèle à $(AD), BC)$ et aussi à $(AC), (BD)$.

Exemples : (D, D') $resp_\perp$ (Δ, Δ') ; Triangle de tangente AT : $(AB, AC) \equiv (BC, AT) \equiv (AH, AO)$.

Quand les couples de droites sont antiparallèles et de plus concourantes, on dit **"isogonales"**. Cf. 5.3.

1 Arrangements, Combinaisons, Injections, Surjections

1.1 (*) Divers calculs difficiles de dénombrement (...)

1. Montrer que : $\sum_{X,Y} \mid X \cap Y \mid = n.4^{n-1}$ si $\mid E \mid = n$. Idem : $\sum_{X,Y} \mid X \cup Y \mid = 3.n.4^{n-1}$.
2. Montrer que : $\sum_{i+j \leqslant n} i.j = C^4_{n+2} = \binom{n+2}{4}$. Et : $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i.j = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.
3. (**Problème d'Euler.**) On prend un polygône convexe à $n+2$ côtés $A_1, A_2, ..., A_{n+2}$; soit T_n le nombre de découpages en triangles. On pose $T_0 = 1$ et on a : $T_1 = 1$; $T_2 = 2$; $T_3 = 5$.
   (a) En prenant le triangle $A_1A_2A_{k+2}$, montrer que : $T_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} T_k.T_{n-1-k}$.
   (b) Vérifier (avec anciennes notations des coeff. binômiaux, cf.2) que : $C^n_{2n} - C^{n-1}_{2n} = C^n_{2n}/(n+1)$ (dit "nombre **de Catalan**", Belge 1814-1894) (**) et que cet entier vaut T_n. [Ind. Posant $C(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \infty} T_k.x^k$, $C(x) = 1 + x.C^2(x)$, $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2.x}$ et $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{0 \leqslant k \leqslant \infty} \frac{2C^k_{2k}}{k+1} x^{k+1}$.]
4. (*) Dans $\mathbb{N}^2$, on étudie les trajets partant de $O(0,0)$ en se déplaçant de $+\overrightarrow{\imath}$ ou $+\overrightarrow{\jmath}$ à chaque pas.
   (a) Nombre de trajets reliant O et $M(p,q)$? Déduire qu'il y a 2^n trajets de longueur n, $n \geqslant 1$.
   (b) Soit $A(1,0), A'(0,1)$, D la droite : $y = x$; et $p > q$ ici.
   - Montrer que le nombre de trajets $[AM]$ rencontrant D est le nombre de trajets $[A'M]$;
   - que le nombre de trajets $[OM]$ sans rencontrer D est $C^{p-1}_{p+q-1} - C^p_{p+q-1}$; et que le nombre
   - de trajets de longueur $2n$ sans rencontrer D est : $2.\sum_{n+1 \leqslant p \leqslant 2n} C^{p-1}_{2n-1} - C^p_{2n-1} = 2.C^n_{2n-1} = C^n_{2n}$.
   (c) Avec Γ de longueur $2n$, $0 \leqslant k \leqslant n$, k max. : $(k,k) \in \Gamma$, en déduire $\boxed{\sum C^k_{2k}.C^{n-k}_{2n-2k} = 2^{2n} = 4^n.}$

1.2 Sur les applications (f^{-1} appliquée aux parties de F)

1. Pour $f : E \to F$, montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$; et : égalité $\forall A \Leftrightarrow f$ injective.
   Idem : $B \supset f(f^{-1}(B))$; de plus : égalité $\forall B \Leftrightarrow f$ surjective.
2. Avec toujours $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, montrer que :
   f injective $\Leftrightarrow f^{-1}$ surjective. f surjective $\Leftrightarrow f^{-1}$ injective.
3. Puis : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; mais par contre :
   $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$; et égalité tout le temps $\Leftrightarrow f$ injective. (Si f^{-1} égalité)
4. Pour $f : 0 \mapsto 1$; $f_{/\mathbb{N}^*} = Id$, on a $f(C_{\mathbb{N}^*}) \not\subset C_{f(\mathbb{N}^*)}$ et $C_{f(\mathbb{N}^*)} \not\subset f(C_{\mathbb{N}^*})$;
   Et 1ère égalité vraie (tout le temps) $\Leftrightarrow$ injectivité ;
   2ème égalité vraie (tout le temps) $\Leftrightarrow$ surjectivité. (Avec f^{-1} égalités vraies)
5. Si $\mid E \mid = n+1$, $\mid F \mid = n$, justifier qu'on a : $n.\binom{n+1}{2}.(n-1)! = \frac{n.(n+1)!}{2}$ surjections.

2 Avec les nombres réels

2.1 $A+B+C=\pi \Rightarrow cos^2(A)+cos^2(B)+cos^2(C)=1-2.cos(A).cos(B).cos(C)$

1. Solution 1) $G=\dfrac{1+cos(2A)+1+cos(2B)}{2}+cos^2(C)=1+\dfrac{cos(2A)+cos(2B)}{2}+cos^2(C)$. Or : $cos(2A)+cos(2B)=2.cos(A+B).cos(A-B)$, d'où $G=1+cos^2(C)-cos(C).cos(A-B)$ et $cos(C)-cos(A-B)=-2.sin\,\frac{C+A-B}{2}\,.\,sin\,\frac{C+B-A}{2}=-2.sin\,\frac{\pi-2.B}{2}\,.\,sin\,\frac{\pi-2.A}{2}$, etc.
2. 2) Soit l'éq. de degré 2 en $cos(C)$: $cos^2(C)+2.cos(A).cos(B).cos(C)+cos^2(A)+cos^2(B)-1=0$. $\Delta=4.cos^2(A).cos^2(B)-4.cos^2(A)-4.cos^2(B)+4=4cos^2(A).[-sin^2(B)]+4.sin^2(B)$; ou : $\Delta=4.sin^2(A).sin^2(B)$. Eg. vraie si $cos(C)=-cos(A\pm B)$. Enoncé : $C=\pi-(A+B)$.

2.2 Triangle toujours : $a+b+c=2p$, i : centre du cercle inscrit 5.4

1. $tan(A)+tan(B)+tan(C)=tan(A).tan(B).tan(C)$ (Ici on isole : $tan(C)$)
2. $sin(A)+sin(B)+sin(C)=4.cos(A/2).cos(B/2)cos(C/2)=p/R$ (fin $a=2Rsin(A)$)
3. $a.sin(B-C)+b.sin(C-A)+c.sin(A-B)=0$ (idem ici avec $a=2Rsin(A)$)
4. $sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)=4.sin(A).sin(B).sin(C)=2S/R^2$ ($abc=4RS$)
5. $sin(A/2).sin(B/2).sin(C/2)=r/4R$ cf.(4)/(2) $\Rightarrow tan(A/2).tan(B/2)tan(C/2)=r/p$
6. $a.cos(A)+b.cos(B)+c.cos(C)=abc/2R^2=2S/R$ (avec : $a=2.R.sin(A)$ ... puis avec 4)
7. Vérifier hors $abc=4.R.S$: $S=p.r=(p-a).r_a=$ ... et avec **5.10** $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$:
8. Montrer également les relations : $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$; $r_a+r_b+r_c=r+4R$, dite **formule d'Etienne Bobillier**, $1/h_a+...=1/r_a+...=1/r$. ($r_ar_b+...=p^2$; $r_ar_br_c=rp^2=S^2/r$ aisé)
9. $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2-3R^2=2R^2(cos(2A)+cos(2B)+cos(2C))$, $cos(2A)+cos(2B)+cos(2C)=-4cos(A)cos(B)cos(C)-1$ $\Rightarrow OH^2=R^2(1-8cos(A)cos(B)cos(C))$. [Voir aussi $a^2+b^2+c^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)=9R^2-OH^2$].
10. *Carnot $cos(A)+cos(B)+cos(C)=1+4.sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$; [$gauche=2.cos\frac{\pi-C}{2}.cos\frac{A-B}{2}+1-2.sin^2\frac{C}{2}=$ ...] ou avec $\overline{OA'}=R.cos(A)$: $\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'}=R+r$; $Ai^2=\frac{bc(p-a)}{p}$ [car $S^2/p^2=r^2=(p-a)(p-b)(p-c)/p$]. $x=p-a,y,z$ zéros de $T^3-pT^2+r(4R+r)T-pr^2$ ($\frac{\text{terme}}{\text{avec } T=p}$ trouvé). Eq. en $\lambda=Ai^2,...$: $\lambda^3+(8rR-r^2-p^2)\lambda^2+8r^2R(2R-r)\lambda-16R^2r^4=0$ ($\frac{\text{avec } \lambda=r^2}{x^2=Ai^2-r^2}$) d'où $\sum 1/iA^2$.

2.3 Montrer que $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $a,...,d\geqslant 0$

Géométriquement : inégalité triangulaire ! (Autre note géométrique : Si $ABCD$ est un trapèze avec $(AC)\cap(BD)=I$ et $JIK//(AB)$: $IJ/AB+IJ/CD=1$, etc. D'où $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{JK}$. **4.6**).

2.4 (*) Le théorème de Beatty ($p,\ q>0$) [corrigé]

($p,\ q>1$ et $E(n.p)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $E(n.q)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$) $\Leftrightarrow$ ($p,\ q$ irrationnels et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

[(*) 1) Assez aisément pour $a>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\{E(k.a)\}\cap[[1,n]]}{n}=\dfrac{1}{a}$: densité de la partie. D'où : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Puis p irrationnel obligatoire ; sinon p et q rationnels et parties non disjointes.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre de multiples non nuls de p, $\leqslant n$, est $E(\frac{n}{p})$. Idem pour q. Mais p et q sont irrationnels : $\frac{n}{p}-1<E(\frac{n}{p})<\frac{n}{p}$; idem pour q $\Rightarrow n-2<E(\frac{n}{p})+E(\frac{n}{q})<n$; donc $E(\frac{n}{p})+E(\frac{n}{q})=n-1$, ceci $\forall n\in\mathbb{N}^*$; aussi pour $n+1$, d'où un unique multiple de p ou bien de q dans $]n\in\mathbb{N}^*,n+1[$. Fini.]

3 Nombres complexes

3.1 Avec la conjugaison [on indique ici seulement la réponse (...)]

Soit : $p,\ q \in \mathbb{N}^*$. Trouver $M(z)$ tel que z^p et z^q soient conjugués.

(Réponse : Si $p = q$, 2 droites passant par O ; si $p \neq q$, O et $\mathbb{U}_{p+q}$.)

3.2 CNS : les racines de $z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d$ forment un parallélogramme

Quitte à re-numéroter les racines, on peut traduire l'énoncé par : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$ ou :

$z_2 - z_1 = z_3 - z_4$ ou bien $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ noté $\boxed{s = z_1 + z_3 = z_2 + z_4.}$ $(*)$

(Au passage $\dfrac{z_1 + z_3}{2} = \dfrac{z_2 + z_4}{2}$ est une équivalence : les diagonales se coupent en leur milieu.)

1. **Corrigé**, 1ère solution : (le cas $a = b = c = 0$ doit convenir !)

   L'idée est d'utiliser les relations de Viète qui, avec $(*)$, vont devenir manipulables !

   Notons : $p = z_1.z_3$ (non pas $z_1.z_2$) $\quad q = z_2.z_4$ $\quad (z_2, z_4$ associées)

   On a : $z_1 + ... + z_4 = a$ qui est donc $2.s = a$;
   puis : $z_1z_2 + ... + z_3.z_4 = b$ qui (calcul laissé) devient $p + z_1.s + z_3.s + q = b$ ou $p + s^2 + q = b$
   puis : $z_1z_2z_3 + ... + z_2z_3z_4 = c$ qui devient $p(z_2 + z_4) + (z_1 + z_3).q = c$ ou $(p + q).s = c$
   Enfin $p.q = d$: 4 équations pour 3 lettres p, q, s ... normal : la contrainte du parallélogramme !

   On obtient : $s = a/2,\ p + q = b - a^2/4$. Avec $p.q = d$, on pourrait alors trouver p et q.

   [Connaissant la somme et le produit de 2 nombres, ces nombres sont solutions d'une équation du second degré] et on voit qu'il reste donc une et une seule contrainte : $\boxed{(b - a^2/4).a/2 = c.}$

2. 2ème solution. $(*)$ On peut faire un changement de repère par translation en prenant une nouvelle origine le point d'affixe : $(z_1 + ... + z_4)/4 = a/4$ centre de gravité ! en posant (simplement) $Z = z - a/4$. On aura une nouvelle équation du type : $Z^4 + 0.Z^3 + \alpha.Z^2 + \beta.Z + \gamma = 0$.

   ▪ Pourquoi $0.Z^3$? car $(Z_1 + ... + Z_4)/4 = 0$ barycentre=nouvelle origine !
   ▪ Trouver α, β, γ ne doit pas être un souci : ceci peut avoir lieu dès que c'est utile ...
   ▪ Si $\beta = 0$, on a une équation bicarrée de racines $\pm Z_1,\ \pm Z_2$ donc on a un parallélogramme ! la condition est suffisante. Inversement, pour avoir un parallélogramme, la condition $\beta = 0$ est nécessaire car : à ce moment, la nouvelle origine serait centre, donc milieu des diagonales d'où les racines seraient $\pm Z_1,\ \pm Z_2$; dans ce cas, $Z_1Z_2Z_3 + ... + Z_2Z_3Z_4$ doit être nul (laissé).

   Ainsi donc partant de l'énoncé et remplaçant z par $Z + a/4$, on exprime tout simplement que le coefficient de Z (le seul à calculer) est nul ! Et trouver à nouveau ... $\boxed{(b - a^2/4).a/2 = c.}$

3.3 Complexes et polynômes : une majoration (inégalités de Cauchy)

1. Soit $P(z) = a_0 + a_1.z + a_2.z^2$.

   Calculer les 3 coefficients à l'aide de : $P(1),\ P(j),\ P(j^2),\ j$ et j^2.

   En déduire : $\boxed{sup \mid a_k \mid \leqslant\ sup_{|z| \leqslant 1}\ \mid P(z) \mid.}$

2. $(*)$ Généraliser pour un polynôme de degré au plus n, avec : $\omega = exp(\dfrac{2i\pi}{n+1})$.

   (On calculera $1 + \omega^p + \omega^{2p} + ... + \omega^{p.n}$ selon que $n + 1$ divise p ou bien non) ...

4 Complexes et géométrie

4.1 Chercher $M(z)$ de façon à avoir des points alignés (...)

1. $\{M(z) :\ A(1),\ M(z),\ M'(1+z^2)\}$ soient alignés. $[y=0$ ou $x=-1/2.]$
2. $\{M(z) :\ A(1),\ M(z),\ M'(z^3)\}$ soient alignés. $[y=0$ ou Cercle $(A(2), R=2).]$

4.2 Fonction argument d'un complexe de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ continu avec Arctan

Si $z = |z|.e^{i\theta} \notin \mathbb{R}^-$ [pour ln], avec $(x/|z|,\ y/|z|)$ et le Th. de l'angle inscrit, vérifier que : $tan\ \frac{\theta}{2} = \frac{y/|z|}{1+x/|z|}$. Donc si $\theta \in]-\pi,\pi[$: $\theta = 2.Arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$. $[\Rightarrow ln(z) = ln(\rho) + i.\theta$ possible$]$.

4.3 Composition de rotations planes (et cf. aussi le ch. suivant 5.21)

1. Si $\theta + \varphi \neq 0(2\pi)$, montrer que $r_{B,\varphi}\ o\ r_{A,\theta} = r_{C,\theta+\varphi}$. Trouver C comme q.2 (ou autrement) :
2. Décomposer $r_A = s_{AB}\ o\ s_{D_1}$ et $r_B = s_{D_2} o s_{AB}$ en produit de 2 sym$_\perp$ /des droites. En déduire C.

4.4 Centre de similitude directe≠translation, autre construction d'Euler

Soit σ, similitude directe plane $A \mapsto A', B \mapsto B'$; angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$; $H = (AB) \cap (A'B')$; centre I ?

1. 1ère. I : autre-intersection-cercles $(AA'H), (BB'H)$ **5.28**. [Idem $A \mapsto B, A' \mapsto B'$, 4 cercles ! **Ex.** ABC triangle, P, Q, R sur les côtés : $(AQR)(BRP)(CPQ)$ conc. en M ; $M \in (ABC) \Leftrightarrow P, Q, R$ alignés **point de Miquel**. Fin : $MP, MQ = MP, PQ + PQ, QR + QR, MQ$; $CB, CA = CM, CA + PQ, QR + AB, AM$; $CB, CM - AB, AM = PQ, QR$].
2. Deuxième : Euler[1] considéra la perpendiculaire en A à AB ; et en A' à $A'B'$, se coupant en A".
   (a) Vérifier que $AA'A"HI$ sont cocycliques et que $A"H$ en est un diamètre. Idem pour $B"H$.
   (b) Et que I est la projection orthogonale de H sur $(A"B")$! (angles droits $HIA"$, $HIB"$).

4.5 Similitudes directes, cercles et Théorème "de l'angle inscrit" (...)

Si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$; s la sim. directe$(A, \mathcal{C} \to \mathcal{C}')$; $s(M) = M'$: montrer que M, B, M' sont alignés.
$[P = MB \cap \mathcal{C}'$; $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} = 2.(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = 2.(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'P} \Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO'}$, $P = M'.]$

4.6 Birapport et points alignés ou sur un cercle (une conique) DH, QH 4.7

1. Montrer que $k = [A, B, C, D] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (A, B, C, D)$ cocycliques ou alignés sur $\mathcal{D}$. $(Arg...)$
2. Montrer $k = -1$ **"division/quadrangle harmonique"** $\Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab+cd) \Leftrightarrow$ rel. de Descartes $(C$ origine$)$ $\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}}$ [si points non alignés mettre les affixes !] $\Leftrightarrow$ rel. de Newton, O milieu de $[AB]$, $OA^2 = OB^2 = \overline{OC}.\overline{OD}$ (idem Ω milieu de $[CD]$) $\Leftrightarrow$ relation de Mac-Laurin[2] $\overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CO}.\overline{CD}$.
3. Cas alignés : Si U extérieur, vérifier que $k = \frac{sin(AUC)}{sin(BUC)} : \frac{sin(AUD)}{sin(BUD)}$. **Donc** idem si U' ou $\mathcal{D}'$!
   $\Rightarrow$ la "polaire" d'un point M/2 droites sécantes en U est une droite (m) passant par U (//**29.10**.)[3]
4. Cas cocycliques. Si $U \in \mathcal{C}$ (origine), $f(z) = 1/z$, $g(z) = \overline{z}$, vérifier que $[a, b, c, d] = [1/\overline{a}, *, *, 1/\overline{d}] = k$ car $k \in \mathbb{R}$. **Donc** $[A, B, C, D] = [UA, UB, UC, UD]$ indépendant de $U \in \mathcal{C}$ $(= \widehat{AC}/\widehat{BC} : \widehat{DA}/\widehat{DB}.)$[4]

[1] Note sur le cercle d'Euler : Ayant un triangle ABC avec A' milieu de $[BC]$, A_1 pied de la perpendiculaire issue de A, A_2 milieu de $[HA]$, avec des homothéties de centre A et C, on voit que $A'C'A_2C_2$ est un rectangle donc 4 points sur un cercle de diamètre $[A'A_2]$, $[C'C_2]$, $[B'B_2]$; il contient aussi A_1, B_1, C_1. Son centre ω vérifie $2\overrightarrow{H\omega} = \overrightarrow{HO}$, $2\overrightarrow{G\omega} = -2\overrightarrow{GO}$.

[2] Et $(b-a)^2 + (d-c)^2 = 4.[\frac{c+d}{2} - \frac{a+b}{2}]^2$. Ex : $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ cercles $\perp$ et $\mathcal{D}$ passant par O les coupant en $ABCD$, $ABCD$ DH.

[3] Cas alignés, le birapport est aussi celui des aires AUC ... des sinus des angles en U ... et des coeff. directeurs de UA ... $[\Rightarrow sin(\alpha-\gamma)sin(\beta-\delta)/sin(\beta-\gamma)sin(\alpha-\delta) = (tan(\gamma)-tan(\alpha))(tan(\delta)-tan(\beta))/(tan(\gamma)-tan(\beta))(tan(\delta)-tan(\alpha))$.] $y = mx \perp y = m'x \Leftrightarrow m.m' = (\pm i)^2 \Leftrightarrow$ conjuguées/isotropes $y = \pm ix$. Une diag. du quadr. complet div.H. par les 2 autres.

[4] **Coniques** propres : une proj. centrale ramène au cas du cercle ; birapport sur des droites conservé $[U; A, B, C, D]$ ...

4.7 (*) Quadrangle harmonique QH cf. Th. de la *puiss(M)/Cercle* 29.10.6

Soit A,B,M,M' $\boxed{\frac{z-a}{z-b}:\frac{z'-a}{z'-b}=-1 \text{ ou } \frac{z'-a}{z'-b}=-\frac{z-a}{z-b}\ (1)}$ (QH) Si A,B,M,M' alignés, (Div.H).

1. Montrer : (1)$\Leftrightarrow$ (2) $(a+b)(z+z')=2(ab+zz')$: Relation aux affixes ou de Châsles $[a,b,z,z'\in\mathbb{C}]$. Donc on peut permuter a et b ; z et z' ; $\{a,b\}$ et $\{z,z'\}$: (A,B,M,M') QH $\Leftrightarrow$ (B,A,M,M') QH ...
2. Avec les modules, A,B,M donnés, $k=\frac{MA}{MB}\neq 1$, déduire que $M,M'\in\Gamma$: cercle centré en $\Omega\in(A,B)$, $\perp$ cercle $\mathcal{C}(A,B,M)$ de centre O [solution en **29.**10.6.] Fig. si $k=3$, $AB=8$cm ? Et si $k=1$?
3. Et que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})+\pi\ (2.\pi)$. Puis, si $\theta=\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\neq 0\ (\pi)$, que $(M,M'A,B)$ sont cocycliques sur $\mathcal{C}$. Compléter la figure et préciser M'. Que se passe t-il si $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}=0\ (\pi)$?
[Rem. (A,B,C,D) Q.H. ; ordre $A,C,B,D\in\mathcal{C}\Leftrightarrow AB.CD=2AC.BD=2AD.BC$ Ptolémée 5.22.]
4. Au lieu d'un repère quelconque, soit ici un repère centré au milieu H de $[A,B]$; a,b,z,z' les affixes :
   (a) Déduire ici $(b=-a)$ que (3) $z.z'=a^2=b^2$ (origine $mil[A,B]$, Relation de Newton) et (arg.) : (H,A) ; $(O,H)=\mathcal{D}$ bissectrices $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'})$. $K=mil[M,M']$: (K,M) ; (K,Ω) de $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB})$.
   (b) On prouve que : $KA+KB=HM+HM'=MM_1=BB_1$, $M_1=(MH)\cap\mathcal{C}$, $B_1=(BK)\cap\mathcal{C}$.
   – On note $z=u^2$, $z'=v^2$; on rappelle que : $z.z'=a^2$ et le théorème de la médiane : $2(|u|^2+|v|^2)=|u+v|^2+|u-v|^2$. En observant que : $|u+v|^2=|(u+v)^2|$, montrer que $|\frac{z+z'}{2}+a|+|\frac{z+z'}{2}-a|=|z|+|z'|$ et conclure. Ou bien vérifier que
   – $HM.HM'=HA^2$, $KA.KB=KM^2$; $(HM+HM')^2=2\left(HK^2+KM^2+HA^2\right)=\left(KA+KB\right)^2$.
   – **Mieux**. $HA^2=HB^2=HM.HM_1=HM.HM'\Rightarrow HM'=HM_1$; $\widehat{AMK}=\widehat{BMH}$: médiane et **symédiane** de AMB. Idem BK, BH pour MBM'. $\widehat{MBB_1}=\widehat{M'BA}=\widehat{BMM_1}$ termine.
5. Soit $P=(A,B)\cap(M,M')$ et $\omega=(M,M')\cap\mathcal{D}$. Cercles $\perp\Rightarrow\Omega=$ pôle de $(M,M')/\mathcal{C}$. Cf. **29.**10. Idem $(H;A,\omega,M,M')$ faisceauH., (ω,P,M,M') DH., $\omega=$ pôle de $(A,B)/\mathcal{C}$. Et réciproquement.

   Notes $O\in$polaire$(P)/\Gamma$. Ω,ω,P autopolaire/$\mathcal{C}$. (Ω,P,A,B) DH, $KP\perp K\Omega\Rightarrow KP$ bissectrice ! $(B;B\omega,BA,BM,BM')$ faisc.H $\Rightarrow\forall U\in\mathcal{C}$, (UB,UA,UM,UM') faisc.H. $PB/PA=b^2/a^2$ **5.**30.5
6. On suppose connu $z.z'$ ou A, B ; et $z+z'$ ou K milieu de $(M,M')\not\in(A,B)$. On cherche M,M' : Avec (A,B) ; $\mathcal{D}$ et Biss. de (KA,KB), on a : ω et $\mathcal{C}$ car (ωB) tangente ; faire alors $(\omega K)\cap\mathcal{C}$?
   Des lieux : ▪ Si $M\in\Delta$, dr. passant par H : $M'\in\Delta'$; $4.\alpha_K.\beta_K=HA^2$: $K\in$ Hyp. d'asympt. Δ,Δ'
   ▪ Si $HM=r$ (cercle de centre H), $HM'=R$ (idem) et $KA+KB=r+R$: ellipse de foyers A,B.
   ▪ Si $M\in\mathcal{C}$ de centre O, $M'\in\mathcal{C}$ et $\omega K\perp OK\Rightarrow K\in Arc\text{-}AOB$ du cercle de diamètre $[O\omega]$.
   ▪ Si $M\in\Gamma$, de centre Ω orth. à un (donc à tous) cercle passant par A,B, $M'\in\Gamma$ aussi ; la polaire de P / Γ est $\mathcal{D}=(OH)$, donc P est fixe ! Et K décrit le cercle de diamètre $[\Omega P]$.

   Rem. $puiss(\omega/\mathcal{C})=\omega A^2=\omega O.\omega H$; donc O,H,M,M' cocycliques. $\Omega=Bar[A(1),B(-k^2)]\Rightarrow P=Bar[A(1),B(k^2)]$. Relation de Descartes $2/(z-z')=1/(z-a)+1/(z-b)$ et $[1,-1,z,1/z]$ QH.

4.8 (*) Théorème de Mohr-Masheroni (Napoléon l'a importé d'Italie)

1. **Tracer un cercle Γ, puis oublier son centre Ω et son rayon. Prendre ensuite O sur Γ, tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R coupant Γ en A,B ; puis contruire D intersection des 2 cercles de centre A,B passant par O (donc de rayon R). Tracer le cercle de centre D passant par O coupant $\mathcal{C}$ en E,F (et Ox en J). Les cercles de centres E,F passant par O se coupent en $I=\Omega$.**
2. Dém : Soit un r.o.n. $(O,Ox=(OD))$: $OA=1$ et l'inversion $f:M(z\neq 0)\mapsto M'(z'=1/\overline{z}=z/|z|^2)$.
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|^2$. Déduire que O,M,M' sont alignés et que $\overline{OM}.\overline{OM'}=1$.
   (b) Puis que $fof=Id_{\mathbb{C}^*}$ d'où f involutive $\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$. Et aussi que A,B, E,F sont invariants.
   (c) On suppose connu que : $droite(A,B)$ a pour image un cercle passant par O [privé de O] ; si $G=\Gamma\cap Ox$, $H=droite(A,B)\cap Ox$, déduire : $f(droite(A,B))=\Gamma$, $f(H)=G$, $f(D)=\Omega$.
   (d) Soit $K=droite(E,F)\cap Ox$. Montrer : $f(cercleOEF)=droite(E,F)$; $f(J)=K$; et $\Omega=I$.

5 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

5.1 Trajet minimum [hors Problème de Fagnano et de Fermat (**)]

1. Soit A, B d'un même côté de la droite Δ ; trouver $M \in \Delta$: $AM+MB$ soit minimum [$\mathrm{sym}_{\perp}(A)/\Delta$].
2. Et avec MA^2+MB^2 [cf. théorème de la médiane] ? ($MA^2-MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB}$, I milieu de $[AB]$.)

5.2 Sur le triangle rectangle [hors Théorème de Pythagore, inversion]

Si H $\mathrm{proj}_{\perp}(A,(BC))$: ABC $\mathrm{rect}_{en.A} \Leftrightarrow BA^2 = \overline{BC}.\overline{BH} \Leftrightarrow AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} \Leftrightarrow AB.AC = BC.AH \Leftrightarrow \left(H \in]B,C[\,;\ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\right)$. Et α contact cercle.inscrit-BC : $S = B\alpha.\alpha C$. [$2S = bc = (r+B\alpha)(r+C\alpha)$]

Note. ABC rect_A, $ABPQ, ARSC$ carrés ; alors $(BS),(CP),(AH)$ concourantes ! [avec le Th. de Céva 5.18]

5.3 (*) Problème de Fagnano 1682-1766 et variations cf. 5.8, 5.15

1. Soit un triangle acutangle (angles $\leqslant 90^\circ$) ABC. $X \in (BC)$ quelconque, $X', X"$ ses symétriques orthogonaux par rapport à (AB) et (AC) dans l'ordre. Figure en joignant AX, AX', $AX"$?
2. X étant le point précédent, $Y \in (CA), Z \in (AB)$ quelconques, justifier $X'X" \leqslant XY+YZ+ZX$ et que l'égalité est possible pour Y, Z à placer. Puis vérifier que : $X'X" = 2AX.sin(A)$.
3. (a) Justifier qu'il y a une et une seule position de X, puis de Y, Z rendant le périmètre minimum.
   (b) Soit S l'aire du triangle, $a = [BC]$ etc les côtés et h_A la hauteur issue de A. Justifier que $sin(A) = 2.S/\ b.c$; $ah_A = 2.S$ et en déduire que le périmètre minimum vaut $8.S^2/\ a.b.c$.
4. Sur une autre figure tracer ABC et les pieds A_1, B_1, C_1 des hauteurs [c'est le **triangle orthique**]. Justifier que $\widehat{C_1A_1A} = \widehat{AA_1B_1} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$. [Ceci signifie que $A_1B_1C_1$ est une trajectoire de lumière.] (On peut utiliser le triangle $X'AX"$ analogue à question 1, avec le point $X = A_1$.)
5. Soit H l'orthocentre de A, B, C (intersection des hauteurs) O le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrer que $\widehat{HAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B}$. Puis que $2.\widehat{ABC} = \widehat{AOC} = \pi - 2.\widehat{OAC}$. Conclure que AH, AO et AB, AC ont même bissectrices. [On dit : AH et AO isogonales ; ceci est le Théorème de **Nagel**].
6. Il en résulte que : $\widehat{BB_1C_1} = \widehat{BCC_1} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B}$ (ou Th. de l'angle inscrit) ; donc : $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{B}$. Comme $(AC, AT_A) = BC, BA)$ conclusion **sur (B_1,C_1) et (O,A) à tracer ?** Note : $\widehat{OAA_1} = \mid \widehat{B} - \widehat{C} \mid$.

Rem . ABC et tr. de Gergonne du tr. orthique homothétiques de même droite d'Euler ; ou jkl, $i_1i_2i_3$ tr. de G. du tr. orthique $hom(S, 2R/r)$, même droite d'Euler $\mathcal{E}$: $O', O_{ABC}, H_{jkl} = i_{ABC} \in \mathcal{E} \Rightarrow S \in \mathcal{E}$.

. Soit L et M, projections orthogonales de A_1 sur (AB) et (AC) dans l'ordre et $Q = (CC_1) \cap (LM)$. $(LM)//\ (X'X" = B_1C_1)$ avec $X = A_1$; coupant $[A_1C_1]$ en son milieu ; et $\frac{CA_1}{CB} = \frac{CM}{CB_1} = \frac{CQ}{CC_1}$; A_1LC_1Q rectangle ! On montre encore que les 6 points L, M et analogues sont sur un cercle : cercle **de Taylor**.

5.4 (*) Théorème de la puissance d'un point et relations d'Euler

2 cercles (O,R) ; (i,r) sont circonscrit ; inscrit à un triangle $\Leftrightarrow Oi^2 = R^2 - 2Rr$ (Chapple, Euler).

Idem (O,R) et (j,r_A) circ. et ex-inscrits $\Leftrightarrow (Oj)^2 = R^2 + 2Rr_A$. **29.10**.6 : $puiss(i/Cercle) = iO^2 - R^2 = \overline{iA}.\overline{iA_0}$, A_0 milieu$\widehat{BC}$. Or $iBjC \in$ cercle.centre.Méd$[BC] \cap ij = A_0$: $iA_0 = BA_0 = 2R.sin\ \frac{A}{2}$; $sin\ \frac{A}{2} = \frac{r}{iA}$.]

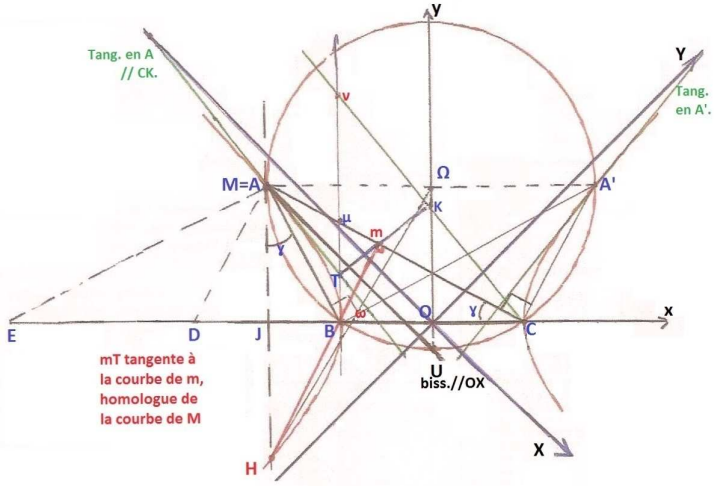
5.5 (*) Quadrilatère A, B, C, D, quelconque et droites parallèles

Si $E = (BD) \cap //(BC)$ en A, $F = (AC) \cap //(AD)$ en B, montrer que $(EF)//(CD)$. [$I = (AC) \cap (BD)$ et h_I, h'_I, hom : $hoh' = h'oh$. Cas $(AC)//BD$?] **Rem**. Si $ABCD$ trapèze$_{(AB)//(CD)}$: Moy-harm.$(AB, CD) = 2UI = 2IV = UV$.
Ex. : BC corde focale de Par. ; $V = F$; $A, U, D \in$ Dir. ; $I_{sommet} \in AC \cap BD$! [$IV/AB + IV/CD = (CV+BV)/CB = 1$.]

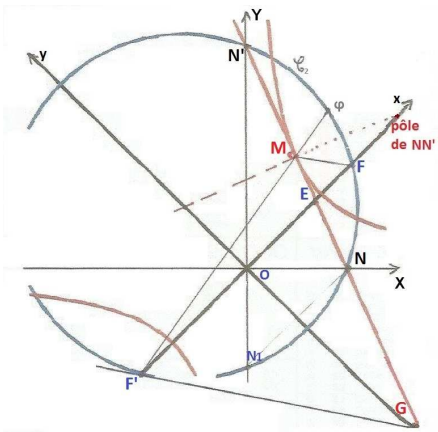
5.6 (*) Triangle pseudo-rectangle en A ; hyperbole équilatère HE

Ayant 1 cas, il y a 4 par symétries ; cas $\beta-\gamma=\pi/2$. Ici ABC direct, $BC=2.a$, $\gamma>\pi/4,\ \beta<3\pi/4$.

1. Montrer qu'il y a 1 cas de triangle pseudo rectangle isocèle : $\beta=\dfrac{2.\pi}{3}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. [1/3 triangle équil. !]
2. Soit O milieu de $[BC]$, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ orthonormé, $\vec{\imath}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Vérifier que $(AB): y=tan(\beta).(x+a)$, $(AC): y=\dfrac{1}{tan(\beta)}(x-a)$. Et que $A\left(\dfrac{a}{cos(2\beta)}, a.tan(2\beta)\right)$ décrit l'hyperbole équilatère : $x^2-y^2=a^2$.
3. Si $D=(\perp \text{ à } AC \text{ en } A)\cap(BC)$, montrer que $J=mil[BD]$ est pied de la hauteur issue de A. Et : $JA^2=\overline{JB}.\overline{JC}$; Ay tangent en A à Γ_{ABC} d'où $x^2-y^2=a^2$. Idem $J=mil[EC]$ [$\perp(AB)$ en A].
4. Puis $H=sym(A/(BC)$ orth. de ABC $[(BH)\perp(AC)]$. Si $A'=sym(A/Med.[BC]), \Omega=mil[A,A']$ $\omega=mil[\Omega H]\in(BC)$: centre du cercle d'Euler. $Biss_A$ coupe (BC) à $\dfrac{\pi}{4}$ $[U=mil.arc.BC]$ et : $\widehat{ACA'}=\widehat{ABA'}=\pi/2$: sur toute // à l'axe transverse, $[AA']$ est vue sous $\pi/2$ de chaque sommet.
5. Si R est le rayon, vérifier (avec angles au centre) que : $\dfrac{BC}{sin(\alpha)}=\dfrac{CA}{sin(\beta)}=\dfrac{AB}{sin(\gamma)}=2.R$. Puis que : $CA^2+AB^2=4.R^2$ (idem ici au triangle rectangle). Si $\mathcal{A}=2R^2 sin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma)$ aire du triangle,
6. $\mathcal{A}=\dfrac{BC.AB.sin(\beta)}{2}=\dfrac{R^2.sin(2\alpha)}{2}$! Puis, $ABJ, A'AB$ semblables (ou ABA' rectangle, $AC=A'B$) : $BA^2=2R.BJ$, $CA.\dfrac{AJ}{sin(\beta)}=CA.AB=2R.AJ$, $CA^2=2R.CJ$ et $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AJ^2}$. Soit $A=M$:
7. Si $\mathcal{C}$ cercle principal de diamètre $[BC]$: $\mu=(By)\cap(AC)$, $m=proj_\perp(B,(AC))$. Vérifier la D.H. : (C,μ,m,M) [car $B\mu, BC$ biss.]. $m\in\mathcal{C}\leftrightarrow M\in HE$ sont dites courbes homologiques (homologie de centre C, d'axe By, **26.3**) : les tangentes en m et M se coupent en $T\in By$. Si $K=mT\cap Oy$, KmT homologue de MT ; si $\nu\in CK\cap By$, K mil$[C\nu]$ homologue du point ∞ de $Tang_M: CK//MT$.
8. Et a) $XY=\dfrac{a^2}{2}$ si Asympt. b) Si $(MM')\cap(Asympt)=\{N,N'\}$: même milieu. c) Si Tang. en M : $ON.ON'=2X.2Y=2a^2$ [Aire Cte] et OMN, OMN' isocèles[5]. Foyers : Si $\mathcal{C}_2$ centré sur Oy passant par N,N', coupe Ox en F',F ; $N_1=sym_\perp(N/Oy)$: $OF^2=OF'^2=ON_1.ON'=2a^2\Rightarrow F',F$ fixes et $OF=a.\sqrt{2}$. $\widehat{F'ON_1}=\widehat{FON}\Rightarrow Ox,Oy$: biss. de $\widehat{NON'}$; si $E=NN'\cap Ox, G=NN'\cap Oy$, $(NN'EG)$ D.H. : G pôle de FF' ; pôle de NN' conj. de G : $\in FF'$. Et $NN'FF'$ points où une tangente coupe les asymptotes $\cup$ foyers sont sur un cercle partagé harmoniquement (QH). $N'O, N'N$ médianes et symédianes de $FN'F'$; $F'M, F'F$ idem pour $F'NN'$. Si $F'M\cap\mathcal{C}_2=\varphi$, $N'\varphi=NF$: $M\varphi=MF$; $(MF'-MF)^2=MF'^2+MF^2-2MF.MF'=2OM^2+2OF^2-2MN^2=2OF^2=4a^2$. De plus la tangente en M est bissectrice de $F'MF$ (QH) et $MF.MF'=MN^2=OM^2$. **4.7, 5.18**.



$\beta-\gamma=\pi/2$, $\omega=H*\Omega\in(B,C)$ [**milieu de** H,Ω].



Oxy, OXY : $F'FNN'$ Q.H. ; $OF=a.\sqrt{2}$.

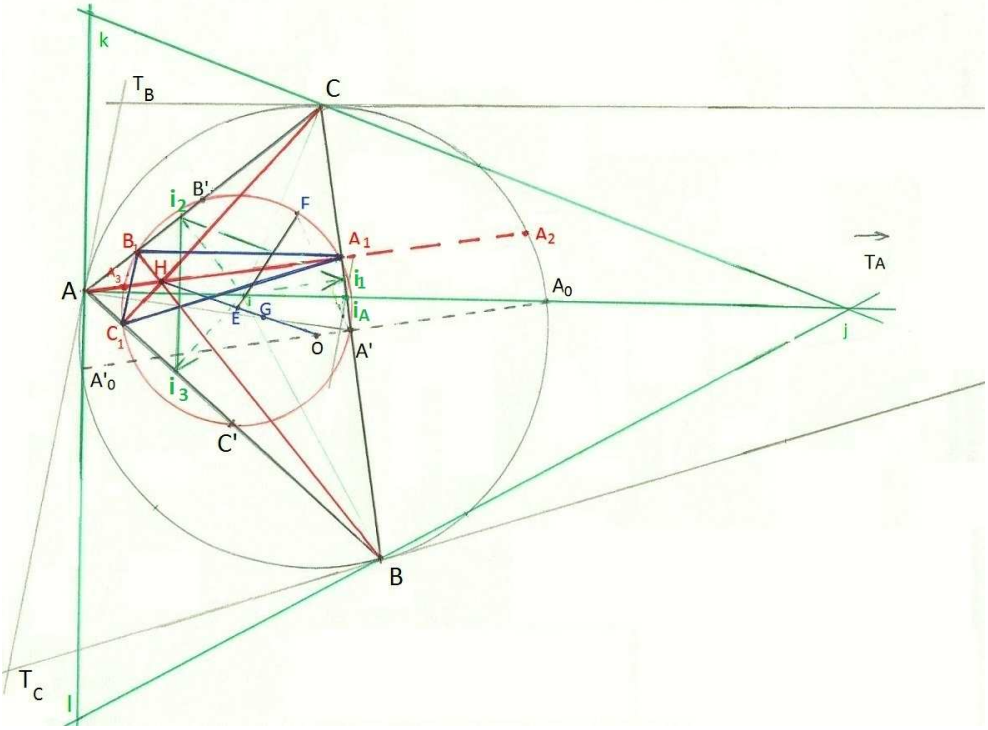
[5] Une question plus générale : Si OX, OY non orthogonaux, enveloppe des NN' : $\overline{ON}.\overline{ON'}=k^2$? $X/t+tY/k^2=1$, $-X/t^2+Y/k^2=0$. $X=t/2, Y=k^2/2t; XY=k^2/4=$"$(a^2+b^2)/4$" ; d'où Hyp., $OF=OF'=k$; F,F',N,N' Q.Harmonique.

5.7 (*) Hyperbole équilatère $\mathcal{H}$: des compléments à 5.6 (cf. 29.2)

1. Si $M \in \mathcal{H}$ projeté en P, Q sur $Asympt$, $M' \in \mathcal{H}$, MM' de direction fixe coupant $Asympt$ en N, N': $A = M_0 = M'_0$ point de tangence ; $MP.MQ = Cte \Rightarrow MN.MN' = cte = AD.AD' = OA^2 = a'^2$. Si $I = mil[MM']$, $a'^2 = (IN - IM)(IN + IM) = IO^2 - IM^2$: (avec diamètres conjugués $x'^2 - y'^2 = a'^2$) et $IM^2 = IO^2 - OA^2 = (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OA}) = \overline{IA}.\overline{IA'}$, A' : sym(A/O) ; d'où (puiss $I/\Gamma^*_{M,A,A'}$) IM tangente à $\mathcal{C} : \mathcal{H}$, lieu des points $M \in \Gamma^*_{M,A,A'}$ de tangente de direction fixe ; idem si M_1 diam. opposé sur Γ^* : Tout cercle passant par A, A', diam. opposés de $\mathcal{H}$, coupe $\mathcal{H}$ en M, M_1 d'un diamètre de Γ^*, de direction fixe $\perp$ *Tang. en* A, A' à $\mathcal{H}$ (autre définition ; AA'-$Tang_A$ diamètres conjugués de $\mathcal{H}$) : si $|\ \mathcal{H} \cap \Gamma^*\ | = 4$, 2 diam. opposés sur une, les 2 autres aussi sur l'autre !
2. De plus : $\widehat{MAA'} - \widehat{MA'A} = \widehat{MIA} = cte$ (2ème définition). Et si $Biss_{A'MA}$ coupe $\mathcal{C}$ en U, on a $2.\widehat{IMU} = \widehat{M\Omega^* U} = cte$: $Biss$ a une direction fixe $//Asympt$ (3ème définition). Et **29.2**.

5.8 (*) Avec le Théorème de l'angle inscrit, ABC inscrit dans $\mathcal{C}$

1. On trace la bissectrice issue de A coupant BC en i_A, $\mathcal{C}$ en A_0 ; A_0 aussi milieu de $[ij]$, $j = \cap biss_e$. Montrer que les triangles ABi_A et AA_0C sont semblables. Déduire que : $AB.AC = AA_0.Ai_A$.
2. Théorème **de Reim** : Soit 2 cercles sécants en A, B, C, A, C' et M, B, M' alignés, $(A, B, C, M) \in \Gamma$, etc. Montrer que $(C', M')//(C, M)$. [$\neq$ **4.5**. Ind. $\widehat{C} + \widehat{C'} = \pi$ ou avec **29.8** : 2 droites=conique dégénérée.]
3. Soit A_1, B_1, C_1 pieds des hauteurs et $tang_A$ tangente en A. Avec les angles : $(AC, AT_A) = (BC, BA)$ $(AC, B_1C_1) = (BC, BC_1)$, déduire : $tang_A//B_1C_1$ et $OA \perp B_1C_1$ sans plus supposer 'triangle aigu' !



$\Rightarrow$ $T_AT_BT_C$ **triangle tangentiel et** $A_1B_1C_1$ **triangle orthique : homothétiques.** $H_{ABC} = i_{A_1B_1C_1}$ **5.3.** AT_A **: symédiane 5.18.** E **c.-cercle d'Euler,** F **point de Feuerbach,** EiF **alignés 5.23.** ***jkl*** **et le triangle de Gergonne de son triangle orthique** $i_1i_2i_3$ **: homothétiques** $[(kl) \perp (Aij) \perp i_2i_3]$ **; même droite d'Euler** [$Euler_{jkl}$ contient $i = H_{jkl}//Euler_{i_1i_2i_3}$ contient i, centre du cercle circonscrit]. Idem ABC.

5.9 Intersection de deux cercles. Axe radical et construction (...)

Soit $C_1 : x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$; C_2 analogue et $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$, en repère orthonormé ; et $\mathcal{D} : 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y = c_1 - c_2$, "axe radical" des 2 cercles ; $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ **même puiss**$/C_1, C_2$.

1. Vérifier que $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap \mathcal{D}$. (Note : hauteur AA_1= axe rad. des cercles de diam $[AB], [AC]$.)
2. Vérifier que $\mathcal{D}$ est orthogonale à la ligne des centres ; puis construire $\mathcal{D}$ si C_1, C_2 non disjoints.
3. Si disjoints : avec un cercle coupant C_1 et C_2, construire $\mathcal{D}$. [Ind. $Axe(C\text{-}C_1) \cap Axe(C\text{-}C_2) \in \mathcal{D}$.]

5.10 Diverses constructions de cercles ; les points de Poncelet (...)

1. Construire Γ centré en I, $\perp \mathcal{C}$ de centre O. [Euclide : $\Gamma \cap \mathcal{C} = \{T, T'\}$: $ITOT'$ cocycliques.]
2. Construire les points de Poncelet du faisceau engendré par 2 cercles disjoints non concentriques. [Γ de centre $M \in Axe.radical$, $\perp$ à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, coupe la droite des centres aux points cherchés.]
3. Construire, s'il existe, le cercle orthogonal à 3 cercles donnés. [Son centre a même puissance/3. Si les centres sont non alignés, un seul point convient : I centre radical, intersection d'axes radicaux. Si I intérieur à 1 cercle, 0 solution. Si I extérieur, un cercle de centre I, $\perp$ à 1 cercle, est $\perp$ aux 3.]

5.11 (*) Quadrilatère inscrit (ex : biss de MNPQ)/circonscrit/orthodiagonal

1. Si quadril. quelconque non orthocentrique, centre d'Euler, intersection des 4 cercles d'Euler **29.2** ;
   ▪ Si inscrit $\overrightarrow{\Omega E} = 2.\overrightarrow{\Omega G}$ et $E \in$chaque mi-hauteur ; si orthodiagonal $E = AC \cap BD$; si les deux q.2,3.
   ▪ Si $ABCD$ convexe inscrit autre preuve : de P milieu de $[AB]$, abaisser $PP' \perp (CD)$, etc. Si E : $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} = 2.\overrightarrow{\Omega E}$, montrer que ces 4 segments passent par E. [$E \neq (AC) \cap (BD)$ ici ; car $2.\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} \perp \overrightarrow{CD}$: Fini ! (E "point de Monge" si tétraèdre et sphère de centre Ω).]
2. Un Théorème de Brahmagupta : $ABCD$ inscrit dans un cercle **et** à diagonales $\perp$ sécantes en X (orthodiagonal) : $P, X = E, P'$ alignés ! [ou $X = E$ car $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{BXP}$... $\overrightarrow{\Omega E} = 2.\overrightarrow{\Omega G}$ aisé.]
3. Quadr. inscrit orth. ▪ $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2 = AB^2+CD^2 = AD^2+BC^2 = 4.R^2$. ($\widehat{A\Omega B}+\widehat{C\Omega D} = \pi$)
   ▪ Rayon-c$_{PQRS}$: $4.PR^2 = AC^2+BD^2 = AE^2+EC^2+2AE.EC+... = 4(R^2-p.(E/C_{ABCD})) \Rightarrow 4.\rho^2 = 2.R^2-\Omega E^2$.
4. Quadr. orthodiagonal, non inscriptible, plus de droite conc. (Louis Brand 1944). Avec le parallélogramme de Varignon (père Pierre Varignon, jésuite 1654-1722) des milieux $PQRS$ de $ABCD$ (de périmètre $AC + BD$; ici c'est un rectangle), vérifier [avec $\widehat{PP'R} = \frac{\pi}{2}$] que les 8 points M_i, H_j sont sur un cercle, centré en G. Avec K, L milieux de $[AC], [BD]$ et $EK\Omega L$ rectangle, G milieu de $[E\Omega]$. Cas de $ABCH$, H orthocentre ce cercle de 8 points (6 ici) est le même que celui de $BCAH$ (car 3 points communs) : c'est le cercle des 9 points ! de centre milieu de $[B'B_3]$, B_3 milieu de $[HB]$ et isobarycentre de $PQRS$ donc de $ABCD$; donc le centre ω du cercle d'Euler est $Bar(G, 3), (H, 1)$.
5. Q. circonscrit (tangentiel) : $AB+CD = AD+BC$ (Henri Pitot) puis $Aire_{IAB+ICD} = A_{IBC+IAD}$. Or $\{M : 2.A_{MAB+MCD} = A_{ABCD}\} = \mathcal{D}(mil[AC], mil[BD])$ (Th. Pierre-Léon Anne) ; $\Rightarrow I \in \mathcal{D}_{Newton}$.
6. Q. $ABCD$ inscrit et circ. t, u, v, w : tangences. (Durrande) : Ati sembl iuC ; $At.Cv = Bt.Dv = r^2$.
7. Pour le quadrilatère inscrit dans un cercle cf. aussi **4.7** ; **5.10** ; et les Théorèmes de Ptolémée **5.22**.

5.12 Formule de Héron d'Alexandrie [quadrilatère inscrit : F. de Brahmagupta]

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe : AB, BC, CD, DA égaux à a, b, c, d, de surface S, donc $|AB - AD| \leqslant BD \leqslant DC + BC$; $|CB - CD| \leqslant AB + AD$ (*). Si $2p = a + b + c + d$,
   (a) Montrer que $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad.cos(\alpha) - bc.cos(\gamma))$, $\alpha = \widehat{BAD}$, $\gamma = \widehat{BCD}$.
   (b) Vérifier que : $2S = ad.sin(\alpha) + bc.sin(\gamma)$ (en découpant en 2 triangles). Et déduire que $(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 = 4(ad + bc)^2 - 8abcd[1 - cos(\epsilon)]$, $\alpha + \gamma = \pi + \epsilon$.
   (c) Vérifier que : $16S^2 = [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd.sin^2(\frac{\epsilon}{2})$ (Bretschneider) et déduire $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ $\Leftrightarrow (A, B, C, D)$ cocycliques, (p demi-périmètre).
   (d) Pour a, b, c, d donnés tels que (*), montrer qu'il existe α tel que $cos(\alpha) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$. Vérifier que ceci traduit $cos(\gamma) = -cos(\alpha)$; préciser ce cas géométriquement.
2. Et dans le cas du triangle ? [Formule de **Héron d'Alexandrie :** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.]

5.13 Triangles équilatéraux (ex.1 peut servir au Th. de Fermat 32.3)

1. Soit ABC équilatéral inscrit dans $\mathcal{C}$; montrer : $r_{B,\frac{\pi}{3}} : M_{petit\widehat{BC}} \mapsto M' \in [AM]$; et $BM + MC = MA$.
2. Soit 3 droites $D, D', D"$ passant par A telles que $(D, D') = (D', D") = (D", D) = \pi/3$ (π). Idem avec $\Delta, \Delta', \Delta"$ et $B \neq A$. Montrer que : $M = D \cap \Delta$, M', $M"$ forment un triangle équilatéral direct. (Indication : Voir que $M, M"$ sont sur le cercle ABM' par le théorème de l'angle inscrit ! Etc.)

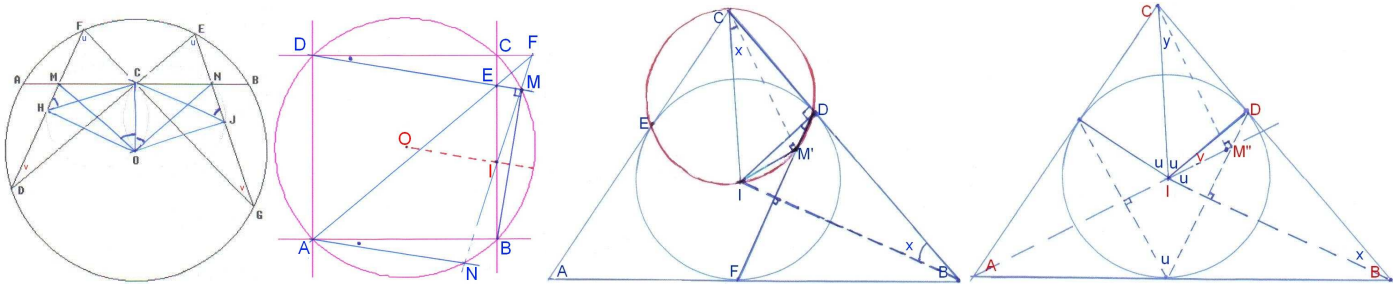
5.14 (*) Au sujet des cercles : Trois exercices très difficiles

1. Théorème **"du papillon"** (énoncé facile, solution difficile). Soit une corde $[AB]$ de milieu C d'un cercle et 2 cordes DE, FG passant par C, coupant AB en M, N. Alors : C est milieu de $[MN]$.
2. Soit $ABCD$ un carré ; on trace (AE), $E \in (BC)$ coupant (CD) en F. Soit I le milieu de $[BE]$. Alors $(FI) \cap (DE)$ décrit le cercle circonscrit au carré. Et (FI) est tangente au cercle inscrit.
3. Soit un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit, DEF le triangle inscrit : $D = proj_{BC}(I)$. Supposons $AC \leqslant AB$. Montrer que la projection orthogonale de C sur (AI) est sur (DF).

Solutions. 1) Soit E, F sur le petit arc ; les triangles FCD, ECG sont semblables : $\frac{FD}{FC} = \frac{EG}{EC}$. Avec les perpendiculaires OH et OJ, $FH/FC = EJ/EC$; donc FCH et ECJ semblables et $\widehat{FHC} = \widehat{EJC}$; ces angles se retrouvant en MOC ($OCMH$ cocycliques) et NOC : $CM = CN$.

2) Si M, N sur le cercle avec $(AN)//(DM)$, fig.2 : les triangles ECM, ADN sont homothétiques car $\widehat{AND} = \widehat{DMC}$; et $Arc_{\widetilde{CM}} = Arc_{\widetilde{BN}}$, $\widehat{EMB} = \pi/2$. Donc (MN) coupe (EB) en son milieu I.

En ayant $\widehat{IMB} = \widehat{IBM}$, (IM) et (IB) sont symétriques par raport à (OI). D'où les tangences.



3) Si $M' = Cercle_{CDIE} \cap DF$; $\overrightarrow{IM'} \perp \overrightarrow{CM'}$ et, fig.3, on a 3 angles x égaux. Si $M" = proj(C, (AI))$, fig.4 : $x + u + v = y + u + v$, $x = y$; et comme $\overrightarrow{IM"} \perp \overrightarrow{CM"}$, $M' = M"$ qui est donc sur (DF).

Note. $\mathcal{D}//(A, B)$ en $M', M"$ coupe $[AC]$ en son milieu B' car $B'CM" = B'M"C \Rightarrow CB'M" = \widehat{A}$ ...

5.15 (*) Pieds des bissectrices du triangle orthique 5.16, 5.3,8

1. Soit A, B, C un triangle de centre du cercle circonscrit O ; O_a symétrique de O/ milieu A' de $[BC]$. Montrer : $O_aB \perp A_1B_1$ côté du triangle orthique. [Car $O_aB//OC \perp A_1B_1$.] Idem $O_aC \perp A_1C_1$.
2. (*) Et aussi que $O_aA \perp I_BI_C$, I_B, I_C étant les pieds des bissectrices du triangle orthique $A_1B_1C_1$.

[Si H orthocentre de ABC, $H = I$, centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ (non à ABC). On peut noter $A = J$... car centre d'un cercle ex-inscrit à $A_1B_1C_1$. $A_1B_1C_1$ est aussi triangle orthique pour HCB d'axe orthique **5.16.** $J_A = BC \cap B_1C_1, I_B = HB \cap A_1C_1, I_C = HC \cap A_1B_1 \perp$ Droite d'Euler EA (car A orthocentre) ! Or (connu) $\overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO_a}$ et E milieu de $[OH]$; d'où $\overrightarrow{O_aA} = 2.\overrightarrow{EA}$.]

5.16 (*) Avec la puissance d'un point/cercle 29.10.6, axe orthique

1. (a) Vérifier que $\mathcal{C}'(M) - \mathcal{C}(M) = 2.\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{HM}$, $H = proj_{\perp}(M, Axe.rad.)$ $O \neq O', \mathcal{C}(M) = puiss(M/\mathcal{C})$.
   (b) Si ω est le milieu des centres, I sur $Axe \cap (OO')$ déduire que : $2.\overline{OO'}.\overline{\omega I} = R^2 - R'^2$.
2. **Axe orthique.** Soit ABC un triangle, $A_1B_1C_1$ son triangle orthique, $P = (B, C) \cap (B_1, C_1)$, etc. Montrer que P, Q, R Axe $\perp$ Droite d'Euler de ABC. [Ind. : $\overline{PB}.\overline{PC} = \overline{PB_1}.\overline{PC_1}$ donc P a même puiss./aux cercles (ABC), $(A_1B_1C_1)$, etc. Et axe radical $\perp$ droite des centres $(O,\ E)$.]

5.17 (*) Théorème de Ménélaüs. Les six pieds des bissectrices (...)

1. Avec une projection sur (B, C) pour $\Longrightarrow$ et Cours pour la réciproque, montrer que : $(M \in (B, C), N \in (C, A), P \in (A, B)$ sont alignés$) \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$. Utilisation : on a
2. **les 6 pieds des bissectrices $(i_A, ..., i'_C)$ intérieures et extérieures alignés 3 à 3.** [$\frac{Ci_A}{Bi_A} = \frac{Ci'_A}{Bi'_A} = \frac{b}{c}$...]

5.18 (*) Théorème de Céva. Point de Lemoine (et de Gergonne/Nagel)

1. Avec K barycentre de A,B,C pour $\Rightarrow$ montrer, pour $M\in(B,C), N\in(C,A), P\in(A,B)$: $(AM,BN,CP$ concourantes [en K] ou parallèles$)$ $\Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$. $\left(\begin{smallmatrix}On\ peut\ prendre\ M':\\ [B,C,M,M']D.H.(...)\end{smallmatrix}\right)$
2. Utilisation. **"Symédianes" concourantes au point "de Lemoine" L du triangle** cf. fig. **5.8** et **4.7**

   Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, $T_AT_BT_C$ le triangle formé par les tangentes en A,B,C A_0,A_0' les milieux des arcs BC, A' milieu de BC. Comme BA_0,BA_0' bissectrices de (BC) (BT_A), $(B;A_0,A_0',T_A,A')$ est un faisceau harm., d'où (A_0,A_0',T_A,A') [alignés] en D.H. et $(A;A_0,A_0',T_A,A')$ f. harm. Ayant $(AA_0)\perp(AA_0')$, ce sont les bissectrices de (A,T_A) et (AA'). (AT_A), symétrique de la médiane (AA')/biss., est dite symédiane. Avec $T_AB=T_AC$... $(a'=T_BT_C,\ 2p'=a'+b'+c')$, $\frac{\overline{AT_B}}{\overline{AT_C}}.\frac{\overline{BT_C}}{\overline{BT_A}}.\frac{\overline{CT_A}}{\overline{CT_B}}=-1$; ce point de concours est le "point de Lemoine" de ABC ; "point de Gergonne" de $T_AT_BT_C$ si ABC aigu ; si $\widehat{A}$ obtus (2 cas de fig.) Γ cercle ex-inscrit à $T_AT_BT_C$; $T_AA\cap$... non point de Gergonne ni "point de Nagel" de $T_AT_BT_C$ **5.24** (mais toujours de "Lemoine-Grèbe" de ABC).

   Et si $x=dist(P,BC)$, ... P intérieur ; le minimum de $x^2+y^2+z^2$ ayant $ax+by+cz=2S$ vérifie : $2x/a=2y/b=2z/c=2(x^2+y^2+z^2)/2S$; $(ax:by:xz)$ *prop* $(a^2:b^2:c^2)$ coeff. baryc. c'est donc le point de Lemoine **5.30**.

   Remarques . On a aussi un théorème de Céva "trigonométrique", avec des sinus (exercice).

   Avec lui et l'isogonalité (*) **5.30**, on a de suite que les symédianes de A,B,C sont concourantes.

   . $B_1=proj_{AC}(B)$: syméd_A coupe $[B_1C_1]$ au milieu M car **0.7** $(AB,AC)\equiv(BC,B_1C_1)$, $B_1C_1//AT$.

   (Attention $T=T_BT_C$.) Et AM polaire de $U=AT\cap BC$; donc T_A **pôle de (BC) est aussi sur** (AM).

   Et pour $A_1B_1C_1$, A,B,C sont les centres des cercles ex-inscrits. $(A,B_1*C_1)\cap$... est dit "Mittenpunkt").

   . $U=\cap(T_BT_C),(BC),(\beta\gamma)$, $\beta=BL\cap AC$ $[(BC)\cap(\beta\gamma)=U':AB,AC,AL,AU'$ Harm. $U=U']$ V,W : dr. de Lemoine **29.10**. T_A conjugué de U, U conj. de A (tang.) : pôle$(AT_A)=U$, L conj. de U : (U,V,W) polaire de L.

   Ou aussi (*) Th. de Pascal : $A,B,C,A^*=C,B^*=A,C^*=B\in$ Conique $\Rightarrow AB^*\cap A^*B$, ... alignés **29.1**.
3. (*) En gén. : $A\alpha,B\beta,C\gamma$ céviennes conc. $\Leftrightarrow\alpha'=(BC)\cap(\beta\gamma)$, ... alignés : polaire trilinéaire de M/ABC.

5.19 Coordonnées barycentriques $M{=}bar[A,AireMBC;B,AireMCA;C,AireMAB]$

1. (*) Pour A,B,C non alignés, montrer que tout point M du plan (A,B,C) est un barycentre de A,B,C avec certains coefficients ; par exemple Aire(MBC), Aire(MCA), Aire(MAB). **29.1**
2. Et que des coordonnées de i, centre du cercle inscrit sont $\left(\begin{smallmatrix}A&B&C\\a&b&c\end{smallmatrix}\right)$ $[i_k=proj_\perp(i):\left(\begin{smallmatrix}i_1&i_2&i_3\\a&b&c\end{smallmatrix}\right)]$! Du centre du cercle circ. $sin(2A)$, $sin(2B)$, $sin(2C)$; de l'orthocentre $tan(A)$, $tan(B)$, $tan(C)$.

5.20 (*) Inversion isotomique (si 3 points alignés, les inverses ? non !)

C'est $f:M\mapsto M'$ telle que $M_A*M_A'=G_A=A'$, $M_A,M_A',G_A\in(B,C)$. Vérifier que si M a pour coordonnées barycentriques $\left(\begin{smallmatrix}A&B&C\\x&y&z\end{smallmatrix}\right)$, $M':\left(\begin{smallmatrix}A&B&C\\yz&zx&xy\end{smallmatrix}\right)$. $\left(\begin{smallmatrix}\text{L'image de } D_\infty: x+y+z=0 \text{ est l'ellipse}\\ \text{de Steiner circonscrite } yz+zx+xy=0.\ \textbf{26.3}.\end{smallmatrix}\right)$

5.21 (*) En composant diverses similitudes affines directes (...)

1. Soit A,B,C,D un quadrilatère convexe direct ; $M,N,P,Q/AMB$ isocèle rectangle direct en M, etc.
   (a) Soit s la similitude de centre A d'angle $\pi/4$ de rapport $\sqrt{2}$ et s' de centre C, d'angle $\pi/4$ de rapport $1/\sqrt{2}$. Vérifier que $s'os$ est la rotation d'angle $\pi/2$ de centre le milieu de $[AC]$.
   (b) Idem avec s_2os_1, s_1(centre C,angle $\pi/4$,rapport $\sqrt{2}$) ; s_2(centre A,angle $\pi/4$,rapport $1/\sqrt{2}$). Images de M puis de P ? Conclure que $MP=NQ$, $(MP)\perp(NQ)$. (Victor Thébault.)
2. (Idem) Soit ABC dans le sens direct et 2 carrés extérieurs $ABDEA,ACFGA$; $I=B*C$ (milieu) $J=C*G,K=E*G,L=A*D$; $r_A=r_{A,\pi/2}$; H le symétrique de A par rapport à I.
   (a) Vérifier que r_A transforme $[EC]$ en $[BG]$. En déduire que $IJKL$ est un carré.
   (b) Par $r_{J,-\pi/2}$, vérifier que : $C\mapsto A,A\mapsto G,H\mapsto M$ où $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{r}_{-\pi/2}(\overrightarrow{CH})$, $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}$. Déduire que M est un point connu et que ACH et GAE sont isométriques. Comparer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EG}$.
   (c) A peut-il être le centre du carré ? (Exprimer $AJ=AL$, angle$(AL,AJ)=\pi$.)

5.22 (*) Inversion (image d'un cercle passant par O : une droite)

1. Avec les complexes, vérifier que $A'B' = \frac{k.\ AB}{OA.OB}$, pour une inversion de pôle O, de puissance $k > 0$.
2. D'où : Théorème de **Ptolémée**. Avec A, B, C, D cocycliques dans l'ordre $\Leftrightarrow B'D' \leqslant B'C' + C'D'$ en fait égalité, inégalité toujours vraie dans l'inversion de pôle A de puissance 1 : (même inég.) $\Leftrightarrow \frac{BD}{AB.AD} \leqslant \frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD}$ déduire : $\boxed{A, B, C, D \text{ cocycliques } \binom{et.cet}{ordre} \Leftrightarrow AC.BD = AD.BC + AB.CD.}$
3. Note : 2ème Théorème de Ptolémée. Autres notations : $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$; montrer que $\mathcal{A}(ABC) = \frac{a.b.AC}{4R}$, $\mathcal{A}(ADC) = \frac{c.d.AC}{4R}$ (relation des sinus) et déduire $\boxed{\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}}$ avec l'aire totale calculée de deux façons ! [Le 1er Théorème s'écrivant alors $\boxed{ac + bd = AC.BD}$.]

5.23 (*) Inversion : image d'un cercle ne passant pas par O (...)

1. Vérifier que "l'inversion conserve les angles". (On dit "tranformation conforme" car avec df_{M_0}, elle change l'angle α de 2 courbes en l'angle $-\alpha$ pour les courbes images : anti-homographie).
   Donc, avec des **courbes tangentes** : "l'inversion conserve le contact" ; et "l'orthogonalité".
2. Avec le Théorème de la puissance d'un point, un cercle $\Gamma(\omega, \rho)$ ne contenant pas O est transformé globalement en un cercle homothétique. On étudie l'image du centre : dessin ! (cf. DH.)
   Soit $\mathcal{C}(O, R)$ orthogonal à Γ en T, T' ; R, S ses intersections avec $O\omega$; une 1ère inversion de puissance $\Gamma(O)$ laisse Γ invariant ; dans le cas général, on ajoute une homothétie de rapport $k/\Gamma(O)$.
   Par la 1ère inversion, soit P image de ω et $A, B = \Gamma \cap O\omega$. Montrer que $P = TT' \cap O\omega$. Ind. :
   - un point de vue : (R, S, A, B) sont en DH (Formule de Newton) ; mais $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{O\omega}.\overline{OP}$; donc (R, S, ω, P) en DH. D'où (Polarité **cf. ch 29**) P sur la polaire de $\omega/\mathcal{C}$: $P \in TT'$.
   - un autre : $Q = TT' \cap O\omega$ est tel que O, Q sont conjugués/Γ cette fois ; or $2.\overline{O\omega} = \overline{OA} + \overline{OB} \Rightarrow \frac{2}{\overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OB}} + \frac{1}{\overline{OA}}$ ou (O, P, A, B) DH selon une relation de Descartes ; d'où $Q = P$. Donc :
     L'homologue du centre d'un cercle est le pied de la polaire de O par rapport au cercle image.
3. **Remarques** : − On peut aussi prendre l'image d'un rayon (ωT) de Γ par la 1ère inversion !
   - Soit M, M' homologues dans la 2ème inversion : les tangentes forment un triangle isocèle MIM' (cf.1) donc puiss (I/Γ) =puiss (I/Γ'). D'où I est sur l'axe radical Δ_r des deux cercles !
   - Et M, M', N, N' cocycliques (puiss de O), d'où $J = MN \cap M'N' \in \Delta_r$ car J centre radical !
   - Avec $f = inv(A', i_1A'^2 = j_1A'^2)$, i_1 $proj_\perp(centre.cercle.insc)$, $f(i_A) = A_1$ pieds de biss. et haut. car $A_1i_Ai_1j_1$ DH. Si $\mathcal{D} = sym_\perp(BC/biss_A)$, $A', A_1 \in f(\mathcal{D})$; et $(\mathcal{D}, BC) \equiv (AB, AC) \equiv (T_A, BC)$ **0.7** d'où $f(\mathcal{D})$ cercle d'Euler car sa tangente en $A'//T_A$: Th. de **Feuerbach** $\Rightarrow iE = R/2 - r$.
     Et AF_a, BF_b, CF_c conc. en φ, $iEF\varphi$ DH : soit φ centre d'hom. < 0, $h : \mathcal{C}_E \mapsto (i)$; $h(F_a) \in (i)$; puis si $h_A : (j) \mapsto (i)$, > 0, $h_A(F_a) = h(F_a)$ car sur (i), proche de A, même (T) : A, φ, F_a alignés.

5.24 (*) Partager $ABCA$ en deux longueurs égales, cf. 5.18

1. Avec une droite issue de A : Soit j_1 le point de contact de $[BC]$ et du cercle ex-inscrit face à A. Montrer que Aj_1 convient. (Tracer les deux tangentes issues de A au cercle ex-inscrit).
   [Notes $Bj_1 = Ci_1 = p - c$ (i_1 pied du cercle inscrit) $\Rightarrow$3 "céviennes" Aj_1, Bk_1, Cl_1 concourantes au **"point de Nagel"** (Th de Céva). Avec i_1, **"point de Gergonne"** : points **"isotomiques"**.]
2. Droite issue de A' milieu de $[BC]$: La bissectrice au triangle médian issue de A' convient. (Tracer par B sa parallèle coupant (A, C) en D. Alors $BA = DA$; et avec le Théorème de Thalès conclure. Cette intersection des bissectrices de $A'B'C'$ est appelée le : **"Spieker-center"**.)

5.25 (*) Une preuve du Théorème d'Erdös-Mordell (...)

Soit P intérieur au triangle A,B,C. $PA=u$, $PB=v$, $PC=w$; $\delta(P,(BC))=x$; y,z de même.
Alors : $u+v+w \geqslant 2(x+y+z)$ et égalité $\Leftrightarrow$ Triangle équilatéral de centre P. [D'un livre d'Avez : "Conjecturé par Erdös en 1935, prouvé par Mordell 2 ans plus tard, il fallut attendre encore 8 ans pour une première démonstration élémentaire par Karazinov ! Celle qui suit est du à V. Komornik".]

1. Supposons $P \in [BC]$. Montrer que Aire_{ABC} vaut $\frac{1}{2}(b.y+c.z)$. En déduire : $a.u \geqslant b.y+c.z$ $(*)$.
2. On prend maintenant P quelconque intérieur à l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   La parallèle à (B,C) passant par P coupe (A,C) en C_1 et (A,B) en B_1. En posant $a_1=B_1C_1$, $b_1=AC_1$, c_1 idem. Avec une homothétie de centre A, prouver que $(*)$ est encore vraie.
3. Soit $Q=sym_{\perp}(P/biss-int-A)$. Montrer alors que : $a.u \geqslant b.z+c.y$ $(**)$. (La clé !)
4. Déduire que $u+v+w \geqslant \frac{b^2+c^2}{bc}.x+\frac{c^2+a^2}{ca}.y+\frac{a^2+b^2}{ab}.z$ et le théorème, avec cas d'égalité.

5.26 (*) Cercles orthogonaux et relation trigonométrique (...)

Soit deux cercles (O,r) ; (O',r') ; se coupant en A,B. On note $t=\widehat{OAO'}=\widehat{OBO'}$.

1. Montrer avec le théorème d'Al-Kashi, que : $(OO')^2=(r'-r)^2+2rr'(1-cos(t))$.
   Déduire que $(TT')^2=2rr'(1-cos(t))$ où T,T' : points de contact d'une tangente commune.
2. On note L la projection de TT' sur (O,O'). Vérifier que $\frac{L}{TT'}=\frac{TT'}{OO'}$ et $L=\frac{2rr'(1-cos(t))}{OO'}$.
3. Puis $OO'.AB=2\mathcal{A}=2rr'sin(t)$. Déduire que $L=AB.tan(t/2)$ et $Cercles \perp \Leftrightarrow L=AB.$

5.27 (*) Avec le Théorème de l'angle inscrit, droites de Simson et Steiner

1. Soit un triangle ABC ; M donné, α sa $\text{proj}_{\perp}$ sur (BC), etc. Justifier : $\overrightarrow{\alpha\beta},\overrightarrow{\alpha M}=\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}$ (π) puis : $\overrightarrow{\alpha\beta},\overrightarrow{\alpha\gamma}=\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}$ (π). **Donc** : α,β,γ alignés $\Leftrightarrow A,B,C,M$ cocycliques.
2. Montrer que cette droite de Simson est parallèle à $A\alpha_1$ où α_1 est sur le cercle tel que M,α,α_1 alignés. Cf. aussi **29.2**. (avec $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\alpha_1}=\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M\alpha_1}=\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M\alpha}=\overrightarrow{\gamma B},\overrightarrow{\gamma\alpha}=\overrightarrow{AB},\overrightarrow{Si_M}$.)
   Donc : $Si_M \perp Si_N \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_1^*$ diamétralement opposés $\Leftrightarrow M,N$ diamétralement opposés.
3. Droite de Steiner. Montrer que St_M homothétique de Si_M dans $h_{M,2}$ contient H **orthocentre.**
   (Si $M_1=sym(M)/(BC)$, $M_2/(CA)$, on passe de M_2 à M_1 par la rotation $r(C,2.\hat{C})$. Mais (connu) $H\in\mathcal{C}_1=M_1BC$ et $H\in\mathcal{C}_2=M_2CA$. Donc M_1HM_2 alignés selon Ex. **4.5** : si $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'=\{I,J\}$ et s similitude directe de centre I, $\mathcal{C}\mapsto\mathcal{C}'$, alors MJM' alignés. Ou plus aisément avec $A\alpha_1$!) **5.30**.
4. Pour M,N diamétralement opposés, justifier enfin que $Si_M\cap Si_N\in$ Cercle **d'Euler de** ABC.
   (La droite passant par M de direction $\overrightarrow{St_M}$ et celle passant en N de direction $\overrightarrow{St_N}$ sont $\perp$ et se coupent sur $\mathcal{C}$. Par homothétie (centre H,rapport $1/2$) : $Si_M\cap Si_N\in$ Cercle d'Euler de ABC.)

5.28 (*) Droite de Steiner, point de Miquel ; isotomie et droite de Newton

Soit un triangle ABC et une droite DEF, D sur (BC), etc. : Les orthocentres de ABC, AEF, DBF, DEC sont alignés ; les milieux de $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ aussi ; et ces 2 droites sont orthogonales.

1. Preuve de tout avec **la puissance**. Si $\alpha=(AH)\cap(BC)$: $\overline{HA}.\overline{H\alpha}=\overline{HB}.\overline{H\beta}=\overline{HC}.\overline{H\gamma}$ ($AB\alpha\beta$ cocycliques) ; $puiss(H/cercle.diam[AD])=puiss(H/cercle[BE])=puiss(H/cercle[CF])$ et idem avec H_1 ... ces 3 cercles forment donc un faisceau d'axe radical H,H_1,H_2,H_3, donc alignés (droite de Miquel) ; et les 3 centres milieux de $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ sont aussi alignés : droite de Newton $\perp$!
   (**5.11.5** : un cas particulier si l'on veut, avec le triangle $AB\Gamma$, $\Gamma=(BC)\cap(AD)$ et en changeant quelques lettres.)

2. Avec **une droite de Steiner** : [on peut s'aider de fig.1 ; mais ici voir fig.2]. Montrer que les les 4 cercles ABC, AEF, BDF, CDE concourent au "point de Miquel" du quadrilatère. **cf.4.4**. (M sur $ABC \cap AEF$, angles égaux à π près : BAM, BCM, FEM donc DCM et DEM ; ainsi CDE contient M). La droite de Steiner de ce point M est donc H, H_1, H_2, H_3 ! **Et** l'unique parabole quadri-tangente a pour foyer ce point M et pour directrice cette droite St.

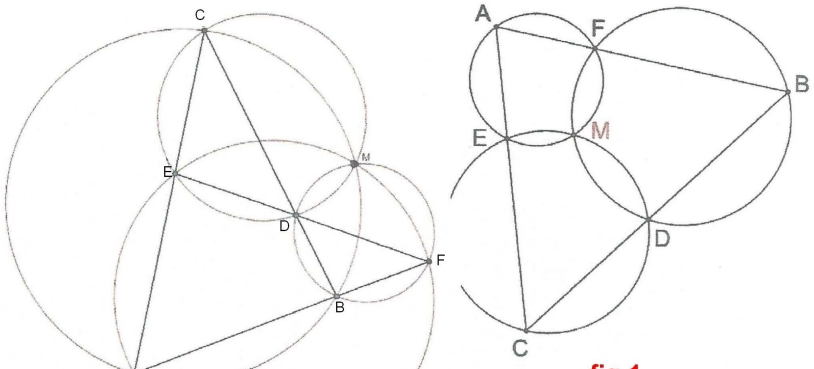


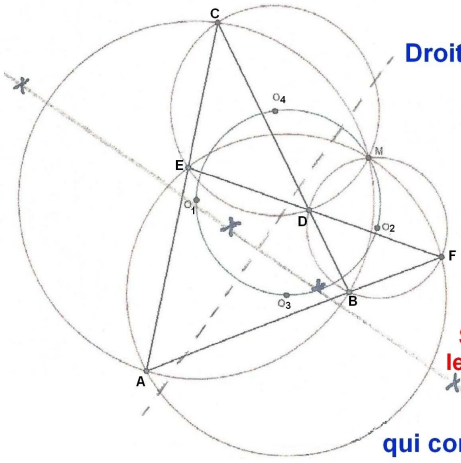
fig.1.

fig 2: point de Miquel (1838) du "quadrilatère complet".

Cercle de Miquel :

Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 des quatre cercles et le point de Miquel M sont cocycliques.

Le cercle contenant ces cinq points est appelé cercle de Miquel.



Droite de Newton-Gauss.

Sym(M/$_{ABF}$) aussi sur St (avec les Hk) car sym(F/tang.parabole).

Droite de Steiner qui contient les 4 orthocentres

= droite de Miquel du quadrilatère complet; orthogonale à la droite de Newton ou de Gauss du milieu des diagonales.

"Cercle de Miquel" : Par inversion de pôle M, les 4 cercles deviennent 4 droites ; les 4 droites, 4 cercles passant par M, point de Miquel de la nouvelle figure, dualité ! Avec les symétriques de M /$(A,B), (B,C), (C,A)$ alignés, (St. : 8 points ; -les proj. du foyer d'une parab. sur tang. : Simson-) par inversion, on a 3 cercles de centres cocycliques avec M : $O3$ sur le cercle $(MO1O2)$; $O4$ aussi.

3. La droite de Newton-Gauss avec **l'isotomie** : au lieu de D, E, F, notons ici A_1, B_1, C_1 ; I milieu de $[CC_1]$, B' de $[AC]$, $G = isobar(A, B, C)$. Figure de $ABCC_1I$? Avec $B'I : C_2 = h_{G,-2}(I) \in (AB)$; puis : $\overrightarrow{BC_2} = -2.\overrightarrow{B'I} = -\overrightarrow{AC_1}$ (C_2 isotomique de C_1). Alors : A_1, B_1, C_1 alignés $\Rightarrow A_2, B_2, C_2$ alignés (Ménélaüs). Et donc les 3 milieux sont alignés (par l'homothétie inverse : $h_{G,-1/2}(C_2)$ ...).

5.29 (*) Isogonalité et calcul de la longueur des bissectrices (...)

1. Soit ABC un triangle, M sur (AB), N sur son cercle circonscrit avec CM, CN isogonales, ce qui est : $AngleACM = AngleNCB$. Montrer alors (triangles semblables) : $CA.CB = CM.CN$.
2. (a) Exemple : CH, CO d'où $a.b = 2.R.h_C$. Autres exemples à justifier :
   (b) Ci bissectrice coupant AB en i_C et le cercle en C_0 : $a.b = Ci_C.(Ci_C + i_C C_0)$; avec $Ci_C = l$, $i_C A = \alpha, ...$ $\boxed{ab = l^2 + \alpha.\beta}$ [avec bissectrice extérieure : $a.b = \alpha'.\beta' - (l')^2$] ou autrement.
3. Avec la relation de Stewart : $A, B, C \in \mathcal{D}$, $\forall M \Rightarrow \overline{BC}.MA^2 + \overline{CA}.MB^2 + \overline{AB}.MC^2 + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$ (fonction scalaire de Leibniz, cas : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$, **32.**3), retrouver la longueur des bissectrices.

5.30 (*) Isogonalité : points inverses du triangle (pour conique tritangente)

1. Soit ABC un triangle, M un point ; P_1, P_2, P_3 ses proj$_\perp$ sur les côtés (triangle podaire de M), et M_1, M_1, M_3 les sym$_\perp$ par rapport aux côtés. Idem avec P'_k et M'_k, pour M', en question 2.
   [✠ Triangle podaire, en anglais : "pedal triangle" ; alors que triangle pédal (fr) : "cevian triangle"]
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_3P_1} = \overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2M} + \overrightarrow{P_2M}, \overrightarrow{P_3M} + \overrightarrow{P_3M}, \overrightarrow{P_3P_1} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (π).
   (b) En déduire que : P_k alignés (droite de Simson) $\Leftrightarrow M \in$ Cercle circonscrit $\mathcal{C}$. (**5.27**.)
   [Note. Alors, M_k alignés sur la droite de Steiner ; qui contient H : BCM_1H cocycliques car le sym. orthog. de H /(BC) sur Cercle (A, B, C) ; $\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HM_1} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}$. Idem $\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HM_3} = \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$; différence nulle car $ABCM$ cocycliques. $//AS_1, S_1 \in \mathcal{C} \cap MP_1$ car angles égaux : $AB, AS_1 = MB, MS_1 = MB, MP_1 = P_3B, P_3P_1 = \overrightarrow{AB}, Si_M$.]
2. Cas de non alignement : (*) Soit M' le centre du cercle Γ circonscrit aux M_k si $M \notin \mathcal{C}$.
   (a) Vérifier que $\underbrace{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2M_3}\ (\pi) =}_{cotes\perp;\ AM'\,mediatrice:AM=AM_2=AM_3} \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_3}) = \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$: (AM, AM') isogonales.
   Déduire que les 3 droites isogonales concourent en M', dit point **"inverse isogonal"** de M.
   (b) Justifier que les P_k, P'_l sont cocycliques. $(\widehat{P_3P'_3P'_2} + \widehat{P'_2P_2P_3} = \pi/2 + \alpha + \pi/2 - \alpha,\ \alpha = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, car $(A, M), (A, M')$ sont isogonales. Et ce cercle γ est centré au mil$[M, M']$, $hom_{M,1/2}(\Gamma)$.)
3. Cas $M \in \mathcal{C}\backslash\{A, B, C\}$ [voire A, B, C], $M' = \infty_{\perp \overrightarrow{St_M}}$: soit D_A, D_B, D_C les droites isogonales.
   (a) Vérifier ici que : $(D_A, AB) = (AC, AM) = (BC, BM) = (D_B, BA)$ (π). Et déduire :
   (b) $D_A // D_B // D_C \perp St_M$! $[(AB, AS_1) + (AC, AM) = (MB, MP_1) + (BP_1, BM) = \frac{\pi}{2}$.]
4. Exemples : Vérifier que I, I_A, I_B, I_C invariants ; que O et H sont inverses (inversion isogonale). Etude de l'inverse de G : point de Lemoine L, intersection des symédianes. **5.18**.
5. Barycentres. Montrer que $\overline{P_1M}.\overline{P'_1M'} = \overline{P_2M}.\overline{P'_2M'} = \overline{P_3M}.\overline{P'_3M'}$ [puissance de M/γ]. Déduire si $M = Bary\begin{pmatrix} A & B & C \\ x & y & z \end{pmatrix}$, que $M' = Bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ a^2/x & b^2/y & c^2/z \end{pmatrix}$. [Rappel sur les coord. barycentriques : $|\ x\ | = a.P_1M$, par ex., signe à voir] d'où $L(a^2, b^2, c^2)$ Lemoine et $\mathcal{C}_{ABC} : a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$.
   (Les points de $\mathcal{C}_{ABC}$ n'ayant pas d'image par isogonalité : $\mathcal{C}_{ABC}$ isogonal de D_∞, $x + y + z = 0$.
   L'image d'une droite est une conique, parabole si tangente à $\mathcal{C}$, hyp. si sécante, HE si diamètre ...)

   Rem. Toujours $M(x : y : z)$ $C(M)$ la puissance de M/C_{ABC}. • Si $f_M(P) = xPA^2 + yPB^2 + zPC^2$: $f_M(P) = f_M(M) + (x + y + z)PM^2$ [f. scalaire de Leibniz]. $P = O \Rightarrow (x + y + z)\mathcal{C}(M) = -f_M(M)$. $P = A, B, C...$ et $xL_1 + yL_2 + zL_3 \Rightarrow \forall M,\ a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x + y + z)f_M(M)$. • Soit γ un autre cercle, $u = \gamma(A) - \mathcal{C}(A) = \gamma(A)$, ... : $\gamma(M) - \mathcal{C}(M) \overset{f.affine.des.coord.cart.}{=} u.\frac{x}{x + y + z} + ...$ d'où $\gamma(M)$; $\gamma(M) = 0 \Leftrightarrow a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0$, axe radical : $ux + vy + wz = 0$.
   • Ne pas confondre avec la transformation isotomique $M \mapsto M^* = Bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{pmatrix}$! cf. **5.20**.
   Ici $\mathcal{D}_\infty$ a pour image "l'ellipse de Steiner circonscrite" [de centre G, passant par $A(1, 0, 0)$, **26.3**] : $yz + zx + xy = 0$, (* tandis que l'ellipse de Steiner "inscrite" : $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$).

6 Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

6.1 Distance $\delta(O,\mathcal{D})$ si $\mathcal{D}$=$\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$: $x+y+z=1\cap 2x-3y=0$

1. En donnant une équation paramétrique de $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{u})$ et avec la formule $\delta(O,\mathcal{D})$.
2. (*) Deux autres façons : en calculant le minimum de $dist^2(O,M)$ quand M décrit $\mathcal{D}$. Puis :
3. (*) En vérifiant $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}_\lambda$" : $x+y+z-1+\lambda(2x-3y)=0$, en trouvant λ : $\mathcal{P}'\perp\mathcal{P}$" et dist$(O,\mathcal{P}")$.

1. Corrigé. La question de passer d'un syst. d'éq. cart. pour une droite, à un syst. paramétrique est essentielle

$\mathcal{D}\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$. Prenons x arbitraire, par ex. ; alors : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+x.\begin{pmatrix}1\\2/3\\-5/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{x}{3}.\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$

type : $M=A+\lambda.\overrightarrow{u}$ $M\in\mathcal{D}$: $\boxed{\delta(M_1,\mathcal{D})=\dfrac{\|\overrightarrow{M_1A}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\ M_1 \text{ quelc.}}$ donne $(M_1=O)$ $\boxed{\delta=\sqrt{\frac{13}{38}}.}$

Inversement, si $\mathcal{D}$ en param. : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-5}$: un système cartésien.

2. Question très intéressante. Reprenons $M\in\mathcal{D}$ définie paramétriquement : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$

OM^2 (carré plus simple) vaut $OM^2=f(\lambda)=(3\lambda-0)^2+(2\lambda-0)^2+(-5\lambda+1-0)^2=38\lambda^2-10\lambda+1$.

La courbe représentative est une parabole tournée vers le haut et le minimum est atteint pour $\lambda=-b/2a=5/38$: $OH^2=38.5^2/38^2-10.5/38+1=...=13/38$; $OH=\delta=\sqrt{13/38}$ idem !

3. Déjà $\mathcal{P}_\lambda$" : $x+y+z-1+\lambda(2x-3y)=0$ est un plan car $\begin{pmatrix}1+2\lambda\\1-3\lambda\\1\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0}$, vecteur normal. [Ce λ, ici, n'a rien à voir avec celui qui précède]. De plus si M vérifie $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$, alors M vérifie $x+y+z-1+\lambda(2x-3y)=0$, $\forall\lambda$ soit $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}_\lambda$". Alors, au lieu de $\mathcal{D}=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ non orthogonaux (Figure !) $\mathcal{D}=\mathcal{P}"\cap\mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}"$ sera judicieux contenant $\mathcal{D}$, $\perp\mathcal{P}'$. Ici, $\begin{pmatrix}1+2\lambda\\1-3\lambda\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=0$ donne $\lambda=\dfrac{1}{13}$; δ_2=dist$(O,\mathcal{P}")=\dfrac{13}{\sqrt{494}}$ car $\boxed{\text{dist}(M_1,ax+by+cz=d)=\dfrac{|\,ax_1+by_1+cz_1-d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ et $\mathcal{P}"$ $15x+10y+13z=13$. δ_1=dist$(O,\mathcal{P}')=0$, $\delta^2=\delta_1^2+\delta_2^2=0+13^2/13.38=13/38$ ... Idem encore !

6.2 (*) Sur le tétraèdre : deux exercices difficiles (...)

1. Soit un tétraèdre **équifacial** (faces de même aire) ; montrer que 2 arêtes opposées ont même longueur.

Corrigé. Soit J, K, L, $proj_\perp$ de I milieu de $[A,D]$, A, D sur (B,C). $AK=DL$: même aire ; et J milieu de $[KL]$ donne $AJ=JD$. D'où I, J dans le plan médiateur de $[A,D]$: (I,J) perp. commune. Elle coupe aussi $[B,C]$ en son milieu. Donc le 1/2-tour d'axe (I,J) envoie $[A,B]$ sur $[C,D]$.

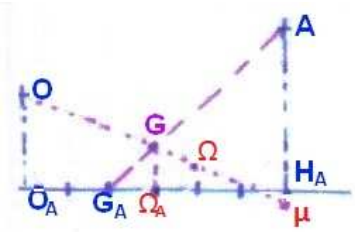
2. Soit Ω fixe et A,B,C variables sur S, sphère de rayon 1, de centre O avec $\Omega A,\Omega B,\Omega C\perp$. Montrer :

– Que le plan A,B,C passe par G fixe, $\overrightarrow{O\Omega}=3.\overrightarrow{OG}$. [$A'$ diam. opposé, Π_A plan passant par $\Omega,\perp\Omega A$, $\Pi_A\cap S$: cercle contenant A',B,C de centre $I_A=proj(O,\Pi_A)=mil[\Omega A']$ et $mil[BC]$ car $\widehat{B\Omega C}=\pi/2$; donc $isobar(A,B,C)=isobar(A,A',\Omega)=bar((\Omega,1),(O,2))$.] Puis si $H=proj_\perp(\Omega,ABC)$, $\mathcal{A}$ l'aire,

– $H=orth(A,B,C)$ [$\overrightarrow{\Omega H}\perp ABC,\overrightarrow{C\Omega}\perp\Omega A,\Omega B,AB$ donc $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ etc] et $\dfrac{1}{\Omega H^2}=\dfrac{1}{\Omega A^2}+\dfrac{1}{\Omega B^2}+\dfrac{1}{\Omega C^2}$. [$\mathcal{A}^2(\Omega,A,B)=\mathcal{A}(HAB).\mathcal{A}(CAB)$: $R=proj_\perp(\Omega,AB)\Rightarrow R\Omega$ tang. au cercle ΩHC, $R\Omega^2=RH.RC$; d'où $\mathcal{A}^2(ABC)=\mathcal{A}^2(\Omega AB)+\mathcal{A}^2(\Omega BC)+\mathcal{A}^2(\Omega CA)$; et avec le vol. du prisme $3V=\mathcal{A}(ABC).\Omega H$ ...]

6.3 (*) Au sujet du tétraèdre orthocentrique (...)

1. Soit un tétraèdre $ABCD$. **Montrer que (hauteurs AH_A, BH_B concourantes) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.**
   Corrigé. ($\Rightarrow$) Si $AH_A \cap BH_B = \{H\}$, $Plan(A, B, H_A, H_B, H) \perp \overrightarrow{CD}$; d'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.
   ($\Leftarrow$) : Ici, le plan orthogonal à (C, D) contenant A (donc H_A) contient aussi B (donc H_B).
   Mais AH_A et BH_B ne peuvent pas être parallèles ; donc concourantes.
2. Montrer : (1) 4 hauteurs conc. $\Rightarrow$ (2) Arêtes opp. $\perp \Rightarrow$ (3) $(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}) \Rightarrow$ (1).
   Pour (3) $\Rightarrow$ (1) : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ (rel. d'Euler) ; puis avec $AH_A \cap BH_B = \{H\}$
   $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}).\overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BD} = 0$. Idem $\overrightarrow{DH}$.
3. Montrer : Tétraèdre orthocentrique (1,2,3) $\Leftrightarrow$ (4) H_D orthocentre de ABC. Seul $\Leftarrow$ à voir :
   Il donne : $\overrightarrow{AH_D} \perp \overrightarrow{BC}$; or $\overrightarrow{DH_D} \perp \overrightarrow{BC}$, d'où : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$; idem $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$.
4. Avec $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$, vérifier que $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 + 2.\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$. Donc :
   Tétraèdre orthocentrique (1-4) $\Leftrightarrow$ (5) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ noté Σ^2.
5. Volume du T.orth. : Soit ABR, $R \in (C, D)$, le plan $\perp \overrightarrow{CD}$; forcément R, B, H_A sont alignés et R, A, H_B aussi. D'où H orthocentre de (A, B, R). Si $S = HR \cap AB$, alors $V = \dfrac{AB.CD.RS}{6}$.
6. 1ère sphère d'Euler. Par $h_{G,-1/3}$ la sphère $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_1$ passant par les 4 centres de gravité G_A ... des faces ; et si Tétraèdre orthocentrique, la droite d'Euler O_A, G_A, H_A de BCD, montre que $\mathcal{S}_1(\Omega, \frac{R}{3})$ contient les 12 points : G_A ... H_A ($\Omega G_A = \Omega H_A$) et T_A ... : $3.\overrightarrow{HT_A} = \overrightarrow{HA}$ (si orthocentrique) car



A partir de O_A, G_A, H_A, tracer G ; puis Ω. Alors :
$\mathcal{S}_1(\Omega, \frac{R}{3})$ passe par G_A. Une autre hom $h_{\mu,1/3} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_1$ d'où
$\mu \in AH_A$ donc sur chaque hauteur : $\mu = H$ et $\overrightarrow{OH} = 2.\overrightarrow{OG}$.
(Si non orth., μ : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2.\overrightarrow{O\mu}$:"point de Monge")

Note : En général sur μ, avec $\overrightarrow{\mu A} + ... = 4.\overrightarrow{\mu G} = 2.\overrightarrow{\mu O}$, on trouve $2.\overrightarrow{\mu I}.\overrightarrow{CD} = 0$: $\mu \in$ 6 plans $(I, \perp \overrightarrow{CD})$!

7. 2ème sphère d'Euler pour T.orth. Soit ici : I, J, K, L, M, N milieux de AB, BC, CD, DA, AC, BD. Ils sont sur une sphère $\mathcal{S}_2(G, \rho)$, $(IJKL$ rectangle...) et $\mathcal{S}_2 \cap ABC =$ cercle d'Euler $\Rightarrow$ 6x2 + 4x3=24 points remarquables ; et $2.IJ = AC$, $2.JK = BD \Rightarrow \rho = \Sigma/4$. Note : $GI^2 = GO^2 + 2.\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OI} + R^2 - AB^2/4 = GO^2 + 2.\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OK} + R^2 - CD^2/4 \Rightarrow 2\rho^2 = 2.GO^2 + 2.R^2 - 4.\rho^2 + 4.\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OG}$: $3.\rho^2 = R^2 - OG^2$!

6.4 (*) "Division vectorielle"//éq. lin. avec second membre

Résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, si possible. ($\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$, ici.)

– Important. Par ex. pour un torseur de résultante $\overrightarrow{\Omega}$: $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$. Si on cherche M : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$ est, non pas nul (impossible en général), mais colinéaire à $\overrightarrow{\Omega}$: $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_A + k.\overrightarrow{\Omega}$ (k à voir), on trouve une droite affine l'axe central du torseur. Pour les vitesses d'un solide, c'est l'axe instantané 'du mouvement hélicoïdal tangent' au temps t. (Toute isométrie affine positive étant un **vissage.**)

– **Résolution de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. "Problème de la division vectorielle".**

.. Si $\overrightarrow{a} \not\perp \overrightarrow{b}$, pas de solution. [$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$ est **une C.N.** de solution donnant k ci-dessus.]

.. Si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, un dessin laisse deviner qu'il y a **une** solution du type $\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{OM}_0 = \alpha.\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$.

. Avec la formule du double produit vectoriel $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$: $\alpha = 1/\|\overrightarrow{a}\|^2$.

. Puis ayant une solution, $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM_0}$; $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{a}$.

Toutes les solutions, si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} + \lambda.\overrightarrow{a}$ droite affine. Relire le cas d'un torseur (et trouver k).

7 Limites des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

7.1 Des limites de suites ou de fonctions (...)

Montrer que : $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}$. Et : $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} max(a,b)$.

7.2 Preuve du Th. de prolongement des inégalités

1. **Enoncé : Si $f \leqslant g$ au voisinage de x_0 et si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} m$, alors $l \leqslant m$.**
2. Preuve : . On va prendre x_0 fini ou $+\infty$; rappelons que $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0 fini si : $\exists\, r>0 :\ ]x_0-r, x_0+r[\subset \mathcal{V}$; et de $x_0=+\infty$ si : $\exists A>0 :\ ]A,+\infty[\subset \mathcal{V}$.
   . On va se limiter, par contre (pour plus de clarté), aux seuls cas l, m réels (finis)
   . Supposons donc $l>m$; on va trouver une contradiction.
   Choisissons : $\epsilon = \frac{l-m}{2} > 0$ (le tout est de comprendre ce choix !)
   $\exists \mathcal{V}_1$ voisinage de x_0 tel que $x\in\mathcal{V}_1 \Longrightarrow f(x)\in]l-\epsilon, l+\epsilon[$,
   $\exists \mathcal{V}_2$ voisinage de x_0 tel que $x\in\mathcal{V}_2 \Longrightarrow g(x)\in]m-\epsilon, m+\epsilon[$; mais : $\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2=\mathcal{V}$ est aussi un voisinage de x_0 et : $x\in\mathcal{V} \Rightarrow g(x) < m+\epsilon = l-\epsilon < f(x)$. Impossible.

7.3 Calcul de limite avec un encadrement (...)

1. Montrer que, sur $]0,\alpha>0[$: $ln(1+x) < sh(x) < -ln(1-x)$ $\qquad (sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2})$
2. Pour $p\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n<k\leqslant pn} sh(1/k)$? $\qquad$ (Rép. : $ln(p)$.)

7.4 (*) Préciser diverses limites [corrigés]

Soit f dérivable sur $[0,\pi]$ avec $f(0)=f(\pi)=0$.
Montrer que $g(x)=f(x).cot(x)$ a des limites finies en $x=0$ et $x=\pi$. **Corrigé** (rédaction) :

En π : Comme f est dér. en π, $\exists\epsilon(x)$, avec $\epsilon(x)\underset{x\to\pi}{\longrightarrow}0 : f(x)=f(\pi)+(x-\pi)f'(\pi)+(x-\pi).\epsilon(x)$.

Avec $f(\pi)=0$, $g(x)=f(x).\frac{cos(x)}{sin(x)}=(x-\pi).[f'(\pi)+\epsilon(x)].\frac{cos(x-\pi)}{sin(x-\pi)} \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} f'(\pi)$. Idem en 0.

7.5 (*) Limites en lien avec des intégrales

Soit $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{ln(t)}$, $\frac{1}{ln(t)}$ infinie autour de 1 : 1 ne doit pas être dans $[x,x^2]$; montrer que

1. f est définie pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. (Ici, f est dérivable, donc continue, avec $f'(x)=\frac{x-1}{ln(x)}$.)
2. Existence de $I=\int_0^1 \frac{x-1}{ln(x)}dx$? ($\frac{x-1}{ln(x)}$ tend vers 1 en 1 et 0 en 0 : I existe. $I\geqslant 0$.)
3. f tend vers 0 en 0 (facile). Si on trouve une limite finie L pour f en 1 : f sera continue par prolongement ; et C^1 par le Th de la limite de f' ! Alors on aura $I=$"$f(1)$"$-$"$f(0)$"$=L-0$.

Calcul de L : Autour de 1, $\frac{1}{ln(t)}\simeq\frac{1}{t.ln(t)}$. $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{ln(t)}$ et $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t.ln(t)}$ aussi ? ... si x (donc t) proche de 1 ; et la 2ème aisée. Rigueur ? Montrer $f(x)-g(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$. A finir !

[$L=ln(2)$. On aurait aussi pu remplacer $ln(t)$ par $t-1$ autour de 1 ...]

8 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

8.1 Fonction continue, bornée, non prolongeable par continuité

(Par ex. : $x \mapsto sin(1/x)$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^*$).

8.2 Quelques questions en lien avec la fonction $Arctan$ (...)

1. Montrer que : $Arctan(\frac{1}{3}) + Arctan(\frac{1}{4}) + Arctan(\frac{2}{9}) = \frac{\pi}{4}$.

2. Puis $Arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}Arccos(x)$ $[t = Arccos(x)]$; $\quad Arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsin(x)$.

8.3 (*) Une fonction uniformément continue, non lipschitzienne

Montrer que : $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$. (On peut améliorer l'inégalité : $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y-x|}$ ... et pour la prouver, $0 \leqslant x \leqslant y$ peut être supposé). Conclure.

8.4 Trouver les fonctions C^0 telles que : $f(x) = f(2x+7)$

Indication. Avec la suite : $u_0 = t$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 7}{2}$ (arithmético-géométrique convergeant vers -7, montrer que $f(t) = f(-7)$. Puis que les solutions sont exactement les fonctions constantes.

8.5 Une fonction bijective mais continue nulle part (...)

Soit $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = 1 - x$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; $\quad g : g(0) = 1$; $g(1) = 0$; $g(x) = x$, ailleurs.

Vérifier que gof convient. Puis trouver un autre exemple.

8.6 (*) Démontrer les Théorèmes sur la continuité

1. Théorème des Valeurs intermédiaires. Pour trouver $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$ si $y \in [f(a), f(b)]$:

   Si $f(a) < f(b)$: considérer $\alpha = sup\{t \in [a,b] : f(t) \leqslant y\}$.

2. Continuïté sur un segment :

   - Montrer d'abord que de toute suite de $[a,b]$, on peut extraire une sous suite convergente. (Propriété de Bolzano-Weierstrass obtenue par "dichotomie" - divisions du segment en 2 -)
   - Montrer ensuite que f est bornée supérieurement par l'absurde.
   - Montrer enfin que la borne supérieure est atteinte.

3. Continuïté de la bijection réciproque. Cas f croissante (strictement) :

   Utiliser la bijectivité, la croissance stricte, l'image d'un intervalle.

9 Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

9.1 Révisions des théorèmes fondamentaux de l'analyse (...)

Limites

Théorème de la limite monotone. Si f croissante sur (a,b) (bornes ouvertes ou fermées), $\forall x_0 \in]a,b[$ f possède une limite l_g en x_0^-, l_d en x_0^+ et $l_g \leqslant f(x_0) \leqslant l_d$; une limite à gauche en b, à droite en a.

Exemple : ln possède une limite en $+\infty$. Idem avec les suites, mais ici : n tendra toujours vers $+\infty$.

Continuïté (3 théorèmes)

Théorème des valeurs intermédiaires. f contiue sur un intervalle I vérifie $\forall a,b \in I, \forall y \in [f(a),f(b)]$, $\exists x \in [a,b] : y = f(x)$ (ainsi l'image $f(I) = J$ de l'intervalle I : partie convexe, donc un intervalle).

Théor. de continuïté sur un segment. Une fonction C^0 sur un segment est bornée et atteind ses bornes.

$\Downarrow$ Continuïté de f^{-1} : Soit fC^0, strict. monot. , sur un int. I ; alors $f(I)$ est un int.,f bij. $I \to J, f^{-1}C^0$

$\Downarrow$

$\Downarrow$ **Avec des hypothèses supplémentaires de Dérivabilité :**

Théorème de Rolle. Si fC^0 sur $[a,b]$, dér. sur $]a,b[$, $a \neq b$, $f(a) = f(b) : \exists c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = 0$ $\Rightarrow$

Théorème des accr. finis. Si fC^0 sur $[a,b]$, dér. sur $]a,b[$ $a \neq b$, $\exists c \in [a,b] : f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$
ou, en posant $b = a+h$, $\exists\ \theta \in]0,1[$ avec $f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$ ("T.A.F.")

On déduit 3 conséquences fondamentales du théorème des accroissements finis :

1. Sens de variations des fonctions dérivables ; avec la précision :
   $f' \geqslant 0$ et f' nulle qu'en un nombre fini de points sur un segment $\Longrightarrow$ f strictement croissante.
2. Théorème de la limite de la dérivée : Si fC^0 sur $[a,b]$, dér. sur $]a,b[$, $a \neq b$, et si $f'(x)$ possède une limite l finie en a^+, alors $f'(a)$ existe, vaut l et donc f' est en même temps continue en a.
   (Si la limite est infinie : tangente verticale ; **si pas de limite : ne rien déduire** !)
3. Pour f dérivable (hypothèse) : f k-lipschitzienne $\Leftrightarrow$ $|\ f'\ | \leqslant k$.

9.2 Chercher f dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y).f'((x+y)/2)$

1. **Corrigé :** On connait le Théorème des accroissements finis : **f continue sur $[x,y]$ dérivable sur $]x,y[$ (si $x \neq y$) entraine $\exists c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = (x-y).f'(c)$.**
   En général c non unique, dépend de x, y et f. Ici, on peut prendre le milieu !
2. On cherche si possible toutes les solutions. Déjà $f(x) = a.x + b$ convient ! On peut aussi savoir que c'est vrai pour les paraboles $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ solutions.
3. **Montrons qu'il n'y en a pas d'autre :**
   Posons $x + y = 2t$, $x - y = 2$ ou ce qui est pareil $x = t+1$, $y = t-1$:
   L'égalité s'écrit $2.f'(t) = f(t+1) - f(t-1)$; ainsi, on voit que f" existe. En recommençant, on voit que $f^{(3)}$ existe ... **Idée :** on dérive en espérant trouver quelque chose de plus simple !
4. En dérivant la 1ère ligne / x, on a : $f'(x) = f'(\frac{x+y}{2}) + (x-y).f"(\frac{x+y}{2}).\frac{1}{2}$.
   Dérivons par rapport à y maintenant de façon à avoir 0 à gauche :
   $0 = f"(\frac{x+y}{2}).\frac{1}{2} - f"(\frac{x+y}{2}).\frac{1}{2} + (x-y).f^{(3)}(\frac{x+y}{2}).\frac{1}{4}$. Donc $f^{(3)}(t) = 0$, $f"(t) = \frac{\alpha}{2}$
   $f'(t) = \frac{\alpha}{2}.t + \beta$ ... d'où : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ forcément. (Faire un dessin !)

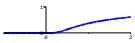
9.3 (*) Diverses remarques sur le T.A.F. et ses conséquences (...)

1. (*) Le T.A.F. sert aussi à diverses démonstrations (*) sur les fonctions convexes.
2. On a encore : T.A.F. $\Rightarrow$ Théorème d'intégration des développements limités
   $\Rightarrow$ Formule de Taylor-Young concernant les développements limités.
3. . La formule de Taylor-Young et les développements limités, comme les limites ou équivalents, ont un caractère "local", c'est-à-dire seulement "au voisinage d'un point".
   . Par contre la formule de Taylor-Lagrange (ch.Intégrales, différente), a un caractère global : vraie sur un segment $[a,b]$, par forcément "petit". (Généralisation des accroissements finis.)

9.4 (*) f C^∞, $f \geqslant O$, nulle hors de $[-1,1]$ valant 1 sur $[-\theta,\theta]$ ...

1. Soit f : $f(x)=0$ si $x \leqslant 0$; $f(x)=e^{-1/x}$ si $x>0$. Montrer que f est $C^\infty(\mathbb{R})$.
2. En déduire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle hors de $[-1,1]$ avec $\int_{\mathbb{R}} \psi = 1$.

Corrigé :

1. . Comme $f(x) \to 0$, $(x \to 0^+)$, on a f $C^0(\mathbb{R})$ aisément (car sur $\mathbb{R}^*$: C^0 par composition).
   . Puis pour $x>0$, $f'(x) = e^{-1/x}.\dfrac{1}{x^2}$ C^1 sur $]0,+\infty[$, vérifie $f'(x) = \dfrac{t^2}{e^t}$, $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$: le th. de la limite de la dérivée fournit que $f'(0)$ existe, vaut 0 et f' C^0 en $x=0$ à droite. Ainsi f' existe sur $\mathbb{R}$ et y est continue (car pas de problème en 0 par la gauche) : f C^1.
   .  (*) Même Théorème appliqué ici à $f^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(x)}{x^{2k}}.e^{-1/x}$ ... (Fin laissée)
2. Voir $g(x)=f(x+1)$, $h(x)=f(1-x)$; $\varphi(x)=g(x).h(x)$, $a=\int_{\mathbb{R}}\varphi > 0$ et $\psi(x)=\dfrac{1}{a}.\varphi(x)$.
3. Remarque (*) : on peut répondre au titre en s'aidant de $\Psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(t).dt$. A finir.

9.5 (*) Questions au sujet d'une pseudo-dérivée (...)

On dit que f est pseudo dérivable en x si $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ a une limite finie. Notée $f^*(x)$.

1. Soit f C^0 sur un intervalle I pseudo-dérivable à l'intérieur et $f^* > O$ ici. Soit $a<b$ dans I.
   (a) Soit $\epsilon>0$. Et $E=\{x \in [a,b] : \ f(u) \geqslant f(a)-\epsilon \ \ \forall u \in [a,x]\}$.
   Montrer que E est non vide, majoré (on note $c = sup(E)$).
   Montrer que $c>a$. Puis que $c \in E$. Enfin que : $c=b$ par l'absurde.
   (b) Déduire que $f(a) \leqslant f(b)$. Montrer que f est strictement croissante.
2. On remplace $f^* > O$ par $f^* \geqslant O$. Avec $f_n(x) = f(x) + \dfrac{x}{n}$, montrer que f est croissante.
3. Soit f continue $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, pseudo-dérivable sur $]a,b[$ avec f^* continue sur $]a,b[$.
   (a) On suppose que $f(a)=f(b)$. Montrer que : $\exists c \in]a,b[$ avec $f^*(c)=0$.
   (b) En général, montrer que $\exists c \in]a,b[$ avec $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^*(c)$.
   (c) Ce résultat demeure-t-il sans supposer f^* continue ?
   (d) Montrer que f est C^1 sur $]a,b[$.

10 Polynômes $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

10.1 Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ (Théorème de Rolle)

1. Si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, montrer que P' aussi. (donc : $[(1-x^2)^n]^{(n)}$ scindé !)
   Ind. a racine de P d'ordre $k \geqslant 1 \Rightarrow$ racine de P' à l'ordre $k-1$ et Th. de Rolle ...
2. Si P, polynôme de degré n, est scindé sur $\mathbb{R}$ montrer que $P + k.P'$ aussi. (avec $e^{\frac{x}{k}}.P(x)$.)

10.2 En utilisant les racines complexes [corrigés]

1. Résoudre le système : (1) $x+y+z=0$, (2) $x^2+y^2+z^2=14$, (3) $x^3+y^3+z^3=18$.
   Rép. : Avec (1) et (2), on a $\sigma_2 = -7$ d'où x, y, z racines de $T^3 - 0.T^2 - 7.T - \sigma_3 = 0$.
   Alors (3) : $7.\sigma_1 + 3.\sigma_3 = 18$. Donc x, y, z racines de $(T+1)(T^2-T-6) = 0$ ...
2. Donner une C.N.S. pour que les trois racines de $x^3 + p.x + q = 0$ aient même module.
   Rép. : $p = 0$. (Car : $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow$ ce sont : $\{e^{ia}, j.e^{ia}, j^2.e^{ia}\}$.)
3. **C.N.S. pour que $P(x) = x^3 + p.x + q$ ait une racine au moins double (racines : a, a, b).**
   - Th. : a racine au moins double $\Leftrightarrow P(a) = 0, P'(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 + p.a + q = 0, 3a^2 + p = 0$. (1),(2).
   - Si $a \in \mathbb{R}$: $p \in \mathbb{R}^-$, $a = \epsilon.\sqrt{\frac{-p}{3}}$, $\epsilon = \pm 1$. (1) : $-p.\frac{a}{3} + p.a = -q$, $\frac{2}{3}p.\epsilon.\sqrt{\frac{-p}{3}} = -q$. $\epsilon = \pm 1$ (2 cas permis) ; équivalence en élevant au carré : $\frac{4}{9}.p^2.\frac{-p}{3} = q^2$. CNS : $\Delta = 0$ $27.\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
   - **Cas $a, p, q \in \mathbb{C}$, rédaction difficile. La division euclidienne donne (idée importante !)** $3.P(x) = P'(x).Q(x) + Reste$; ($3.P(x)$ plus agréable) : a racine de P et $P' \Leftrightarrow a$ racine de P' et du $Reste = 2p.x + 3q$. Aisé mais nouveau ! a doit exactement vérifier (3) $2p.a + 3q = 0$, (2) ; ou 3. $\left(\frac{-3q}{2p}\right)^2 + p = 0$; on retrouve par **équivalence** $4p^3 + 27q^2 = 0$. **Toutefois ici** on doit voir à part (à cause de la division) le cas $p = 0$: forcément $q = 0$ avec (3) ; ce cas entre donc aussi dans le cas général $4p^3 + 27q^2 = 0$ et termine. [Note : l'expression de la racine au moins double $a = \frac{-3q}{2p}$, si $p \neq 0$, est bien plus simple que $a = \epsilon.\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et celle-ci valide que si p réel négatif !]

   Si $\Delta < 0$: $a, b, c \in \mathbb{R}(x^3 - 3x - 1 = 0)$. $cos(3y) = 4cos^3(y) - 3cos(y)$; $x = kz : 4z^3 - 3z = K, K^2 < 1$!
4. **Remarque :** avoir $x = \sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$? $a, b \in \mathbb{N}^*$, b non carré ; $\Delta^3 = a^2 - b$.
   (a) Montrer que $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} \notin \mathbb{Q}$ (b non carré) ; et $x > 0$ (si $a < \sqrt{b}$, $\sqrt{b} + a > \sqrt{b} - a$).
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \Delta \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{N}^*$ et $x(x^2 - 3.\Delta) = 2a$; par suite : x divise $2a$.
   (c) Montrer que $x = 2a$ est impossible ($4a^2 - 1 = 3\Delta$, $\Delta \geqslant 1$; $4b = 1 + 3\Delta - 4\Delta^3 \geqslant 4$, $\Delta < 1$).
   (d) Et $x = a$ impossible ($a^2 - 3\Delta = 2$, $\Delta > -1$; $b = 2 + 3\Delta - \Delta^3 \geqslant 1$, $\Delta \leqslant 1$; $\Delta = 1$: impossible).
   (e) Que $x = 1 \Leftrightarrow a = 3p - 1, b = p^2(8p-3), p \in \mathbb{N}^*$ et $x = 2 \Leftrightarrow a = 3p + 1, b = p(p+3)^2$. Donc
   (f) Si $a \in [[1, 5]]$, $2 \leqslant b \leqslant 3 : x \notin \mathbb{Q}$. [Sinon b)c)d) : $x = 1$ ou 2 ... Mais $a = 2$, $b = 5 : x = 1$!]

10.3 $P \in \mathbb{C}[x], P(x^2) = P(x).P(x-1)$ ($Pcte$: $0, 1$)

1. Avec $P(x) = 0 \Rightarrow P(x^2) = 0$, déduire que : z racine $\Rightarrow z^2$ racine. Donc racines $\in \{0\} \cup \mathbb{U}$.
   (Sinon, racines de module tous différents ; infinité de racines différentes ; et $P = O$, vu).
2. Avec : $P(x-1) = 0 \Rightarrow P(x^2) = 0$, si $z = x - 1$, montrer que : z racine $\Rightarrow (1+z)^2$ racine.
   - ainsi 0 racine $\Rightarrow$ 1 racine $\Rightarrow (1+1)^2 = 4$ racine ... on a vu que ceci donne $P = O$. Donc :
   - z racine $\Rightarrow |z| = |1+z| = 1$. Mais avec **Cercles**(centre O, $r = 1$) $\cap$ (O'(affixe -1), $r = 1$), **seules j, j^2 possibles ! Réciproque** ... Solutions : $P = O$ et $P(x) = (x^2 + x + 1)^p$, $p \in \mathbb{N}$.

10.4 Majorer le module de racines dans $\mathbb{C}$ [corrigé]

Soit $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n, \quad g(x) = x^n - \mid a_1 \mid x^{n-1} - ... - \mid a_n \mid, \quad a_n \neq 0.$

Montrer que g possède une unique racine dans $\mathbb{R}^+$ et qu'elle majore les racines de f en module.

– Si $f(z) = z^5 - z + 1$ ou $f(z) = z^5 - z + i$, l'ex. dit que $g(x) = x^5 - x - 1$ a une unique racine dans $\mathbb{R}^+$ qu'on peut estimer $(x_0 < 1,2)$ et que les 5 racines $(\in \mathbb{C})$ de l'équation initiale ont un module $\leqslant 1,2$!

– Montrons que g a une racine unique dans $]0, +\infty[$ (qui est dans $]0, +\infty[$) par récurrence. $n = 1$: vu.

Passage au rang n : avec les notations de l'énoncé. Alors g est dérivable (comme polynôme) et $g'(x) = n[x^{n-1} - b_1.x^{n-2} - ... - b_{n-1}]$ tous ces coefficients étant dans $\mathbb{R}^+$.

▪ Ici, on a un léger ennui : soit tous les b_k sont nuls. Auquel cas g strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car g' ne s'annulle qu'une fois en 0) et avec $g(0) = - \mid a_n \mid < 0$ [et la limite en $+\infty$], c'est fini.

▪ Soit non. On écrit : $g'(x) = n.x^k.[x^{n-1-k} - ... - b_{n-k-1}]$ de façon à ce que $-b_{n-k-1} < 0$: l'hypothèse de récurrence permet de dire que g' s'annulle en 0 (peut-être) et en $x_1 > 0$ seulement sur $\mathbb{R}^+$ (racine simple) et un tableau de variations de $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(x)$, semblable, termine aussi ce cas.

Notons x_0 la racine dans $]0, +\infty[$ de g et retenons aussi : g négative avant x_0, positive après.

– Maintenant si z racine de f, alors $-z^n = a_1 z^{n-1} + ... + a_n, \quad \mid z \mid^n \leqslant \mid a_1 \mid . \mid z \mid^{n-1} . + ... + \mid a_n \mid$ inégalité triangulaire ; ou en notant : $\mid z \mid = x \in \mathbb{R}^+ : \quad g(x) \leqslant 0.$ Donc : $x = \mid z \mid \leqslant x_0$!

10.5 Règle de Sturm pour le nombre de racines réelles

1. $\forall P \in \mathbb{R}[x]$, considérer la suite de Sturm : $S_0 = P, S_1 = P'$; $S_{k-1} = S_k.Q - S_{k+1}$, $d^0\ S_{k+1} < d^0\ S_k$. [Div. eucl. "signée".] Soit p minimum : $S_p = Cte$. Montrer que $S_p = O \ \Rightarrow\ pgcd(P, P') = S_{p-1}$ donc P a une racine (complexe) double, cas qui est exclus ensuite (car alors prendre P/S_{p-1}).
2. Avec $pgcd(P, P') = 1$, montrer que si c est une racine de S_k, $1 \leqslant k < p$, $S_{k-1}(c).S_{k+1}(c) < 0$. (C'est le point clé avec le signe $-$! On ne peut avoir de plus $S_k(c) = S_{k-1}(c) = 0$ avec $pgcd(P, P') = 1$.)
3. On considère les signes de $S_0(x), ..., S_p(x)$ notés $+,\ 0,\ -$ pour $> 0,\ 0,\ < 0$.

   On note $V(x)$ le nombre de variations de signes, sans tenir compte de 0 : (rappel, pas deux 0 de suite) ; ainsi $+, +, 0, -, 0, -, 0, +, -, +$ serait compté pour $V(x) = 4$.

   (a) Soit R l'ensemble des racines des S_k, $x \in I$ un intervalle. Si $I \cap R = \emptyset$ vérifier que $V(x) = cte$.

   (b) Si $I \cap R = \{c\}$, $P(c) \neq 0$, c racine de $S_{i_1}, ..., S_{i_d}$, montrer que $x \mapsto V(x)$ est constant sur I. [Les signes de $(S_{i_\alpha - 1}, S_{i_\alpha}, S_{i_\alpha - 1})$ sont $(+, ?, -)$ ou $(-, ?, +)$ avec q.2, (?) pouvant changer avant/après x, mais dans chaque cas pour ce passage et les autres, même valeur avant/après.]

   (c) Si $I \cap R = \{c\}$, $P(c) = 0$, montrer que $\lim\limits_{x \to c^-} V(x) - \lim\limits_{x \to c^+} V(x) = 1$. [Avec (b), on étudie seulement le passage $S_0(x), S_1(x)$; cas $P'(c) > 0$ ou $P'(c) < 0$: ici un changement de signe ! Etc.]

   (d) Si $P(a).P(b) \neq 0$, en déduire que $V(a) - V(b) =$ **nombre** de racines de P sur l'intervalle $]a, b[$.

10.6 Meilleure approximation uniforme de O (polynômiale)

1. Montrer : $\exists\ !\ T_n \in \mathbb{R}[x] : T_n(cos(a)) = cos(na)$ [pol. de **Tchebychev**, $n \geqslant 1$ $\Rightarrow T_n/2^{n-1}$ unitaire] et
2. $sin(a).U_n(cos(a)) = sin(na)$; $T_n' = n.U_n$; $T_n(ch(a)) = ch(na)$, $sh(a).U_n(ch(a)) = ch(na)$, pair/impair.
3. (*) $\forall P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geqslant 1$, unitaire : $\|P\|_{[-1,1]} \geqslant \|\frac{T_n}{2^{n-1}}\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ et égalité $\Leftrightarrow P = t_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}$.

   [$x_k = cos(k.\pi/n)$, $Q = t_n - P$: si $\|P\| < \|t_n\|$, $Q(x_0) > 0, Q(x_1) < 0, ..., Q$ a n racines, $\deg(Q) \leqslant n-1$ donc O, imp. Egalité (*) : $(-1)^k.Q(x_k) \geqslant 0$; et $(-1)^k.\Pi_{j \neq k}(x_k - x_j) \geqslant 0$ car $x_0 > x_1 > ...$; donc si $L_Q = \sum\limits_k \lambda_k.\Pi_{j \neq k}(X - x_j)\binom{pol.de.L.}{n+1\ x_k}$, $\lambda_k \geqslant 0$. $L_Q = Q$, coeff. de x^n : 0, $\sum \lambda_k = 0, \lambda_k = 0 : Q = O$.]
4. Avec la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} r^n.e^{ina}$, vérifier que $\sum\limits_{n \geqslant 0} r^n.T_n(cos(a)) = \frac{1 - r.cos(a)}{1 - 2r.cos(a) + r^2}$, pour $\mid r \mid < 1$.

   Et que les T_n sont orthogonaux pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$: $< f, g > = \int_{-1}^{1} \frac{f(x).g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

11 Fractions rationnelles

11.1 "Homographie" : écriture analogue pour f, f^{-1}

Soit $z \mapsto f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$. Vérifier que f^{-1} (là où elle existe) a une écriture analogue.

Noter le birapport $[\infty, 0, 1, z] = z$ et (f conserve le birapport ... $= [p, q, r, f(z)]$) $\Leftrightarrow$ f homographie.

2 points fixes : $\dfrac{Z-z_1}{Z-z_2} = k.\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{birapport}\\ = \ cte\end{smallmatrix}\right)$; si 1 seul : $\dfrac{1}{Z-z_0} - \dfrac{1}{z-z_0} = \dfrac{2c}{a+d}$ $\left(\begin{smallmatrix}z \mapsto z+\beta \text{ seul cas où}\\ \infty \text{ seul point double}\end{smallmatrix}\right)$.

11.2 Quelques décompositions à effectuer (...)

1. Soit a, b, c distincts et $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Calculer $\dfrac{a}{P'(a)} + \dfrac{b}{P'(b)} + \dfrac{c}{P'(c)}$ (trouver 0).

   [Ind. : $\dfrac{x}{P(x)} = \dfrac{\alpha}{x-a} + \dfrac{\beta}{x-b} + \dfrac{\gamma}{x-c}$. Trouver $\alpha = \dfrac{a}{P'(a)}$. Puis faire $\dfrac{x^2}{P(x)}$ et $x \to +\infty$].

2. (Indépendant). Décomposer en éléments simples : $\dfrac{2.x}{x^2 - 2x.ch(a) + 1}$.

11.3 Transformation d'équations, utilité (...)

On sait que les $x_k = e^{i.k.2\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont racines de $\dfrac{X^n-1}{X-1} = 0$. En posant $Z = \dfrac{1}{1-X}$ former un polynôme dont **les racines sont** $z_k = \dfrac{1}{1-x_k}$. En déduire que $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} z_k = \dfrac{1}{n}$.

11.4 (*) Le Théorème de Gauss-Lucas (...)

Soit P un polynôme de degré 3 (on se limite ici), de racines complexes distinctes z_1, z_2, z_3.

Montrer que les racines complexes de P', notées u et v ici, sont situées dans le triangle M_1, M_2, M_3.

Solution. On sait (à voir) : $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x-z_1} + \dfrac{1}{x-z_2} + \dfrac{1}{x-z_3}$. Donc $0 = \dfrac{1}{u-z_1} + \dfrac{1}{u-z_2} + \dfrac{1}{u-z_3}$.

Ou : $\dfrac{\overline{u}-\overline{z_1}}{|\,u-z_1\,|^2} + \dfrac{\overline{u}-\overline{z_2}}{|\,u-z_2\,|^2} + \dfrac{\overline{u}-\overline{z_3}}{|\,u-z_3\,|^2} = 0$. On conjugue : $\dfrac{u-z_1}{|\,u-z_1\,|^2} + \dfrac{u-z_2}{|\,u-z_2\,|^2} + \dfrac{u-z_3}{|\,u-z_3\,|^2} = 0$.

D'où enfin, vectoriellement : $\alpha.\overrightarrow{M_1U} + \beta.\overrightarrow{M_2U} + \gamma.\overrightarrow{M_3U} = \overrightarrow{0}$ avec α, β, γ des coefficients positifs.

Mais une égalité du type $\alpha.\overrightarrow{GM_1} + \beta.\overrightarrow{GM_2} + \gamma.\overrightarrow{GM_3} = \overrightarrow{0}$ avec α, β, γ réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ est une question de Barycentre !

Donc : $U(u)$ est barycentre de M_1, M_2, M_3 affectés de coefficients (réels bien sûr) positifs !

Si on le calcule par associativité, le barycentre partiel G_1 de M_1, M_2 est sur le segment $[M_1, M_2]$ car les coefficients sont positifs. On recommence avec G_1 et M_3. Finalement :

$U(u)$ est bien situé dans "l'enveloppe convexe" (le triangle !) M_1, M_2, M_3. Idem pour $V(v)$.

11.5 (*) Equations paramétriques dans $\mathbb{R}^3$! (coniques)

Soit : P_1, P_2, P_3, Q des polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$, avec $Q \neq O$. On pose :

$x = \dfrac{P_1(t)}{Q(t)}$; $y = \dfrac{P_2(t)}{Q(t)}$; $z = \dfrac{P_3(t)}{Q(t)}$. Montrer qu'on a une droite (en partie) ou une conique.

(Indication : P_1, P_2, P_3, Q liés donc courbe plane ; ainsi que $P_1^2, ..., P_2P_3$; d'où :

$a.x^2 + b.y^2 + c.z^2 + d.x.y + e.x.z + f.y.z = 0$: cône de degré 2 ; conique !)

12 Fonctions élémentaires

12.1 Proche du cours. Diverses études [corrigé]

1. "Formule de Moivre" pour ch, sh ? $(e^x)^n = e^{nx}$: $\boxed{[ch(x)+sh(x)]^n = ch(nx)+sh(nx) \text{ et parité !}}$

2. Simplifier $C = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} ch(kx)$. Analogue à $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} cos(kx)$ pour revoir la trig. circulaire.
   Avec : $E = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} e^{kx}$, C sera la partie paire de $E(x)$ **ou** $C = \frac{E(x)+E(-x)}{2}$ si besoin. Alors : $E = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}}\frac{2sh[(n+1)x/2]}{2.sh(x/2)} = \frac{sh[(n+1)x/2]}{sh(x/2)}[ch(nx)+sh(nx)]$. $C = \frac{sh[(n+1)x/2]}{sh(x/2)}ch(nx)$.
   Vérifications : $n=0,\ n=1,\ x=0$ ...

3. (*) Preuve de : $ch(a+b) = ch(a).ch(b)+sh(a).sh(b)$; $sh(a+b) = sh(a).ch(b)+sh(b).ch(a)$.
   Solution : $e^{a+b} = e^a.e^b$ [non e^{ix} ici] $ch(a+b)+sh(a+b) = [ch(a)+sh(a)][ch(b)+sh(b)]$ **et parité !** $e^{-(a+b)} = e^{-a}.e^{-b}$; ce qui est $ch(a+b)-sh(a+b) = [ch(a)-sh(a)][ch(b)-sh(b)]$, etc.

4. Etudier $f(x) = Arctan\ \frac{1+tan(x)}{1-tan(x)}$. Domaine $x \neq \pi/2+k.\pi$, f π-périodique, et $x \neq \pi/4+k.\pi$ à cause du dénominateur de la fraction. Ici, astuce trigonométrique : $f(x) = Arctan[tan(\frac{\pi}{4}+x)]$! D'où, si $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{4}+x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{\pi}{4}+x$. C'est un intervalle de longueur π : la courbe est connue.
   Note : En $\pi/2+k.\pi$, non seulement f se prolonge par continuïté (comment ?) mais devient C^∞.

5. (*) Simplifier $f(x) = Arcsin(2x.\sqrt{1-x^2})$ grâce à de la trigonométrie, ici, ce qui évite de dériver.
   (a) **Corrigé** : Domaine capital. (1) $x \in [-1,1]$ avec $\sqrt{}$ et (2) $2x.\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$ avec $Arcsin$.
   Résolvons (2) avec $x = sin(t)$ vu que (1) doit être satisfaite. C'est nous qui choisissons t : prenons $t \in [\pi/2, +\pi/2]$ donnant tous les $x \in [-1,1]$. (2) : $2.sin(t).\mid cos(t) \mid = sin(2.t) \in [-1,1]$: toujours vérifiée ! Ainsi (1) et (2) donnent : $D_{definition} = [-1,1]$. $D_{etude} = [0,1]$ par imparité.
   (b) Domaine de dérivation. Déjà $x \neq \pm 1$ à cause de $\sqrt{}$, $sin(2t) \neq \pm 1$ à cause de $Arcsin$. $2t = \pm\pi/2$ (sur D) ou $t = \pm\pi/4$ ou $x = \pm\sqrt{2}/2$ à exclure. Exclus ou à voir $x = \pm 1, \pm\sqrt{2}/2$.
   (c) Alors $y = Arcsin(sin(2t))$. Si $2t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $y = 2t$. Comme $t = Arcsin(x)$, si $t \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ou si $x \in [\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$: $y = 2.Arcsin(x)$ connu ! (et dérivée si besoin !)
   . Si $2t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$: $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$; $sin(2t) = -sin(2t-\pi)$. Là : $2t-\pi \in [\frac{-\pi}{2}, 0] \subset [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = -Arcsin(sin(2t-\pi)) = -(2t-\pi) = \pi-2t = \pi-2.Arcsin(x)$. Dessin, vérifications ?
   1) $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ partout et 2) $y \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Note : pas de dérivée si : $x = \sqrt{2}/2$.

6. Polynômes réels positifs sur $\mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$; montrer que : $P = A^2+B^2$ où $A, B \in \mathbb{R}[x]$. (Factoriser sur $\mathbb{C}$; puis $(S^2+T^2)(U^2+V^2) = M^2+N^2$.)

7. Soit $P \neq O,\ P \in \mathbb{R}[x] :\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant O$. Montrer que : $Q = P+P'+...+P^{(n)} > O$.
   ($Q(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} P(x) > 0$. Si a, plus grande racine de Q si elle existe : $Q(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha(x-a)^p, \alpha > 0, p \geqslant 1$. Or Q est C^∞, on peut dériver un D.L. et dire que $Q'(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha.p(x-a)^{p-1}$; donc dire que : $P(x) = Q(x)-Q'(x) \underset{x\to a}{\sim} -\alpha.p(x-a)^{p-1}$ par différence de termes d'ordre différents. Impossible si $x \to a^+$.)

12.2 Equation fonctionnelle de la fonction th (...)

Trouver f continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$

Si on exclut $f = \pm 1$ ($f = cte$), montrer : $-1 < f < 1$. Puis avec $Argth(f)$, que $f(x) = th(a.x)$.

12.3 Courbes et géométrie (exercices remarquables)

1. **Dériver** les fonctions suivantes (trouver $cte/ch(x)$) puis en déduire des relations entre elles
   $Arctan(e^x)$ $Arctan[sh(x)]$ $Arctan(th\dfrac{x}{2})$ [Voir $ch(2a) = (ch^2(a) + sh^2(a))$] $Arcsin[th(x)]$.
   $Arctan[sh(x)] = 2.Arctan(e^x) + C = 2.Arctan(th\dfrac{x}{2}) + D$! constantes avec $x = 0$; $+\infty$; $-\infty$ ...

   Finir avec la 4ème fonction. (*) **Ceci lié à la "fonction de Gudermann".** [cf. Cours.]

2. Soit $x + y = 1$; montrer que : $x.ln(x) + y.ln(y) \geqslant -ln(2)$
   $0 < x,\ y < 1$, à cause du ln et de $x + y = 1$. Etudier $f(x) = x.ln(x) + (1-x).ln(1-x)$, ses variations ; trouver un minimum atteint pour $x = y = 1/2$ valant : $-ln(2)$. Vérifier et finir.

3. **Entrelacement des racines** de deux trinômes du second degré. On considère, avec $\alpha \neq 0$:
   $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{(\alpha.b - a.\beta)x - (\alpha.c - a.\gamma)}{\alpha(\alpha.x^2+\beta.x+\gamma)}$. Vérifier que (et graphe des 7 cas) :

   Si $\alpha.b - a.\beta \neq 0$, avec $Y = y - \dfrac{a}{\alpha}, X = x - x_I$ unique point de Cubique∩ Asymp. horizontale ;
   qu'alors on obtient : $Y = \dfrac{k.X}{pX^2+qX+r}$, $Y' = k.\ \dfrac{-p.X^2+r}{[...]^2}$.

   (a) Si $\beta^2 - 4\alpha.\gamma < 0$ ou $q^2 - 4pr < 0$, donc $pr > 0$: aux max, min, $X^2 = r/p$ et Cubique∩$(Y = h)$ donne X_1, X_2 avec $X_1X_2 = r/p$, donc $X_1, X_2, X_{min}, X_{max}$ en D.H.

   (b) Si $\beta^2 - 4\alpha.\gamma > 0$ ou $q^2 - 4pr > 0$, mais $pr > 0$: courbe non bornée ; D.H. idem. Racines de ax^2+bx+c : 0 ou non enchevêtrées avec celles du dén. (car aux 2 asympt. vert. $X_1' < X_2'$, même limite infinie en $X_1'^+$, $X_2'^-$ car coupée par une droite horizontale en 2 points au plus.)

   (c) Si $\beta^2 - 4\alpha.\gamma > 0$ ou $q^2 - 4pr > 0$, et $pr < 0$: 3 arcs où f strict. monotone. Ici, X_1, X_2 toujours séparées par une Asympt. vert. Donc : les racines s'enchevêtrent et réciproquement.

   (d) Si $\beta^2 - 4\alpha.\gamma = 0$ ou $q^2 - 4pr = 0$: $Y = \dfrac{K.X}{(X-X_0)^2}$, $Y' = -K.\dfrac{X+X_0}{(X-X_0)^3}$, donc X_{ext} et $X_{A.V.}$ symétriques / point X_I. Si intersections avec $Y = h$, $(X_1, X_2, X_{A.V.}, X_{ext})$ en D.H.

   Enfin si $\alpha.b - a.\beta = 0$, $Y = \dfrac{\lambda \neq 0}{\alpha.[(x-x_0)^2 - \Delta]}$, ici un axe de symétrie. 0,1 ou 2 Asymptotes vert.
   mais dans ce cas-ci, pas d'enchevêtrement des racines. (Ici, Cubique ∩ Asympt. horiz.$= \emptyset$.)

4. (*) Soit $a > 1$; $b > 1$ $a \neq b$. Montrer que
   les courbes $y = a^x$ et $y = b^x$ sont **homothétiques** de centre sur l'asymptote commune Ox.

   Corrigé. Soit $(\mathcal{C})$ décrite par $M(x,y)$, d'équation $y = a^x$. L'homothétie $h : \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$ [$\Omega(\alpha, 0)$ sur l'asymptote commune Ox] donne : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = \alpha + k.(x-\alpha) \\ y' = k.y \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.
   On déduit en inversant le système que $x = \alpha + (x' - \alpha)/k$; $y = y'/k$; et que (x', y') sont liés par $y' = k.a^{\alpha + \frac{x'-\alpha}{k}}$: c'est la courbe image décrite par M'. On veut que ce soit aussi $y' = b^{x'}$.
   On choisira $k > 0$ et l'égalité des ln : $x'.ln(b) = ln(k). + [\alpha + \dfrac{x'-\alpha}{k}].ln(a)$; $\forall x' \in \mathbb{R}$.
   Possible avec $k = \dfrac{ln(a)}{ln(b)}$; et $\alpha = \dfrac{ln(k)}{ln(b) - ln(a)}$. (Egalité de deux polynômes en x').

13 Equations différentielles

13.1 Trouver les polynômes $P(x) \in \mathbb{R}[x]$: P' divise P

1. Ecrivons $P(x) = P'(x).Q(x)$. Si $P'(x) = O$, $P = O$; sinon $Q(x) = \frac{1}{n}.(x-a)$; $n =$ degré $(P) \geqslant 1$: Par conséquent : $n.P(x) = P'(x).(x-a)$.
2. Première solution (brève) ! Soit z_0 une racine de P à l'ordre $k \geqslant 1$.
   z_0 est racine de P' à l'ordre $k-1$. (Bien réfléchir à cela car on a fini !) Donc l'égalité prouve que $z_0 = a$. Finalement P possède une seule racine sur $\mathbb{C}$ et $\boxed{P(x) = \alpha.(x-a)^n,\ n \geqslant 1.}$
   Inversement si $P(x) = \alpha.(x-a)^n$: $P'(x) = n.(x-a)^{n-1}$ donc P' divise P. $(1/n$ est sans ennui)
3. Autre solution (M. Bouchut, Saint Chamond). Ecrivons $n.P(x) = P'(x).(x-a)$:
   (a) Après avoir vu que $P(a) = 0$, dérivons : $n.P'(x) = P"(x).(x-a)+P'(x)$ donc $(n-1)P'(a) = 0$.
   (b) Re-dérivons : $n.P"(x) = P^{(3)}(x).(x-a) + 2.P"(x)$ donc $(n-2)P"(a) = 0$ ... Ainsi :
   (c) $0 \leqslant k < n \Rightarrow P^{(k)}(a) = 0$; donc a racine (unique) d'ordre n. **Réciproque** comme ci-dessus.
4. Autre idée : traiter ceci en **Equation différentielle** $P(x)$ solution de $(x-a).y' - n.y = 0$ ...

13.2 Trajectoires orthogonales (de courbes planes ici ...)

1. Si $f(x, y, y') = 0$ est l'équation d'une famille de courbes (éq. diff.), justifier que les trajectoires orthogonales sont solutions de $f(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$. Cas de la famille de droites C_k : $y = k.x$?
2. Si $f(\rho, \theta, \rho') = 0$ est l'équat. d'une famille de courbes (éq. diff.), justifier que les trajectoires orthogonales sont solutions de $f(\rho, \theta, \frac{-\rho^2}{\rho'})$. La famille C_k : $y = k.x$ est exclue en polaires car $\theta = cte$.
   Cas de la famille de cercles : $\rho = \lambda.sin(\theta)$? ou vues comme ceci : $x^2 + y^2 + \lambda.y = 0$?
   (*) des cardioïdes $\rho = \lambda(1 + cos(\theta))$? [Par inversion conservant $\perp$, on a des paraboles d'axe Ox, de même foyer O : $\rho = \mu/(1+cos(\theta))$; les traj.$_\perp$ sont les paraboles sym/O, donc les traj.$_\perp$ cherchées sont les cardioïdes sym/O.]

13.3 Trajectoires orthogonales (de courbes non planes ...)

1. Définition. Sur une surface, on appelle **lignes de plus grande pente** les trajectoires orthogonales à la famille de courbes C_k tracées sur la surface telle que $z = k$: **lignes de niveau 58.5**.
2. Lignes de plus grande pente (horizontale) au Paraboloïde Hyperbolique : $2z = x^2 - y^2$?
   Un vecteur directeur d'une Ligne horizontale en M vaut $\overrightarrow{u}(1, \frac{x}{y}, 0)$ car $2.x - 2.yy' = 0$; donc une trajectoire orthogonale vérifie : $dx + x/y.\ dy = 0$ ou Γ_μ : $(1)\ x.y = \mu,\ (2)\ x^2 - y^2 = 2z$.

13.4 E.D. Lagrange $y = x.A(y') + B(y')$, Clairaut $A(y') \equiv y'$

Lagrange $\Leftrightarrow$ isoclines rectilignes : Avec $t = \frac{dy}{dx}$, $(t - A(t)).\frac{dx}{dt} - x.A'(t) = B'(t)$: LIN., courbes intégr. en paramétriques **40.9**. Les homogènes en x, y en sont un cas particulier ; idem les éq. de Clairaut.
Pour l'éq. de Clairaut : une famille de droites solutions $y = t.x + B(t)$ et leur "enveloppe" (E) **ch.30**.
Traj$_\perp$. à une famille de droites. Eq. diff. des traj.$_\perp$ Γ_μ : $x + yy' = y'.B(-1/y')$; les isoclines : droites de coeff. dir. $-1/y'_\Gamma$, $\perp$ aux Courbes Intégrales Γ_μ, qui sont donc des courbes parallèles de même développée **ch.30**, enveloppe (E) des droites initiales $y = t.x + B(t)$: des développantes de (E). **56.1**.

13.5 Résoudre $y' = \sqrt{1+y}$. Ne pas oublier la solution : $y = -1$

13.6 Equations différentielles avec utilisations de la parité (...)

1. Résoudre $f'(x) = x.f(-x)$, f dérivable sur $\mathbb{R}$. (cf. q. 2.3.)
2. Trouver f C^2 : $f"(x) + f(-x) = e^x$. (Ecrire $f = g + h$, g paire, h impaire).
3. Analogue : Résoudre $f'(x) = f(1-x)$, f dérivable. (Des indications :)
   - Attention : ce n'est pas une équation différentielle ! Comme 2) ou bien
   - Le membre de droite est dérivable donc le membre de gauche aussi et $f"(x) = -f'(1-x)$.
   - Donc : $f"(x) = -f(x)$ ... $f(x) = A.cos(x) + B.sin(x) = C.cos(x-\varphi)$; mais attention :
   - **Réciproque à faire ! A la fin, infinité de solutions à une seule constante arbitraire**. [et, si la réponse est juste, c'est : $y = C.cos(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$.]

13.7 f C^0 $2.\pi$- périodique. CNS pour que F (primitive) soit $2.\pi$-périodique

1. Voir déjà le cas : $f(x) = cos(x)$, $F(x) = sin(x) + C$ est 2π -périodique.
2. Voir aussi et savoir $f(x) = cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2}$, $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{sin(2x)}{4} + C$ **non** périodique. (Et cela sans rapport avec la constante arbitraire.)
3. **Résolution** **Déjà, toute fonction C^0 possède des primitives par Théorème.**
   Puis : **Notons** $d(x) = F(x + 2\pi) - F(x)$ **(comme différence).**
   Alors : $d'(x) = f(x + 2\pi) - f(x) = O$. **Donc** $d(x) = cte$. Ainsi :
   $x \mapsto d(x)$ est identiquement nulle si et seulement si elle est nulle en un point, par ex. $d(0) = 0$.
   Donc F sera 2π-périod. $\Leftrightarrow d(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Comme $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de f, on a finalement : F sera 2π-périod. $\Leftrightarrow$ la valeur moyenne de f est nulle.

13.8 Si f C^0 $2.\pi$- périodique, $y' + y = f(x)$ a une unique solution 2π-périodique

1. On a une Eq. diff. **LIN.** d'ordre 1, à coeff. constants. [$f(x) = \dfrac{sin(3x)}{2 + cos^5(7x)}$ est permis] !
2. **L'unicité est facile.** Car vu l'ESSM, si $y(x)$ et $y_0(x)$ sont deux solutions quelconques : $y(x) = y_0(x) + k.e^{-x}$! Qu'elles soient toutes deux 2π-périod. exige que ke^{-x} aussi, donc $k = 0$.
3. **L'existence** est difficile. **Posons** $d(x) = y(x + 2\pi) - y(x)$ **(comme différence).** Alors : $d'(x) = y'(x + 2\pi) - y'(x) = f(x + 2\pi) - y(x + 2\pi) - \big(f(x) - y(x)\big) = -d(x)$: $d'(x) + d(x) = 0$, $d(x) = k.e^{-x}$: $x \mapsto d(x)$ identiquement nulle si et seulement si nulle en un point, par ex. $d(0) = 0$

   Soit $y_0(x)$ une solution fixée (on ne sait rien sur sa périodicité). On a $y(x) = y_0(x) + k.e^{-x}$.

   Et donc : $y(x + 2\pi) = y(x)$ tout le temps $\Longleftrightarrow y(2.\pi) = y(0)$ (en un point) avec ce qui précède.
   Et $y_0(2\pi) + k.e^{-2\pi} = y_0(0) + k.e^0$ conduit à une (et une seule) valeur de k : une sol. 2π périodique.
4. On peut tester tout ce qui précède sur le cas trivial : $y' + y = 1$. $y(x) = 1 + \lambda.e^{-x}$...
5. Résolution générale non utile ici. [Voici : var. de la constante, $y(x) = u(x).e^{-x}$, $u'(x) = f(x).e^x$ d'où $u(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)e^t.dt + k$ (**cf.** $ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}.dt$). **Donc** $y(x) = e^{-x}.\displaystyle\int_a^x f(t)e^t.dt + k.e^{-x}$.]

14 Développements limités

14.1 (*) Une suite avec un développement limité (...)

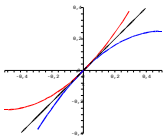
1. Montrer que $tan(x) = x$ possède une unique solution, notée x_n, sur $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.
2. (*) Montrer ensuite que l'on a : $x_n = n.\pi + \frac{\pi}{2} - \epsilon_n$ avec $\epsilon_n = \frac{1}{n.\pi} - \frac{1}{2.\pi.n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}$.

   (Avec $\epsilon_n = Arctan\ \frac{1}{n.\pi + \pi/2 - \epsilon_n}$ et $Arctan(h) = h - h^3/3 + o(h^4)$.)

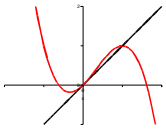
14.2 Dl de fonction réciproque avec $f(x) = x + x^2 - x^3$

1. Montrer que f est bijective de I sur J où I est maximal contenant 0.
2. On note $g = f_{/I}$. Justifier que g^{-1} possède un DL_2 en $x = 0$ à déterminer.

– Corrigé. Bien voir, autour de 0, que $f(x)$ "ressemble" à x mais est au dessus : $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$



en rouge d'où f^{-1} en bleue.



Sur $\mathbb{R}$, voici f cf. limites en $\pm\infty$.

– Sur le DL : On fait le calcul d'abord, en supposant l'existence du DL ; celle-ci laissée en fin ! Un cas usuel d'existence est : g fonction C^∞ avec formule de Taylor-Young (**cours**).

– Calcul. Supposons $g^{-1}(x) = x + ax^2 + x^2\epsilon(x)$, méthode de coefficients indéterminés. Exprimons que $g^{-1}(g(x)) = x$: $x = [x + x^2 - x^3] + a.[...]^2 + x^2.\epsilon(x)$ car $[...]^2.\epsilon(x) = x^2.\epsilon^*(x)$. Dl unique : $a = -1$.

– Existence ? g^{-1} est continue (pourquoi ?) et dérivable avec : $(g^{-1})'(x) = 1/g'(y) = 1/g'(g^{-1}(x))$; cette expression montre que g^{-1} est C^1 (on veut davantage !) et même dérivable 2 fois en 0 : le DL_2 existe.

Note : profitons d'une certaine **analogie** Développements limités - Développements décimaux pour la question suivante sur **les rationnels : période maximale** pour $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ n \geqslant 2$ (dév. périod.) ?

1. Cas de 22/7 ? Pourquoi : longueur-de-période $\leqslant n-1$? (si $n-1$, on dit "**période maximale**").
2. (Période max.)$\Leftrightarrow$ (n premier, m non multiple, long. de pér. des restes de div. des 10^q par n : $n-1$).

   $\boxed{\Rightarrow}$ Comme la long. de la période du dév.d. vaut la long.de la période des restes des div. des $m.10^k$ par n (facile),$\exists i : m.10^i \equiv 1(n)$; chaque $p \in [[1, n-1]]$ ($\equiv m.10^j$) inversible. D'où (facile) n premier. Par le Th. de Fermat (**21.1**) $10^{n-1} \equiv 1 \equiv m.10^i$, $m \equiv 10^{n-1-i}$: les restes des div. des $m.10^k$ sont donc les mêmes que des $10^{p+k}, p = n-1-i$. Ou, dans le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*,\text{x})$ $\overline{10}$ est un générateur. Remarques. m non multiple de n : clair ; $n \neq 2, 5$; $\forall m \in [[1, n-1]]$ périod. max. ! et $1/11$=0,0909... $\boxed{\Leftarrow}$ m est congru à un entier de $1, ..., n-1$ donc à un 10^l ; on finit alors aisément. **Exemple** :
3. $1/7 = 0,\underline{142857}$ $3/7 = 0,\underline{428571}$ $2/7 = 0,\underline{285714}$ $6/7 = 0,\underline{857142}$ $4/7 = 0,\underline{571428}$ $5/7 = 0,\underline{714285}$. Et $N = 142857$ vérifie $3N = 428571$ $2N = 285714$ $6N = 857142$ $4N = 571428$ $5N = 714285$ $7N = 999999$!
4. **Par recherche informatique**, on trouve que les n tels que $1/n$ soit à période maximale sont (pas 2, 3, 5, 11, 13) : 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223 ...
5. Caractérisation, p premier : comme en fait $< \overline{10} >$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*,\text{x})$, la longueur de la période est un diviseur de $p-1$ (Lagrange). **Alors** : $1/p$ est à période maximale $\Leftrightarrow$ [$p \neq 2, 3, 5$ et $\forall d$ diviseur propre de $p-1$ ($\neq 1, p-1$), p ne divise aucun des entiers $a_d = 11...1$ (d chiffres)].

   ($a_2 = 11$, $a_3 = 3.37$, $a_4 = 11.101$, $a_5 = 41.271$, $a_6 = 3.7.11.13.37$... donc 13 ne convient pas car 13 divise a_6 et 6 diviseur propre de 12 ; 37 et 41 non plus ...). [**Indication** : $10^d - 1 = 9.a_d$!]

   (Voir aussi les nombres $m/13$ de période 6 : avec 6 permutations de 076923 et 6 de 153846.)

15 Courbes en paramétriques [hors coniques], fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

15.1 Une courbe orthoptique (avec diverses indications ...)

1. Equation de la tangente à la courbe $\begin{pmatrix} x = a.cos^3(t) \\ y = a.sin^3(t) \end{pmatrix}$? $[x.sin(t) + y.cos(t) = a.sin(t).cos(t).]$
2. Montrer que (2 tangentes sont orthogonales) $\Leftrightarrow$ $cos(t - t') = 0$; par ex. $t - t' = -\pi/2 + 2k\pi$.
3. Montrer que la courbe cherchée vérifie $x = \frac{a}{\sqrt{2}}.sin(2t).cos(\frac{\pi}{4} - t)$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}}.sin(2t).sin(\frac{\pi}{4} - t)$ ou $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}.cos(2\theta)$: courbe orthoptique de l'astroïde,"quadrifolium". Dessins ? **15.5**.

15.2 Cinématique : composition des vitesses et des accélérations

Notations. **Soit un référentiel $\mathcal{R}_o(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, i.e. (id est) un repère fixe au cours du temps.**

Soit maintenant un repère $\mathcal{R}(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ mobile et $M(t)$ un point mobile.

Si on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + ...$ et $\overrightarrow{AM} = X\vec{u} + ...$, et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on définit :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{Ro} = \frac{d}{dt}(x)\vec{\imath} + \frac{d}{dt}(y)\vec{\jmath} + \frac{d}{dt}(z)\vec{k} \text{ appelé vitesse absolue de } M, \text{ notée } \vec{V}_a(M) \text{ ou } \frac{d\vec{M}}{dt}_{/Ro}.}$$

Attention : ce vecteur peut être exprimé dans n'importe quelle base, fixe ou non !

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM})_R = \frac{d}{dt}(X)\vec{u} + \frac{d}{dt}(Y)\vec{v} + \frac{d}{dt}(Z)\vec{w} \text{ appelé vitesse relative de } M, \text{ notée } \vec{V}_r(M) \text{ ou } \frac{d\vec{M}}{dt}_{/R}.}$$

Enfin : $\boxed{\vec{V_e}(M) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA})_{Ro} + X.\frac{d\vec{u}}{dt}_{Ro} + Y.\frac{d\vec{v}}{dt}_{Ro} Z.\frac{d\vec{w}}{dt}_{Ro} \text{ dite vitesse d'entrainement du point } M.}$

C'est la vitesse $/R_0$ d'un point coïncidant avec M, mais lié au repère mobile $\mathcal{R}$. Vérifier que :

1. $\boxed{\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}}$ et $\frac{d\vec{M}}{dt}_{/R_0} = \frac{d\vec{A}}{dt}_{/R_0} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ **SI** A, M **liés au solide mobile $\mathcal{R}$, 27.7, 28.5.**
2. Puis que $\vec{\Gamma}(M)_{/Ro} = (\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + X\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + ...) + 2(\frac{dX}{dt}.\frac{d\vec{u}}{dt} + ...) + (\frac{d^2X}{dt^2}\vec{u} + ...)$ ou bien : $\vec{\Gamma}_{/R_0} = \vec{\Gamma}_{/R} + \vec{\Gamma}_e + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$, dernier terme appelé accélération complémentaire ou de Coriolis.
3. **Remarquons** que si le mouvement d'entrainement est une translation : $\vec{\Gamma}_c = \vec{0}$. Et cf.**16.3**.

15.3 Exemples de mouvement particulier très important (...)

1. Si $\vec{V} \perp \overrightarrow{OM}$ alors $\overrightarrow{OM}^2 = k^2$ (Sphère ou Cercle)
2. Si mouvement à accélération centrale de centre O, $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{Cte}$: mouvement dans un plan.

15.4 (*) Etudier les mouvements de A, B, C, tels que (...)

1. $\vec{V}_A = \overrightarrow{AB}$, etc, par permutation. Supposer A, B, C équilatéral au départ. ($O = \frac{A+B+C}{3}$ fixe ! et $\frac{dz_A}{dt} = z_B - z_A = (j-1)z_A$; $z_A = e^{i.t.\sqrt{3}/2}.e^{-3.t/2}$; $t = \infty$ pour atteindre O. Spirale $\rho = e^{-\sqrt{3}.\theta}$.)
2. $\vec{V}_A = \overrightarrow{AB}/\|\overrightarrow{AB}\|$, etc. A, B, C équilatéral à $t = 0$. ($z_A = \rho.e^{i.\theta}$, $\rho = 1 - t.\sqrt{3}/2$... m. trajectoire.)
3. Soit ici : $\vec{V}_A = \alpha(t).\overrightarrow{AB}$, etc ; $a = BC(t)$. Avec $\|\vec{V}_M \wedge \vec{\Gamma}_M\| = \frac{v_M^3}{R_M}$, préciser : $R_A.R_B.R_C$.

   Corrigé : Comme $\|\vec{V}_A \wedge \vec{\Gamma}_A\| = \alpha^2.\beta.2.S$, car $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| = 2.S$; on a, avec $a.b.c = 4.R.S$:

   (...) $\frac{1}{R_A.R_B.R_C} = \frac{8.S^3}{(a.b.c)^3} = \frac{1}{(2.R)^3}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au temps t.

15.5 (*) Mouvement plan sur plan. Podaire, développée 30.6

Un plan (Q) d'un solide se déplace en restant en coïncidence avec un plan fixe (P). Le mouvement hélicoïdal tangent est donc soit une translation (très exceptionnellement) parallèlement à (P), soit **une rotation de centre $I(t)$: centre de Rotation, "CIR".** Et $\overrightarrow{\Omega}=\frac{d\theta}{dt}.\overrightarrow{k}\perp(P)$; $\theta=(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{u})$.

Donc **les normales aux trajectoires des points du solide (Q) passent par $I(t)$** au temps t.

Mais le point géométrique $I(t)$ change avec t ; son lieu dans (P) est "la base" ; dans (Q) "la roulante". C'est un roulement sans glissement car $\overrightarrow{V}_e(I)=\overrightarrow{0}$; donc : $\overrightarrow{V}_a(I)=\overrightarrow{V}_r(I)$: tangentes et $ds=d\sigma$.

Si A fixé à (Q) **15.2** $\overrightarrow{0}=\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}+\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{k}\wedge\frac{d\overrightarrow{A}}{d\theta}$ $(Z_I=Z_A+i.\frac{dZ_A}{d\theta})$ et $\overrightarrow{V_a}[M\in(Q)]=\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{IM}$.

D'où si une famille de courbes C_t, provenant du mouvement d'une courbe $C\in(Q)$, a une "enveloppe" (E), soit M le point caractéristique de C_t : on a $\overrightarrow{MI(t)}\perp C_t$ $(M=I$ possible). $[xcos(t)+ysin(t)=r.]$

1. Tangente aux conchoïdes : Si M décrit $\mathcal{C}$ et OMP alignés : $MP=cte$, MP sur un solide de CIR $I\in Normale_M$ et $\overrightarrow{IO}\perp\overrightarrow{MP}$ car MP passe par O fixe : même sous-normale polaire en P et M.
2. Podaire d'une courbe : $P=proj_\perp(O,Tang._M\text{ à }\mathcal{C})$. Les droites (MP) et (OP) passant par O fixe sont $\perp$ en P et forment une figure invariable. D'où I (donnant la normale en P) sur les normales en O et en M ; (**mais** : I non centre de courbure en M !) donc IP passe par le milieu de $[OM]$.
   Note : la podaire de la parabole : $\begin{pmatrix}x=t^2\\y=2.t\end{pmatrix}$ / Sommet est la Cissoïde droite : $(x=\frac{-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{t^3}{1+t^2})$.
3. Courbe orthoptique. Les tangentes $\perp$ en M et M' (sécantes en P) forment une figure invariable. Le CIR est sur les normales en M,M' : $MPM'I$ rectangle, donc IP contient le milieu J de $[MM']$.

   Ellipse, par Châsles : Ici, (P,J) passe par O (affinité !), on a le cercle "de Monge" : $(O,\sqrt{a^2+b^2})$.
   ou $P,Q\in\mathcal{C}_d(F',2a)$, médiatr.$[PF]$ coupe PF' en M (tang.) $FQ\perp FP\Rightarrow T=mil(P,Q)\in$Orth., $4a^2=TF^2+TF'^2=2.(OT^2+c^2)$ ($F'TP$ rect., Th. de la médiane) ou enfin par équation bien choisie $y=ux+v$ tang. $\Leftrightarrow v^2=a^2u^2+b^2\Leftrightarrow u^2(x^2-a^2)-2uxy+y^2-b^2=0$; faire $uu'=-1$.
4. cf. **ch.30** "Développée" (et **56.1**) : le centre de courbure est un CIR d'un certain solide. Ainsi :
   (a) Développée de la spirale logarithmique : Avec $V=Cte$, le rayon (O,M) est fixe dans $M,\overrightarrow{T},\overrightarrow{N}$; donc [cf. ci-dessus] I se trouve sur la normale à (O,M) en O. Et $R=\frac{\rho}{sin(V)}$.

   (b) Développée de la tractrice : Comme $MT=a$, le point T est fixe dans $(M,\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$. Donc I sur la normale en M est aussi sur la normale à Ox en T ! Forcément : $y_{developpee}.cos(\alpha_{dev})=a$. D'où $y=a.\sqrt{1+y'^2}$. Paramétrons : $y'=sh(\varphi)$: $y=a.ch(\varphi)$, $dx=a.d\varphi$ et $y=a.ch\ \frac{x-x_0}{a}$.
5. Epi, hypo, péri-cycloïdes. Un point M d'un cercle de centre C de rayon r roule sans glisser sur un cercle de base $\mathcal{B}$ de centre O de rayon a ; point de contact en P ; $arcAP=arcPM$, A fixe sur $\mathcal{B}$.

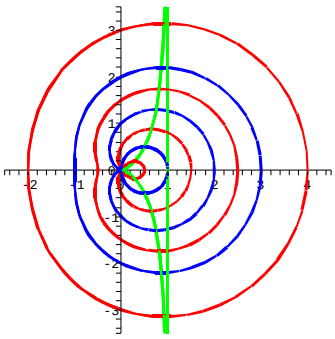
   .Epicycloïde (extérieur) : $a.t=r.u$, $z_M-z_C=e^{iu}(z_P-z_C)$: $z_M=r\left(m.e^{it}-e^{im.t}\right)$ où $m=1+\frac{a}{r}$.
   .Hypo $(0<r<a)$ et Péri $(r>a)$: changer r en $-r$! Avec $\rho=r$ ou $-r$: si contact extérieur ou intérieur $\boxed{z_M=\rho\left(m.e^{it}-e^{im.t}\right)}$ $m=1+\frac{a}{\rho}$. $m>1$ **Epi,** $0<m<1$ **Péri,** $m<0$ **Hypo**.
   Cas $m=-1$,"engrenage de La Hire" : diamètre ! **29.6,7**. Double génération : $(-\rho.e^{imt}=\rho'.m'e^{it'}$, $\rho.me^{it}=-\rho'e^{im't'})$ [idem ellipse] : $mm'=1$, $\rho'=-\rho.m=\overline{P'C'}=-\rho-a$, $t'=m.t$; d'où même cercle fixe $a'=(m'-1)\rho'=(m-1)\rho=a$. Γ Hyp, Γ' Hyp. Γ Péri, Γ' Epi. $(m=2,1/2,$cardioïde,$L=16a$ $m=-2,-1/2,$ deltoïde).
   Longueur (Newton) : $ds^2=dz.d\overline{z}=4\rho^2m^2sin^2(\frac{m-1}{2}t)dt^2$; $ds=2\rho.m.sin(\frac{m-1}{2}t)dt=\frac{2m.r}{m-1}sin(\frac{u}{2})du$.
   Développée semblable (Lahire) : avec $\frac{dz}{dt}=\rho.m.i.(e^{it}-e^{mit})=2.\rho.m.sin(\frac{m-1}{2}t).e^{i\frac{1+m}{2}t}$, $\overrightarrow{T}=\frac{dz}{ds}$; $\alpha=\frac{m+1}{2}.t$; (si $m<0,t\to0^+$: sign $\rho.m.sin(\frac{m-1}{2}t)<0,\frac{ds}{dt}<0$.) $\boxed{z_C=\frac{m-1}{m+1}.e^{\frac{-i.\pi}{m-1}}.z_M(t+\frac{\pi}{m-1})}$!
   Géométriquement **30.2,8,9** ! [Note : Idem $z=\rho\left(m.e^{it}+e^{im.t}\right)$, $t=t_0+\tau$, $e^{imt_0}=-e^{it_0}$, $m\neq1$].

16 Courbes en polaires [hors coniques]

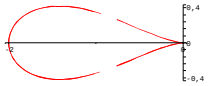
16.1 (*) Sur les limaçons de Pascal (Etienne, père de Blaise ...)

1. Soit $C_l : \rho = a cos(\theta) + l$. Vérifier que $M(\theta)$ de C_l et $N(\theta+\pi)$ de C_{-l} coïncident.
   En déduire que $C_l = C_{-l}$. Dorénavant $l \geqslant 0$.
2. Tracés de ces courbes ? ($l = a$: cardioïde)
3. Avec $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho.\rho"$, chercher les points d'inflexions et vérifier que celà correspond à $1 \leqslant l/a \leqslant 2$.
   [Lieu des points d'inflexions $\rho^2 + a.\rho.cos(\theta) + 2a^2 sin^2(\theta) = 0$.] $\dfrac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho"} = \mathcal{R}$ (ch.30) Cas $\rho = 0$?
4. Pour $l = 2a$, vérifier que le rayon de courbure en $(-a, 0)$ est infini.
   [En général, on peut voir que $R_{\theta=0} = a(\lambda+1)^2/(\lambda+2)$; $R_{\theta=\pi} = a(\lambda-1)^2/(\lambda-2)$; où $\lambda = l/a$].
5. Comme "conchoïdes", vérifier qu'elles ont même sous-normale polaire que le cercle $(l = 0)$.
   Vérifier que ce sont aussi les courbes inverses des coniques par rapport à un foyer ;
   et aussi les podaires d'un cercle pour un point du plan.
6. Vérifier qu'une équation cartésienne est : $(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2)$.
7. Qu'obtient-on par dérivation ? Vérifier que : $y' = \dfrac{ay^2 - x(x^2+y^2)}{y(x^2+y^2+ax)}$ (en éliminant l).
8. Déduire que les points à tangente horizontale sont inclus dans la cissoïde droite : $\rho = a.\dfrac{sin^2(\theta)}{cos(\theta)}$.
   Où sont les points à tangente verticale ?
9. Milieux des cordes de C_l, vues de O sous un angle droit ? $[(x-a/2)^2 + y^2 = l^2/2.]$

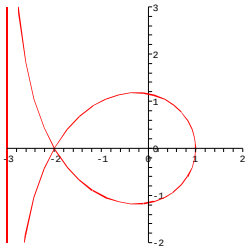
   Sur la cardioïde : Vitesse proportionnelle au rayon de courbure $\Leftrightarrow \theta$ fonction affine de t (ou $\omega = cte$).



inflexions :



Après :



sym./Ox.

16.2 (*) Tracer une courbe donnée par une équation polaire (...)

1. $\rho = 1/\ cos(\ \dfrac{\theta}{3}\ )$ [Trissectrice de Mac-Laurin ; si $A(-2,0)$, $(Ax, AM) = \theta/3$, alors $(Ox, OM) = \theta$.]
   - Au départ un intervalle en θ de longueur $6.\pi$ donne tout.
   - $\rho(\theta + 3\pi) = -\rho(\theta)$: un intervalle en θ de longueur $3.\pi$ **donne tout sans aucune symétrie !**
   - On choisit $[-3\pi/2, 3.\pi/2]$ car $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ permet encore de le diviser en deux avec une symétrie par rapport à Ox. $D_{etude} = [0, 3.\pi/2]$
   - Au départ $\theta = 0$ tangente parallèle à Oy avec $tan(V) = ...$
   - A l'arrivée, branche infinie. $y = \rho(\theta).sin(\theta)$ tend vers $-\infty$, $x = \rho(\theta).cos(\theta)$ tend vers -3. (...)
2. Idem $\rho = \sqrt{cos(2.\theta)}$; $\rho = 1/\sqrt{cos(2.\theta)}$ Lemniscate de Bernoulli et Hyperbole équilatère.
3. Idem $\rho = cos(\theta)/sin^2(\theta)$; $\rho = sin^2(\theta)/cos(\theta)$ Parabole de sommet O et Cissoïde droite.

   [L'aire entre la cissoïde et son asymptote : $2.\dfrac{1}{2}.\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{1-sin^4(\theta)}{cos^2(\theta)}.d\theta = \dfrac{3.\pi}{4}$.]

16.3 (*) Accélération en coordonnées polaires, Formules de Binet

1. Ayant $\overrightarrow{OM} = \rho(t).\overrightarrow{u}(t)$, montrer que $\overrightarrow{V} = \dot{\rho}\overrightarrow{u} + \rho.\dot{\theta}\overrightarrow{u}_1$; et $\overrightarrow{\Gamma} = [\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2]\overrightarrow{u} + [2.\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta}]\overrightarrow{u}_1$.
A ne pas confondre avec le repère de Frenet (cf. courbure) ! et que $\Gamma_{\overrightarrow{u}_1} = \frac{1}{\rho}.\frac{d}{dt}[\rho^2.\dot{\theta}]$; **donc :**
(acc. centrale $\overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{u}$ **col.)** $\Leftrightarrow$ ($\boxed{\rho^2.\dot{\theta} = C}$ $= \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}\|$ cte **; c'est la "Loi des aires"** $d\mathcal{A}/dt = C/2$.)
2. Ici $(*)' = \frac{d(*)}{d\theta}$: $\dot{\rho} = -C.(\frac{1}{\rho})'$, $\ddot{\rho} = -\frac{C^2}{\rho^2}.(\frac{1}{\rho})''$ $\boxed{\overrightarrow{V} = C\left(-(\frac{1}{\rho})'\overrightarrow{u} + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{u}_1\right)}$ $\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \frac{-C^2}{\rho^2}\left((\frac{1}{\rho})'' + \frac{1}{\rho}\right)\overrightarrow{u}}$
$V^2 = (\frac{d\rho}{dt})^2 + \frac{C^2}{\rho^2} = C^2\left(\frac{1}{\rho^2} + [(\frac{1}{\rho})']^2\right)$ *connu avec* $\rho(t)$ *ou* $\rho(\theta)$. $\frac{d(V^2)}{2.dt} = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\Gamma} \underset{ici}{=} \frac{d\rho}{dt}\Gamma_{\overrightarrow{u}}$, $\Gamma_{\overrightarrow{u}} = \frac{d(V^2)}{2.d\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{C^2}{\rho^3}$.
3. Remarque : Mouvement à accélération centrale, Hodographe, Podaire et Inversion !
   - $\boxed{\text{Hodographe} = \{\mu : \overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{V(t)}\}}$ pour la cycloïde $x'(t) = a(1 - cos(t))$, $y'(t) = a.sin(t)$: un cercle ...
   - Cas d'un mouv. à acc. centrale : Si **ici** $H = proj_\perp(O)$ sur Tang. à Courbe initiale (podaire) $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{C}{2}dt = \frac{1}{2}.OH.ds \Rightarrow OH.V = C$. P sur (OH) avec $OH.OP = C$ se déduit de la podaire par inversion de pôle O puiss. C [aussi P pôle de $(M, \overrightarrow{V})$/Cercle$_{O,\sqrt{C}}$ tppr] et on passe de P à μ par $r_{O,\frac{\pi}{2}}$. **Rem.** Si la traj. a une asympt. $x = a \neq 0$, $\mu(0, y = C/a)$: point de contact d'une tangente passant par O ; si branche parab. de dir. Oy l'hodographe passe par O, tang. Oy.

16.4 (*) Avec l'hodographe, mouvements à accélération centrale

1. (*) Enoncé : Quelles sont les trajectoires des mouvements à accélération centrale de centre O dont l'hodographe est un cercle passant par O ? (Connaitre les coniques de foyer O en polaires).
   Corrigé. Hodographe de coord. polaires (v, φ), $v = 2a.cos(\varphi)$: $\overrightarrow{V} = a.[(1+cos(2\varphi))\overrightarrow{i} + sin(2\varphi)\overrightarrow{j}]$. On calcule $\overrightarrow{\Gamma}$: colinéaire à $\overrightarrow{OM}(\theta) \Leftrightarrow 2\varphi = \theta + \pi/2$ (π). Donc $V = \varphi - \theta = -(\varphi + \frac{\pi}{2})$ (π) et : $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{tan(V)} = \frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)}$, $d\theta = 2.d\varphi$. $\rho = \frac{k}{cos^2(\varphi)} = \frac{2k}{1 + cos(\theta + \frac{\pi}{2})}$: parabole, axe Oy, foyer O. Ou : Par r^{-1} le lieu de P est un cercle contenant O, d'inverse $\mathcal{D}$: $y = -b \neq 0$; l'antipodaire de $\mathcal{D}$: par. de foyer O, d'axe Oy. [Si $O \notin$ cercle, antipodaire encore connue : ellipse ou hyperbole de foyer O.]
2. (*) Enoncé : Chercher $\overrightarrow{\Gamma} = f(\rho)\overrightarrow{u}$, pour que l'hodographe soit un cercle.
   Corrigé : Soit $A(a, 0)$ le centre du cercle et $\overrightarrow{V} = a.\overrightarrow{i} + R.\overrightarrow{I}(\varphi)$. Alors $\overrightarrow{\Gamma} = R.\dot{\varphi}.\overrightarrow{J}$. Forcément : $\overrightarrow{J} = \pm\overrightarrow{u}$, $f(\rho) = \pm R.\dot{\varphi}$. Et $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ (π) : $\dot{\varphi} = \dot{\theta}$. $\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}$ (loi des aires) donne $f(\rho) = \pm\frac{R.C}{\rho^2}$.
   Inversement ici $\overrightarrow{\Gamma} = \pm R.\dot{\theta}\overrightarrow{u}$. Or $d\overrightarrow{u}_1/dt = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{V} = \mp R.\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{cte}$. Hodographe : cercle.
3. Enoncé. On a une trajectoire circulaire passant par O avec la loi des aires. Vitesse, accélération ?
   Corrigé : Si $\rho = a.cos(\theta)$, trouver que : $V^2 = \frac{C^2.a^2}{\rho^4}$ et, avec $\frac{d(V^2)}{2.d\rho}$, $\Gamma = -\frac{2C^2.a^2}{\rho^5}$.

Remarques. [(**) Pour les Ovales de Descartes, cf. un problème de Robert Ferréol].

– La sous-tangente polaire $\overline{OT}$ (dans OXY) : $\frac{1}{\overline{OT}} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'$; la sous-normale : $\overline{ON} = \rho'$ et $\overline{OT}.\overline{ON} = -\rho^2$.
Cas des coniques. $\rho = \frac{e.d}{1 + e.cos(\theta)}$, $\frac{1}{\overline{OT}} = \frac{-sin(\theta)}{d}$. $\overline{OT}.cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = d$: $T \in$ *Directrice.* Normale (r, φ) dans OXY : $\frac{X}{\overline{OM}} + \frac{Y}{\overline{ON}} = 1$ ou $\frac{1}{r} = \frac{cos(\varphi - \theta)}{\rho} + \frac{sin(\varphi - \theta)}{\rho'}$. $Norm \cap Ox = \{K\}$: $\varphi = 0(\pi) \Rightarrow \overline{OK} = r_K = -e.\rho$. Si $L = proj_\perp(K, (OM))$: $\overline{OL} = -e.\rho.cos(\theta)$ donc : $\overline{LM} = \rho.(1 + e.cos(\theta)) = cte = p$.

– Comme autres courbes on a les Ovales de Cassini $u.v = k^2$, $u = F'M$, $v = FM$; en polaires : équation bicarrée de degré 4 ; 2 axes de symétrie ; elles (!) contiennent la lemniscate de Bernoulli.
Les Ovales de Cayley : $1/u + 1/v = 2/b$ avec $FF' = 2a$. (Moyenne harmonique ; // ci-dessus.)
Ovales de Descartes : 1 axe de symétrie, 3 foyers (Descartes, Chasles) $n'.u + n.v = l$; contiennent des coniques $\pm u \pm v = 2a$ (1 foyer infini) et les limaçons de Pascal (2 foyers égaux ; 3 si cardioïde) !

17 Suites : généralités

17.1 Des études de suites assez faciles (...)

1. $a_0 > 0,\ b_0 > 0\,;\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}\,;\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$ (Penser à $z_n = a_n + ib_n$).
2. $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + k/n^2)$ (Utiliser $x - x^2/2 \leqslant ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$.)
3. Soit la suite $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{16 + u_n^2}{2}}$. Justifier que la suite (u_n^2) est connue. Conclure.

17.2 Suite impliscite comme racine de polynômes

1. Montrer que $P_n(x) = x + x^2 + ... + x^n - 1$ possède une unique racine x_n dans $[0, +\infty[$. Limite ?
2. **Corrigé très classique.** ($n \geqslant 2$.) P_n continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$, $P_n(0) = -1$, $P_n(1) = n - 1 > 0$ si $n \geqslant 2$, donne l'existence et l'unicité de x_n et que $x_n \in]0, 1[$.
   Comme $P_{n+1} \geqslant P_n$ (dessin !) $P_{n+1}(x_n) \geqslant P_n(x_n) = 0$. Donc $x_{n+1} \in]0, x_n]$ et (x_n) décroissante. D'où (x_n) décroissante, minorée par 0, converge vers $l \geqslant 0$. l à trouver, si possible ! Or :
   $x + x^2 + ... + x^n = x.\dfrac{1 - x^n}{1 - x}$: $\dfrac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$, $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$. Montrons : $x_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où : x_n tendra vers $1/2$. $x_n < 1$ insuffisant : $(1 - 1/n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/e$! $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 < 1$, x_2 fixe, suffit.

17.3 Accélération de convergence : méthode de Stirling

1. Pour $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ on a $S = S_n + R_n$, $S = \sum_{k=1}^{+\infty} ...$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} ...$ Vérifier alors que :
   $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} < \boxed{\dfrac{1}{k^2}} < \dfrac{1}{k(k-1)} \implies S_n + \dfrac{1}{n+1} = T_n < S < S_n + \dfrac{1}{n} = T'_n$. Et :
2. $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}) < \boxed{\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k(k+1)}} = \dfrac{1}{k^2(k+1)} < \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}$.
   Et donc : $T_n + \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} = U_n < S < T_n + \dfrac{1}{2n.(n+1)} = U'_n$.
3. Puis : $\boxed{\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{2}{k^2(k+1)(k+2)} = ...}$

17.4 Accélération de convergence : méthode de Richardson

1. Supposons que : $u_n - l = \lambda.h_1^n + O(h_2^n)$, $|\, h_2 \,| < |\, h_1 \,| < 1$.
   Montrer alors que $v_n = \dfrac{u_{n+1} - h_1.u_n}{1 - h_1}$ converge aussi vers l mais, de plus : $v_n - l = O(h_2^n)$.
2. Exemple : calcul de π par la méthode d'Archimède.
   Soit : $u_n = 2^n.sin\dfrac{\pi}{2^n}$; alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{c_{n+1}}$ où $c_n = cos\dfrac{\pi}{2^n}$ et donc : $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + c_n}{2}}$.
   ($u_2 = 2.\sqrt{2}$, $c_2 = \sqrt{2}/2$). Vérifier ici que : $h_1 = 1/4$; $h_2 = 1/16$ (Dl de sin).

17.5 (*) Fractions rationnelles convergeant vers un irrationnel

Si $\dfrac{p_n}{q_n} \to x$ avec $x \notin \mathbb{Q}$, $p_n \wedge q_n = 1$, montrer que $|\, p_n \,|$, q_n tendent toutes deux vers $+\infty$.
(Si $q_n \not\to \infty$, on peut trouver (q_{n_k}) bornée (par M) ; alors $|\, p_{n_k} \,|$ bornée (par N) ; (r_{n_k}) prendrait un nombre fini de valeurs et convergerait vers x, donc stationnaire pour $k \geqslant K$: on aurait $x \in \mathbb{Q}$.)

18 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$. etc.

18.1 Suites avec beaucoup de radicaux (...)

1. Soit la suite : $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (n radicaux), $a_1 = \sqrt{2}$.
   (a) Vérifier : $1 + cos(2x) = 2.cos^2(x)$. Déduire qu'on peut poser $a_n = 2.cos(\theta_n)$, θ_n à préciser.
   (b) Conclusion sur la convergence (éventuelle) ? cf. **18.8**.

2. Soit la suite : $b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...+\sqrt{1}}}}$ (n radicaux) [méthode généralisable ici].
   (a) Vérifier que $b_1 = 1 \leqslant b_2 = \sqrt{2} = 1,414...$; et $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$.
   (b) Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$. Montrer que :
   – L'équation $f(x) = x$ a pour unique solution dans $\mathbb{R}^+$: $\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...}$ nombre d'Or.
   – f est croissante sur $[0, \varphi]$ (suffira) ; **et** f continue sur $\mathbb{R}^+$...
   (c) Conclure par récurrence que : $1 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant \varphi$ donne, avec f croissante :
   $$1 \leqslant f(1) = \sqrt{2} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_{n+2} \leqslant f(\varphi) = \varphi.$$
   D'où (b_n) croissante, majorée par φ, converge vers $l \leqslant \varphi$. Puis montrer que $l = \varphi$:
   . car dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, si n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers l ;
   . et le membre de droite tend vers $f(l)$, vu que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ même ! Donc :
   $l = f(l)$, équation déjà vue ; seule solution positive φ : b_n converge vers φ (en croissant).

3. (*) Montrer la convergence de $c_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}}}$. [Si $p \geqslant 4 : p - 1 + \sqrt{2p} \leqslant 2(p-1)$.]

18.2 Soit $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$: un équivalent

1. (a) Si $-1 < u_0 < 0$, montrer que (u_n) converge et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$. Convergence de $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$?
   (b) Avec le Th. de Césaro admis : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \Rightarrow \frac{v_0 + ... + v_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$, déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$.

2. (a) On prend dans cette question 2, $u_0 > 0$. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On voudrait un équivalent de u_n en $+\infty$. On pense que $ln(u_{n+1}) \approx 2.ln(u_n)$ donc que $ln(u_n) \approx cte.2^n$ est une estimation grossière possible. Aussi, on pose $v_n = ln(u_n)/2^n$.
   (b) Prouver que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}.ln(1 + \frac{1}{u_n})$; puis que $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}.ln(1 + \frac{1}{u_n})$.
   (c) Déduire que $v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}.ln(1 + \frac{1}{u_n})$. Puis (v_n) majorée, convergente vers une limite α.
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant exp(\alpha.2^n) \leqslant u_n + 1$. En déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
   (Pour la dernière inégalité, on pourra utiliser un passsage à la limite dans (c).
   (e) On précise même plus ! Soit $\beta_n = exp(\alpha.2^n) - u_n$. Montrer que (β_n) est bornée et que : $2.\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n).exp(-\alpha.2^n)$. Déduire que $u_n = exp(\alpha.2^n) - \frac{1}{2} + \epsilon_n$, avec $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

18.3 (*) Méthode de Newton avec $f(x) = x - \varphi(x)/\varphi'(x)$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^2} = \frac{f"(r)}{2}$. ($u_1 - r = \frac{(r-b)^2}{2}.\frac{\varphi"(c_x)}{\varphi'(b)}$ si départ de b.)
2. Règle de Fourier (le signe de $\varphi"$ est supposé constant) : $(u_1 - b)(u_1 - r) < 0 \Leftrightarrow \varphi(b).\varphi"(b) > 0$.

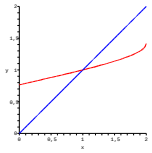
18.4 Vitesse de convergence de suites convergeant vers $\sqrt[n]{a}$

$u_{n+1} = \frac{1}{n}[(n-1)u_n + \frac{a}{u_n^{n-1}}]$ converge plus vite que $v_n = \frac{1}{2}[v_n + \frac{a}{v_n^{n-1}}]$. [Cas 1, $f'(\sqrt[n]{a}) = 0$.]

18.5 Suite $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$, $u_0 \in [-2,2]$ et $u_n = 2.cos(\varphi_n)$

1. 1ère solution. **Visée :** $\mid u_{n+1} - 1 \mid \leqslant k. \mid u_n - 1 \mid$, $k < 1$, k **fixe. Déjà, la suite existe :**
   Forcément u_1 **existe et** $u_1 \in [0,2] \subset [-2,2]$ **et de même** on peut passer à u_2, etc.
   Ensuite : $\mid u_{n+1} - 1 \mid = \frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1}. \mid u_n - 1 \mid$ On veut majorer $\frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1}$, donc : minorer $\sqrt{2-u_n}+1$, minorer $\sqrt{2-u_n}$, minorer $2-u_n$; minorer $-u_n$; finalement : majorer u_n. Mais si on dit $u_n \leqslant 2$ (comprendre pour tout n ; et qui est juste) : $\frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1} \leqslant 1$, **et on ne peut pas conclure !** Il faut faire mieux. La clé provient de **l'observation :**
   En réalité : $u_1 \in [0,2]$ et donc $u_2 \in [0,\sqrt{2}]$ et ceci est vrai pour tout u_n tel que $n \geqslant 2$: $u_n \leqslant \sqrt{2}$.
   On vérifiera que ceci entraine : $\frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1} = k < 0,567$.
   Donc : $n \geqslant 2 \Rightarrow \mid u_n - 1 \mid \leqslant k^{n-2}. \mid u_2 - 1 \mid$ car on ne remonte **qu'à** u_2 **ici** !

2. 2ème solution : (u_{2p}) **convergente vers quoi ?** **Ici aussi, il y a une difficulté ...**
   (a) Une chose aisée est que f décroisante de [0,2] dans [0,2] entraine fof croissante de [0,2] dans [0,2]. Bien sûr : $u_4 = fof(u_2)$, $u_6 = fof(u_4)$... Partons de u_2 car on a : $u_2 \in [0,2]$.
   (b) Voici la difficulté : Une fois qu'on aura vu (pas encore fait) que $(u_{2p})_{p\geqslant 1}$ monotone, bornée (par 0 et 2), elle sera convergente vers... **un point fixe de** fof **! (car** fof **continue).**
   Donc on résout $fof(x) = x$. $x = 1$ **est solution mais peut-être d'autres ?**
   $fof(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$. (1) $fof(x) = x \Rightarrow 2-\sqrt{2-x} = x^2$ ce qui est (2) $2-x^2 = \sqrt{2-x}$ qui $\Rightarrow (2-x^2)^2 = 2-x$ ou : (3) $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$ qui possède $x = 1$ comme solution.
   Donc : $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 = (x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 2)$ (division).
   L'étude de $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ ($\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3} \simeq -1,39$; $0,72$; et $\varphi(0) < 0$ et $\varphi(\sqrt{2} < 0)$ montre que φ n'a pas de racine sur $[0, \sqrt{2}]$: car (2) imposait aussi $x \leqslant \sqrt{2}$: tant mieux !
   Finalement fof **n'a qu'un seul point fixe sur** $[0,2]$**, c'est** $x = 1$



   (c) Sur $[0,1]$: $x \leqslant fof(x) \leqslant 1$ (pourquoi ?) donc $(u_{2p})_{p\geqslant 1}$ croissante majorée par 1 si $u_2 \in [0,1]$ (pourquoi ?) et décroissante dans l'autre cas (pourquoi ?) converge. Et donc vers 1 avec (b).
   Puis $u_{2p+1} = f(u_{2p})$ converge vers $f(1) = 1$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.

3. 3ème solution : **Voir que** $u_n = 2.cos(\varphi_n)$ **avec**
   φ_n arithmético-géométrique en s'aidant de : $1 - cos(a) = 2.sin^2(a/2) = 2.cos(\pi/2 - a/2)$.

18.6 Des suites couplées (étudiées sans matrice ici ...)

Soit les suites : $u_1 = 2$, $v_1 = 3$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$.
Déterminer 2 réels q tels que $\exists \lambda, \mu$: $\lambda.u_n + \mu.v_n$ géométrique de raison q. Conclure.

18.7 Questions autour du Théorème du point fixe (...)

Soit f contractante, de I dans I, avec I intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall u_0 :\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f.
2. Avec $f(x) = x + e^{-x}$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que $\mid f(x) - f(y) \mid < \mid x - y \mid$ pour $x \neq y$, ne suffit pas.

18.8 Suites pour le calcul approché de π (Archimède ...)

Soit le cercle de rayon 1, de centre O. A chaque pas, on double le nombre de côtés. Pas 1 : carré de côté $l_1 = \sqrt{2}$, **demi**-périmètre $p_1 = 2.\sqrt{2}$, $\alpha_1 = \pi/2$. Pas n : polygone de $k_n = 2^{n-1}.4 = 2^{n+1}$ côtés, chacun de longueur l_n ; $p_n = \frac{1}{2}k_n.l_n$, d'angle $\alpha_n = \frac{\alpha_1}{2^{n-1}}$. Une jolie formule :

1. (a) Vérifier que : $l_n = 2.sin\frac{\alpha_n}{2}$ $(= 2.sin\frac{\alpha_1}{2^n})$. Donc : $p_n = k_n.sin\frac{\alpha_n}{2}$. $(0 \leqslant \alpha_1/2 \leqslant \pi/4)$.

   (b) Avec $x \in [0,\frac{\pi}{4}] \Rightarrow sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2} = \frac{1-\sqrt{1-sin^2(2x)}}{2}$ déduire : $l_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$

2. (a) Calculer l_2. Montrer que : $l_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ où $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}$, avec n radicaux.

   (b) Vérifier que : $p_{n+1} = 2^{n+1}.\sqrt{2-u_n}$. Sans calcul : limite de u_n et de $2^{n+1}.\sqrt{2-u_n}$? Quelle valeur approchée obtient-on pour $n = 4$ avec $p_4 = 2^5.\sqrt{2-u_4}$? Notes [6]

3. Meilleure relation de récurrence : Soit $c_n = cos(\frac{\alpha_n}{2})$ l'apothème : à l'étape n, c'est la hauteur issue de O. Avec : $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$, vérifier : $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$; $p_{n+1} = p_n.\ \frac{1}{c_{n+1}}$ [Archimède].

18.9 Méthode des isopérimètres : périmètres constants à 2

(*) Schwab, Nicolas de Cuse vers 1450 : 9 décimales ?

AB est un côté au pas n, de longueur l_n, de milieu H, $OA = R_n$, $OH = r_n$, $\widehat{AOB} = \alpha_n$;
C étant milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, soit A', B' milieux de $[AC]$ et $[BC]$. Le cercle limite a donc un rayon de $\frac{1}{\pi}$.

1. Observer que $A'B'$ est le nouveau côté. Placer H' et déduire géométriquement que :
   $r_n < r_{n+1}$, $R_n > R_{n+1}$, $r_n < \frac{1}{\pi} < R_n$, $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$. Note [7] Et : $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$.
2. Avec cosinus de $\widehat{A'OC}$, $\widehat{A'OH'}$, vérifier que : $\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{r_{n+1}}{R_{n+1}}$ et donc : $R_{n+1} = \sqrt{R_n.r_{n+1}}$. Note [8]
3. Erreur ? Par calcul, vérifier que $0 < R_{n+1} - r_{n+1} = \frac{\sqrt{r_{n+1}}}{\sqrt{R_n}+\sqrt{r_{n+1}}}(R_n - r_{n+1}) < \frac{R_n - r_n}{4}$. Note [9]

---

[6] Trois notes :

i. Avec les développements limités : $p_n = \frac{L_n}{2} = \pi + \frac{\lambda}{4^n} + \frac{\epsilon_n}{4^n}$. Aussi la suite $q_n = \frac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n)$ converge vers la même limite mais encore plus rapidement. (Accélération de convergence de Richardson ; cf. **17.4** ignorée d'Archimède) !

ii. Demi-périmètre extérieur : $P_n = k_n.tan(\frac{\alpha_n}{2})$. $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{1-tan^2(\frac{\alpha_{n+1}}{2})} = \frac{c_{n+1}^2}{c_n} = \frac{1+c_n}{2c_n} \geqslant 1$ décroissante vers π et $\frac{1}{P_{n+1}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n})$, $p_{n+1} = \sqrt{p_n.P_{n+1}}$. $\frac{2}{3}.sin(x) + \frac{1}{3}.tan(x) = x + \frac{x^5}{20} + O(x^7) \Rightarrow$ pondération $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$: meilleure !

iii. Et avec les aires ? On voit que l'aire du polygone intérieur à l'étape n est : $A_n = p_{n-1}$. (Donc rien de neuf) !

[7] On a : $2.R_n.sin\frac{\alpha_n}{2} = l_n(= \frac{2}{k_n})$, $2.r_n.tan\frac{\alpha_n}{2} = l_n$. Qui redonnent les formules de 1) 2). Mais inutile.

[8] A ne pas confondre avec : $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n.b_n}$ (moyenne arithmético-géométrique de Gauss ...)

[9] Et donc, par effet de cumul : $0 < R_n - r_n < \frac{(R_1 - r_1)}{4^{n-1}}$, $n > 1$. Aussi $n = 15$ semble donner 9 décimales ...
Erreur, géométriquement : tracer $\overset{\frown}{A'B'}$, D son milieu. $\widehat{H'A'D} = \widehat{DA'C}$ (théorème de l'angle inscrit). D'où $H'D < H'C/2$!

19 Intégrales simples

19.1 Six petites questions initiales (...)

1. "I.P.P." : $I = \int Arcsin(x)dx = \int Arcsin(x).1.dx = \int u.v'.dx = u.v - \int v.u'dx$ ... $u = Arcsin(x), v' = 1$

   Donc $I = x.Arcsin(x) - \int \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = x.Arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + cte$ (car la dernière : $\frac{k.u'}{\sqrt{u}}$).

2. "I.P.P" avec bornes : $\int x.cos(x).dx = x.sin(x) - \int sin(x).dx$. Avec des bornes **3** endroits :

   $\int_0^{\pi/2} x.cos(x).dx = [x.sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} sin(x).dx = ... = \frac{\pi}{2} + [cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 > 0.$ (vérifié)

3. Changement de variable (facile) : $\int x.(1+x^2)^4.dx$. Avec : $u = 1 + x^2$ on a : $k.\int u^4.u'(x).dx$

   ou $k.\int u^4.du$. Donc $\int x.(1+x^2)^4.dx = \frac{1}{2}.\frac{(1+x^2)^5}{5} + cte$ (on n'a jamais développé $(1+x^2)^4$!)

4. Une somme de Riemann : $Lim\ S_n,\ n \to +\infty$, où $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{n^2}.sin\left(\frac{k.\pi}{n}\right)$?

   (...) On trouve que la limite existe et vaut $L = \int_0^1 x.sin(\pi.x)dx$. Puis par parties ... $L = \frac{1}{\pi}$.

5. Si $f \in \mathcal{CM}$, T-périodique montrer : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2}$ ... : indépendante de a,

   par calcul. Ce qui est : l'intégrale sur une période indépendante du départ [Cas $a = \frac{-T}{2}$].

   On a l'écriture (par relation de Châsles) : $\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$; mais avec $x = T + t$:

   $\int_T^{a+T} f(x).dx = \int_{t=0}^{t=a} f(T+t).dt = \int_{t=0}^{t=a} f(t).dt$ avec la T-périodicité. Donc : $\int_a^0 + \int_T^{a+T} = 0.$

6. Une intégrale calculée par symétrie : $\int_0^{\pi/2} \frac{sin(t)}{sin(t)+cos(t)}dt = \frac{\pi}{4}$ (Poser $x = \frac{\pi}{2} - t$.)

Rem. Avec $I = \int_0^{\pi/4} ln(cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} ln[cos(\frac{\pi}{4} - t)]dt$, voir que $J = \int_0^{\pi/4} ln[1 + tan(x)]dx = \frac{\pi.ln(2)}{8}$!

19.2 Comment Fermat calculait $\int_0^a x^m.dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$

Sur $[0, a]$, on prend la "subdivision" (infinie) : $\theta.a,\ \theta^2.a, ...$ où $0 < \theta < 1$. Alors, une somme (supérieure) vaut : $\sum_{0 \leqslant k \leqslant +\infty} \theta^k(1-\theta).a.\theta^{k.m}.a^m = a^{m+1}.(1-\theta).\frac{1}{1-\theta^{m+1}}$. Puis $\theta \to 1$ ...

19.3 Une équation différentielle avec une primitive (...)

Trouver f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) + x.\int_0^x f(t).dt - \int_0^x t.f(t).dt = 1.$

(On montrera que f est dérivable et, avec $y(x) = \int_0^x f(t).dt$, que $y" + y = 0$. $f(x) = cos(x)$.)

19.4 $fC^0([0,1])$, $\int_0^1 f(t).dt = 0$; $\alpha = inf\ f$, $\beta = sup\ f$: $\int_0^1 f^2(t).dt \leqslant -\alpha.\beta$

Indication : $\int_0^1 (f - \frac{\alpha+\beta}{2})^2(t).dt \leqslant (\frac{\beta-\alpha}{2})^2$ ...

19.5 (*) Quelques calculs de diverses intégrales [avec ici les réponses]

1. Montrer que $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{\pi}{2} - 1$ et $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$, géométriquement !
2. Soit $I = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{Arctan(x)}{1+x}dx$. En posant $x = \frac{1-u}{1+u}$ calculer I. En déduire J.

   Rép. $I = \frac{\pi}{4}.ln(2) - I...$ $I = \frac{\pi}{4}.ln(2) - J$ donc $J = I = \frac{\pi}{8}.ln(2)$.
3. Calculer $I(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a.sin^2(x)}$. $I(a) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2.\int_0^{\pi/2}$ $(u = tan(x))$ $I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}$.
4. Calculer $I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{cos^2(t) + x.sin^2(t)}$ $(\frac{\pi}{2.\sqrt{x}})$ et $J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2(t).dt}{(cos^2(t) + x.sin^2(t))^2}$ $(\frac{\pi}{4.x^{3/2}})$.
5. (Récurrence) On considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\pi} \frac{cos(nt).dt}{b^2 - 2bcos(t) + 1}$, $0 < b < 1$.

   Calculer $I_{n+2} + I_n - (b + \frac{1}{b})I_{n+1}$. En déduire que $I_n = \alpha.b^n + \beta.\frac{1}{b^n} = \frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}.b^n$.

19.6 (*) $a < b$, $\lambda > 0$, g C^1 ; par parties $\int_a^b g(t)sin(\lambda.t)dt \to 0$ si $\lambda \to +\infty$

Corrigé : $\int_a^b g(t)sin(\lambda.t)dt = ... = \frac{1}{\lambda}[g(a).cos(\lambda.a) - g(b).cos(\lambda.b) + \int_a^b g'(t).cos(\lambda.t)dt]$. Or :

g' bornée (C^0 sur un segment, g C^1) ; $| u+v+w | \leqslant | u | + | v | + | w |$ et $| \int_a^b \varphi(t)dt | \leqslant \int_a^b | \varphi(t) | dt$

D'où $\boxed{| \int_a^b g(t)sin(\lambda.t)dt | \leqslant \frac{1}{\lambda}[| g(a) | + | g(b) | + \int_a^b | g'(t) | .dt] = \frac{K}{\lambda} ...}$ $\left(\begin{array}{c}\textit{connu sous le nom de}\\ \textit{lemme de Riemann-Lebesgue}\end{array}\right)$.

19.7 (*) Une intégrale classique par limite de somme de R. 44.7

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer : $x^n - 1 = (x^2 - 1).\prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x.cos(k\pi/n) + 1)$.
2. Soit a un réel, $a \neq \pm 1$; en déduire : $I(a) = \int_0^{\pi} ln(a^2 - 2a.cos(t) + 1).dt$.
3. (*) On peut aussi étudier $a \mapsto I(a)$ comme fonction définie par une intégrale :

   On a, pour $| r | < 1$: $\int_0^{\pi} \frac{1 - r.cos(\alpha)}{1 - 2rcos(\alpha) + r^2}d\alpha = \pi$ car c'est $\Re e \int_0^{\pi} \sum r^k.e^{i.k\alpha}d\alpha$; donc

   pour $R | > 1$ $\int_0^{\pi} \frac{2(R - cos(\alpha))}{R^2 - 2Rcos(\alpha) + 1}d\alpha = \frac{2.\pi}{R}$. $\underline{I(a) = 2.\pi.ln | a |, \text{ si } | a | > 1 ; \quad 0, \text{ si } | a | < 1.}$

19.8 (*) Limites et intégrales [dont $(\int_a^b f^n(x).dx)^{1/n}$ ...]

1. Soit $I_n = (\int_a^b f^n(x).dx)^{1/n}$, $f \geqslant O$, C^0 sur $[a,b]$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty = sup_{[a,b]}f$.
2. Soit $u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$, f C^0. Montrer que l'on a ici : $n.u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.
3. Montrer que $u_n = \int_0^1 f(t^n)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Equivalent de $\int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}dx$? (Trouver $\frac{ln(2)}{n}$).
4. Soit f paire. Montrer $g(x) = \int_0^x \frac{x.f(t)}{t^2+x^2}dt$ est paire. $\lim_{x\to 0} g(x)$? Idem avec $\int_0^x \frac{t.f(t)}{t^2+x^2}dt$.
5. (*) Si f $C^0([0,\pi])$, $\int_0^{\pi} f(x) | sin(n.x) | dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$. $(\int_{k\pi/n}^{(k+1).\pi/n} f(x). | sin(nx) | dx = \frac{2}{n}.f(\pi.\theta_k)$. Le total tend vers $2.\int_0^1 f(\pi.x).dx$; car on a la limite d'une somme de Riemann.)

20 Calcul de primitives

20.1 Les primitives de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sont-elles calculables ?

On y arrive : $\int e^t.2.t.dt$ ...

20.2 Primitives de fractions rationnelles en $sin(x),\ cos(x)$

$\int \frac{sin(x).dx}{cos(3x)}$? Déjà $\boxed{cos(3x) = 4.cos^3(x) - 3.cos(x).\ \ (P_3(X) = 4.X^3 - 3.X \text{ polynôme de Tchebychev).}}$

D'où $F(x) = \int \frac{sin(x).dx}{cos(3x)} = -\int \frac{dt}{4t^3 - 3t}$; ici $u = t^2$ bon car fraction rationnelle impaire !

$F(x) = -\int \frac{t.dt}{(4t^3 - 3t).t} = -\frac{1}{2}.\int \frac{du}{4u^2 - 3u} = -\frac{1}{8}.\int \frac{du}{u^2 - \frac{3}{4}.u}$. Décomposer, ou bien le cours :

$F(x) = -\frac{1}{8}.\int \frac{du}{[u - \frac{3}{8}]^2 - (\frac{3}{8})^2} = k\int \frac{dX}{X^2 - A^2} = \frac{-k}{2A}.ln\mid \frac{X + A}{X - A} \mid + C = \frac{1.8}{8.6}.ln\mid \frac{u - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}}{u - \frac{3}{8} - \frac{3}{8}} \mid + C$. D'où

$F(x) = \frac{1}{6}.ln\mid \frac{t^2}{t^2 - \frac{3}{4}} \mid + C = \frac{1}{6}.ln\mid \frac{cos^2(x)}{cos^2(x) - \frac{3}{4}} \mid + C$. Mais : $4.cos(x).[cos^2(x) - \frac{3}{4}] = ... = cos(3.x)$!

D'où $F(x) = \frac{1}{6}.ln\mid \frac{4.cos(x).cos^2(x)}{4.cos(x)[cos^2(x) - \frac{3}{4}]} \mid + C = \frac{1}{6}.ln\mid \frac{4.cos^3(x)}{cos(3.x)} \mid + C = \frac{1}{6}.ln\mid \frac{cos^3(x)}{cos(3.x)} \mid + D.$

Remarque. Quand on a dit : $t = cos(x)$, personne n'a dit $x \in [0, \pi]$ car x est celui ... de l'énoncé.
En un mot, on ne pouvait pas dire "$x = Arccos(t)$". D'autres exercices :

1. Montrer que $\int \frac{cos^3(x)}{sin^5(x)}dx = \frac{-1}{4sin^4(x)} + \frac{1}{2sin^2(x)} + Cte$; ($t = cos(x)$ est bon aussi).
2. Avec astuce : Calculer $\int \frac{sin(x) + cos(x)}{3 + sin(2x)}dx$ en posant $t = sin(x) - cos(x)$!

20.3 Avec des fonctions irrationnelles ($\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ connu)

1. Primitive de $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ (Quantité conjuguée)
2. Vérifier que $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = Arcsin\frac{2x - a - b}{b - a} + C = 2Arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + D.$
   $[x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}sin(t),\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$, pour la première ; et voir que $C - D = \frac{\pi}{2}.]$
3. Vérifier que $\int \frac{1}{x}.\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}dx = 2Arctan\ \sqrt{*} - \frac{1}{\sqrt{2}}ln\mid \frac{\sqrt{*} + 1/\sqrt{2}}{\sqrt{*} - 1/\sqrt{2}} \mid + Cte$
4. Vérifier que $\int \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}dx = \epsilon.\sqrt{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{2}ln\mid \frac{\sqrt{*} - 1}{\sqrt{*} + 1} \mid + Cte,\ \epsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } x \geqslant -2 \\ -1 \text{ si } x < -3 \end{cases}$
5. Vérifier que $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \sqrt{*} + 2ln\mid \sqrt{*} - x - 2 \mid - \frac{1}{2}ln\mid 2.\sqrt{*} - 2x - 1 \mid + Cte.$
6. Vérifier que $\int \frac{x.dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \sqrt{*} - 2ln\mid x + 2 + \sqrt{*} \mid + Cte.$
7. Vérifier que $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{-2x^2 + 4x + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}Arccos\sqrt{\frac{3}{2}}(x - 1) - \frac{1}{2}.\sqrt{*} + Cte.$
8. Vérifier que $\int x.\sqrt{x^2 + x + 1}dx = \frac{4}{3}(*)^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{16}(2x + 1).\sqrt{*} - \frac{3}{16}Argsh\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + Cte.$
9. Calculer $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx \quad \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}dx \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-6)}} \quad \int \frac{dx}{(\alpha.x + \beta)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ $t = \frac{1}{\alpha.x + \beta}$.

20.4 Une primitive hors série de : $f(x) = 1/[ch(x).\sqrt{ch(2x)}]$

Calculer $\int \frac{dx}{ch(x).\sqrt{ch(2x)}}$. [$t = \sqrt{ch(2x)}$ ramène à $\int \frac{sign(x).\sqrt{2}.dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2-1}}$ "abélienne" ; faisable.]

20.5 Calculs de limites (seulement) d'intégrales irrationnelles

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ [limite seule] et $\lim_{\lambda\to 1} \int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(\lambda-x)}}$ [Idem.]

20.6 Intégration des "différentielles binômes" $\int x^m.(a.x^n+b)^p.dx$

1. Montrer que le cas $\int x^m.(a.x^n+b)^p.dx$ se ramène avec $\underline{a.x^n = -b.t}$ à $\int t^q.(1-t)^p.dt$.
2. On suppose p entier et $q = N/D$ rationnel ; montrer que $t = u^D$ permet de faire le calcul.
3. Idem si q entier et p rationnel. Dans un troisième cas, on suppose $p+q$ entier et $p = N/D$ rationnel ; avec $\int t^{p+q}(\frac{1-t}{t})^p.dt$ et $(\frac{1-t}{t}) = u^D$, montrer que le calcul est encore possible.

20.7 (*) CNS : $\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2.(x-d)^2}dx$ soit rationnelle (a, b, c, d distints)

Une solution naturelle mais technique. On écrit $F(x) = \frac{p}{(x-c)^2} + \frac{q}{(x-c)} + \frac{r}{(x-d)^2} + \frac{s}{(x-d)}$ et on veut exactement que : $q = s = 0$. **Mais la réponse finale doit porter sur a, b, c, d seuls !**

D'autre part, en multipliant par x et avec $x \to \infty$, clair que $q + s = 0$. Donc CNS à exprimer $q = 0$

On a : $p = \frac{(c-a)(c-b)}{(c-d)^2}$; et $\boxed{F(x) - \frac{p}{(x-c)^2} = \frac{q}{(x-c)} + \frac{r}{(x-d)^2} + \frac{s}{(x-d)}.}$ D'où à gauche :

$F(x) - \frac{p}{(x-c)^2} = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2.(x-d)^2} - \frac{p}{(x-c)^2} = \frac{(x-a)(x-b) - \frac{(c-a)(c-b)}{(c-d)^2}.(x-d)^2}{(x-c)^2.(x-d)^2}$. Soit $N(x)$ le numérateur

– Forcément $N(c) = 0$ (sans effort). La formule de Taylor dit que : $N(x) = \frac{N'(c)}{1!}(x-c) + ...$

– Donc on obtient (notre souci) $q = \frac{N'(c)}{(c-d)^2}$ en faisant comme d'habitude : $*(c-c)$ puis $x = c$.

Par cette façon, tout revient donc à exprimer que $N'(c) = 0$!

$N'(x) = 2.x - (a+b) - 2.\frac{(c-a)(c-b)}{(c-d)^2}.(x-d)$ ... ou $c - a + c - b = 2.\frac{(c-a)(c-b)}{(c-d)}$ ou enfin :

$$\underline{\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b} = \frac{2}{c-d}} \quad (*)$$

Deuxième solution : plus facile !

On écrit : $\underline{\exists\ k,\ l}$: $\left(\frac{k}{x-c} + \frac{l}{x-d}\right)' = F(x)$. Ou : $\underline{\exists\ k,\ l}$: $-k.(x-d)^2 - l.(x-c)^2 = (x-a)(x-b)$

(les numérateurs) ; ou bien (coefficients de 1, x, x^2) : $\underline{\exists\ k,\ l}$: $\begin{cases} k + l = -1 \\ 2kd + 2lc = -(a+b) \\ kd^2 + lc^2 = -ab \end{cases}$

– Ici 3 équations, 2 inconnues (k et l) donc une contrainte entre les paramètres a, b, c, d.

– **Une fin élégante.** Le système s'écrit $k.\begin{pmatrix}1\\2d\\d^2\end{pmatrix} + l.\begin{pmatrix}1\\2c\\c^2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\a+b\\ab\end{pmatrix}$. Il est clair que les 2 premiers vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont libres $(c \neq d)$; on exprime que le 3ème est dans $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en annulant un déterminant ! $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2d & 2c & a+b\\d^2 & c^2 & ab\end{vmatrix} = 0$. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2d & 2(c-d) & a+b-2d\\d^2 & (c-d)(c+d) & ab-d^2\end{vmatrix} = 0$. Ici on trouve :

$\underline{(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)}$. $(**)$ Mais : $(*) \Leftrightarrow (**)$ **c'est la "division harmonique" !**

21 Groupes, anneaux, corps

21.1 Diverses questions d'Arithmétique (...)

1. Les congruences dans $\mathbb{Z}$. a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b(n)$ si $a = b + k.n$, $k \in \mathbb{Z}$. [Analogue aux congruences modulo $2.\pi$ dans $\mathbb{R}$ pour les mesures d'angles.] Ex : $19 \equiv 1(9)$. On pourrait développer la "preuve par 9" pour la multiplication des entiers. Autre thème :
2. Le (petit) théorème de Fermat. Si $a \in \mathbb{Z}$, et p **nombre premier**, montrer que $a^p \equiv a(p)$.
   Autre énoncé : p divise $a.(a^{p-1} - 1)$. Si p (premier) ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1(p)$.
   Exemple : $1234^5 \equiv 1234(5)$ (Fermat, 5 est premier) et ... $\equiv 4(5)$: facile.

   Démonstration . Cas $p = 2$. Il faut voir que $a^2 - a$ est toujours pair $\forall a \in \mathbb{Z}$. Facile.
   . Autres cas : $p = 3$ ou 5, ou 7 ou 11 ... Si $a \in \mathbb{N}$: récurrence. $a = 0$ clair. Sinon $a = b + 1$: $(b+1)^p = b^p + 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p-1} C_p^k . b^{p-k}$. Voyons que $C_p^k, 1 \leqslant k < p$, est divisible par p, ce sera fini. $k!.(p-k)!.C_p^k = p!$ et p est un nombre premier qui divise le membre de droite. Il divise donc un terme du produit à gauche. Or ne divise ni $k!$ car $k < p$ ni $(p-k)!$: $k \geqslant 1$; donc divise C_p^k.
   Pour $a \in \mathbb{Z}^-$: posons $a = -b$ et p impair (rappel). $a^p = -(b^p) \equiv -b = a$.
3. Utilisation du Théorème de Fermat. Déjà tout nombre de $\mathbb{Z}$ est dans une et une seule des 4 parties :
   {...,-8,-4,0,4,8,12,16,...} nombres $4k$; {...-7,-3,1,5,9,13,...} nombres $4k+1$;
   {...,-6,-2,2,6,10,...} nombres $4k+2$; {...,-5,-1,3,7,11,...} nombres $4k+3$.
   . Puis : aucun nombre premier du type $4k$. . Un unique du type $4k+2$: c'est 2.
   . Une infinité du type $4k+3$: cf. un exercice du début du Cours (assez difficile).
   . Et plus difficile encore : il y a une infinité de nombres premiers du type $4k+1$.
   Si $m \geqslant 2$, on va trouver un nombre premier p congru à 1 modulo 4, $p > m$; celà suffira.
   Soit le nombre $(m!)^2 + 1$, p un diviseur premier (tout nombre $\geqslant 2$ en possède) ; $p > m$ sinon p divisant $(m!)^2$ ne diviserait pas $(m!)^2 + 1$; $(m!)^2 \equiv -1(p)$ donc $[u \equiv u', v \equiv v' \Rightarrow u.v \equiv u'.v']$ $(m!)^{p-1} = (m!)^{2.\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Or [Fermat] $(m!)^{p-1} \equiv 1(p)$ donc $\frac{p-1}{2}$ pair ; $p = 1 + 4k$. [Beau !]
   Deux remarques 1) Le théorème de Fermat **se généralise** avec la fonction indicatrice φ d'Euler.
   2) Pour p premier, on a donc $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a(p)$. N'y a-t-il que les nombres premiers ayant cette propriété ? Non ; un tel nombre est dit "nombre de Carmichaël" ; exemple : $561 = 3.11.17$.

21.2 Avec la division euclidienne, préciser les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Ce sont les $n.\mathbb{Z}$. (c'est connu)

21.3 (*) Au sujet des Groupes quotients (...)

1. Soit G un groupe, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. Montrer qu'elle est "compatible à gauche" si et seulement si elle est du type $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ où H (qui est classe(e)) est un sous-groupe de G.
2. Si H sous-groupe, de G fini, montrer que toutes les classes (relation précédente) ont même cardinal ; et $card(H)$ divise card(G), **Théorème de Lagrange** ; [card(G)/card(H) : indice de H dans G.]
3. Montrer que l'ensemble quotient $G/\mathcal{R}$ peut être muni d'une relation de groupe $\Leftrightarrow$ H est un sous-groupe "distingué", i.e. (id est) $xH = Hx$, $\forall\, x \in G$. Exemples : noyaux d'homomorphismes.

21.4 Un groupe admettant un nombre fini de sous groupes est fini

Les éléments sont tous d'ordre fini (sinon contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ donc une infinité de sous-groupes). Et alors : $|\, G \,| \leqslant \sum_{finie} |< a >|$. Donc G est fini.

21.5 (*) Groupe G opérant sur un ensemble E (...)

1. G opère sur E si on a une application $(g,x)\mapsto g\centerdot x$: $g'.(g\centerdot x)=(g'g)\centerdot x$ et $e\centerdot x=x,\ \forall\, x\in E$. Montrer que $\widehat{g}: x\mapsto g.x$ est bijective $E\to E$, de réciproque : $x\mapsto g^{-1}.x$. Et que $g\mapsto\widehat{g}$ est un homomorphisme $G\to\mathcal{S}_E$. Inversement, un hom. $g\mapsto\widehat{g},\ G\to\mathcal{S}_E$ définit l'opération $g.x=\widehat{g}(x)$.
2. On appelle Orbite de x : $Orb(x)=\{g.x,\ g\in G\}$. [G induit une action sur $Orb(x)$]. Vérifier que $\forall y\in Orb(x),\ Orb(y)=Orb(x)$. Et que les orbites forment une partition de E.
3. Soit E/G l'ensemble-quotient des Orbites ; vérifier la **formule des classes** : $|\,E\,|=\sum_{O\in E/G}|\,O\,|$.
4. Exemple. Si H est un sous-gr. de G, H agit sur G par $(h,g)\mapsto h.g$; $cl(a)=\{h.a\}=H.a=Orb(a)$. Ici toutes les orbites (pour cette "translation à gauche") ont même cardinal $|\,H\,|$; l'indice de H dans G est $(G:H)=|\,G/H\,|$ (si fini) et $|\,G\,|=(G:H).|\,H\,|$. D'où le Théorème de Lagrange !
5. Stabilisateur pour action quelc. : Si $A\subset E$, $St_A=\{g: g.A=A\}$: sous-gr. (non distingué) de G ; ex : St_x si $x\in E$; on a $|\,G\,|=|\,O(x)\,|\,.\,|\,St_x\,|$ [$g\mapsto g.x$ surj. sur $O(x)$ et $g.x=g_1.x\Leftrightarrow g\in g_1.St_x$: ainsi, les antécédents de $g_1.x$ sont au nombre de $|\,St_x\,|$. Ou bien noter que : $St_{g.x}=g^{-1}.St_x.g$.]

21.6 Le centre $Z(G)$ d'un p-groupe (fini) n'est jamais réduit à $\{e\}$

Soit l'action de G sur G : $(g,x)\mapsto g.x.g^{-1}$. $|\,O(x)\,|$ divise $|\,G\,|$. Si $|\,O(x)\,|=1$, on a $x\in Z(G)$; donc $|\,G\,|=|\,Z(G)\,|+\sum_{x\notin Z(G),O\in G/action}|\,O(x)\,|$ ces dernières de card. multiple de p ; d'où p divise $|\,Z(G)\,|$.

(Donc : tout groupe d'ordre p^2 est abélien. Sinon $G/Z(G)$ cyclique donnerait $g=a^k.c^l$ et $gg'=g'g$.)

21.7 (*) Le groupe $\mathcal{G}$ des isométries du cube (...)

1. En prenant un repère orthonormé direct $A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, vérifier qu'il y a 8.3.2=48 isométries, dont 24 directes ($\mathcal{G}^+$) laissant le cube invariant. Et que le centre de gravité G est invariant.
2. $\mathcal{G}^+$: Id ; 3 rotations d'axe IJ milieu de 2 faces opposées $(\pm\pi/2,\pi)$ et 6 autres ; 6 demi-tours d'axe UV milieux d'arêtes opposées ; 8 rotations d'angle $\pm\frac{2.\pi}{3}$ d'axes AA' joignant 2 sommets opposés : 24 déplacements. Et en faisant agir $\mathcal{G}^+$ sur les (AA'), etc, voit que $\mathcal{G}^+$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.

21.8 Non unicité de la décomposition dans un anneau non factoriel

Dans $\mathbb{Z}[i.\sqrt{3}]$: avec $4=2.2=(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$ et dans $\mathbb{Z}[i.\sqrt{5}]$: avec 6 ... (Exercice)

Note. Seul 26 vérifie $a^2<26<b^3$, $b^3-a^2=2$ $(*)$. Car ici $\mathbb{Z}[i.\sqrt{2}]$ euclidien, donc principal, factoriel. $b^3=(a+i.\sqrt{2})(a-i.\sqrt{2})$; et $a-i.\sqrt{2}\wedge a+i.\sqrt{2}=a-i.\sqrt{2}\wedge(i.\sqrt{2})^3$; or (aisé) $i.\sqrt{2}$ irréductible ; s'il divise $a-i.\sqrt{2}$, il divise a dans $\mathbb{Z}[i.\sqrt{2}]$ et a pair ; mais $(*)\Rightarrow a,b$ impairs : $a+i.\sqrt{2}\wedge a-i.\sqrt{2}=1$. Ainsi : $a+i.\sqrt{2}=(\alpha+i.\beta.\sqrt{2})^3$; $\beta(3\alpha^2-2\beta^2)=1$; seul cas : $\beta=1,\alpha=\pm1$; d'où $a=\pm5;b=3$.

21.9 (*) Au sujet des Anneaux quotients (...)

1. Soit A, un anneau, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. Montrer que l'ensemble quotient peut être muni d'une structure d'anneau si et seulement si $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x-y\in I$ où I est **un idéal bilatère** de A : i.e. I sous groupe de $(A,+)$ commutatif et : $\forall a\in A,\ \forall x\in I,\ a.x$ et $x.a$ sont dans I.
2. Montrer que les idéaux de Z sont les $n.\mathbb{Z}$. Et : $Z/p.\mathbb{Z}$ corps $\Leftrightarrow$ p premier. Th. de Wilson : $(p\geqslant 2$ premier$)\Leftrightarrow(p-1)!\equiv-1(p)$. [$\Leftarrow$ aisé ; $\Rightarrow$ dans $(p-1)!$ regrouper chaque terme avec son inverse sauf 1 et $p-1$: seuls égaux à leur inverse, cf. éq $x^2-1=0$, dans un corps commutatif. Voir le cas $p=2$ aussi.]

21.10 (*) Avec $A=\mathbb{Z}[i]$, si p premier, $p\equiv1\ (4)$: p somme de 2 carrés

Avec l'idéal $I=p.A$ (voir **21.9**), montrer que dans A/I, $x^{p-1}-1$ possède p racines, les classes de 1, ...$(p-1)$ et i. Déduire que ce n'est pas un corps puis que p est non irréductible ; conclure.

22 Espaces vectoriels

22.1 Donner des exemples de sous e.v. supplémentaires

1. Avec une base : Dans $\mathbb{R}^3$? dans $\mathbb{R}_n[x]$? dans $\mathbb{R}[x]$? 2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

22.2 (*) Résolution de systèmes linéaires [corrigé]

1. **Avec le pivot de Gauss :** (S) $\left\{\begin{array}{l} x+y-3z=-13 \\ x+y-2z=-8 \\ 2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1.x+y-3z=-13 & et \\ z=5 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -y+7.z=29 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ y=18 & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

On a pris "appui" sur Ligne 1 pour supprimer les x de TOUTES les autres Lignes.

$\left\{\begin{array}{c} 1.x+y-3z=-13 \\ -1.y+7z=29 \\ z=5 \\ y=18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1.x+y-3z=-13 & \\ -1.y+7z=29 & \\ z=5 & \\ 7z=47 & L_4 \leftarrow L_4+L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1.x+y-3z=-13 & \\ -1y+7z=29 & \\ 1.z=5 & \\ 0=12 & L_4 \leftarrow L_4-7L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1.x+y-3z=-13 & \\ -1.y+7z=29 & \\ 1.z=5 & \\ 0=12 & \end{array}\right.$

impossible, **visible avant ! mais on a voulu illustrer les opérations élémentaires.**

(S') $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+6z+t=1 \\ x+y+2z+0.t=-1 \\ 2x+2y+5z+t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+2z+0.t=-1 \\ 3x+2y+6z+t=1 \\ 2x+2y+5z+t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z+0.t=-1 & \\ -y+0.z+t=4 & L_2 \leftarrow L_2-3.L_1 \\ z+t=3 & L_3 \leftarrow L_3-2.L_1 \end{array}\right.$

Sous cette forme, on voit qu'il y a une infinité de solutions à **une seule lettre arbitraire.**

par exemple t : t arbitraire, $z=-t+3$, $y=t-4$, $x=t-3$.

2. (*) $\left\{\begin{array}{l} \lambda.x+y=0 \\ x+\lambda.y+z=0 \\ y+\lambda.z=0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} \lambda x_1+x_2=0 \\ x_1+\lambda.x_2+x_3=0 \\ x_2+\lambda.x_3+x_4=0 \\ \ldots \\ x_{n-1}+\lambda x_n=0 \end{array}\right.$ ou : en posant $x_0=x_{n+1}=0$, le système de n équations : $1 \leqslant k \leqslant n$: $x_{k-1}+\lambda x_k+x_{k+1}=0$. On discute sa résolution selon la valeur de λ.
   (a) Résoudre le cas $n=3$. [Rép. : si $\lambda \notin \{0,\pm\sqrt{2}\}$ solution unique $x=y=z=0$. Sinon 3 cas particuliers en λ où, chaque fois, on trouvera une infinité de solutions à une lettre arbitraire.]
   (b) Cas général. Avec $u_{k+1}+\lambda.u_k+u_{k-1}=0$, montrer que si $\lambda=2$: $x_k=(-1)^k.(\alpha+\beta.k)$ et que le système possède une unique solution : $x_1=\ldots=x_n=0$. Et analogue si $\lambda=-2$.
   (c) Supposons $\lambda \neq \pm 2$; notons $r \neq 1/r$ les racines de $x^2+\lambda.x+1=0$. Donc $x_k=\alpha.r^k+\beta.1/r^k$. Justifier, avec x_0 et x_{n+1}, qu'on doit voir le cas $r^{2n+2}=1$; se produisant "ssi" $r=e^{ip.\pi/(n+1)}$, $p \in [[1,n]]$; que vaut alors $\lambda=-(r+1/r)$? Montrer ici que le système a une infinité de solution à une lettre arbitraire. Et sinon qu'il a la seule solution évidente : $x_1=\ldots=x_n=0$.

22.3 Des exemples de combinaisons linéaires [corrigé]

1. Indiquer un espace vectoriel contenant les fonctions $cos(px)$, $sin(qx)$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $sin^3(x)$ est combinaison linéaire des $sin(qx)$, $q=1,2,3$. Vérifier ...
   [**Sol.** Par ex. $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver (Euler) $sin^3(x)=\frac{-1}{4}.sin(3x)+\frac{3}{4}.sin(x)$, imparité respectée.]
2. Idem pour $ch^4(x)$ en combinaison linéaire de $ch(px)$, $p=0,1,2,3,4$. [$8.ch^4(x)=ch(4x)+4.ch(2x)+3$.]

22.4 (*) Complexifié d'un e.v. réel (comme le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$)

1. On considère ExE et on pose, si $z=a+ib$: $z.(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(a\overrightarrow{u}-b\overrightarrow{v},a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{u})$. Ainsi : $(\overrightarrow{u}+i.\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{u'}+i.\overrightarrow{v'})=\ldots$ et $(a+i.b).(\overrightarrow{u}+i\overrightarrow{v})=\ldots$ Vérifier que c'est un $\mathbb{C}$-e.v. $(E_{\mathbb{C}}=E+i.E)$.
2. Si $dim_{\mathbb{R}}(E)=n$, E de base $\overrightarrow{e}_1,\ldots,\overrightarrow{e}_n$, alors Ex$E=E_{\mathbb{C}}$ est de dimension n sur $\mathbb{C}$ (et $2.n$ sur $\mathbb{R}$), de base $(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{0}),\ldots(\overrightarrow{e}_n,\overrightarrow{0})$: on dit qu'on a **complexifié** E. [Ainsi : $(\overrightarrow{0},\overrightarrow{e_1})=i.(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{0})$.]

(**En affine** : $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}=O+E_{\mathbb{C}}$; $f(x,y)=0$, courbe réelle ; $f(X,Y)=0$ sa courbe complexe. Ex. $X^2+Y^2=0$.)

23 Espaces vectoriels de dim finie

23.1 Sur-famille, sous-famille [facile ; corrigé]

Soit $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ une sur-famille de $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J}$ c'est-à-dire $J \subset I$: ensembles d'indices.

1. Montrer que : $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J}$ génératrice $\Rightarrow (\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ génératrice. Puis :
2. Une sous-famille d'une famille libre est libre ; ou bien : une sur-famille d'une famille liée est liée.

▪ **Rédaction :** On a dans tous les cas $Vect(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J} \subset Vect(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ car $J \subset I$.
L'hypothèse dit alors que $Vect(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J} = E$; à fortiori, dans ce cas : $Vect(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I} = E$.

▪ Soit $\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p.\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$, les indices étant dans J ; on peut considérer qu'ils sont dans I et donc (sur-famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ libre) les λ_k sont nuls ; d'où la sous-famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J}$ est libre.

23.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$=3, famille libre, génératrice

Soit les vecteurs : $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{b}\begin{pmatrix}\beta\\b\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{c}\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma'\\c\end{pmatrix}, \overrightarrow{d}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \overrightarrow{f}\begin{pmatrix}7\\8\\m\end{pmatrix}$.

1. Familles libres ?
   ▪ 4 vecteurs sont forcément liés en dimension 3 !
   ▪ $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{f}$ sont (par contre) libres car non colinéaires.
   ▪ Pour $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$: le système 3x3 : $x.\overrightarrow{d} + y.\overrightarrow{e} + z.\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$ donne $m \neq 9 \Rightarrow x = y = z = 0$;
   $m = 9$: x, y, z pas forcément nuls. Donc $\begin{cases} m \neq 9 \Rightarrow \text{syst. libre} \\ m = 9 \Rightarrow \text{syst. lié.} \end{cases}$ Famille libre $\Leftrightarrow m \neq 9$.
   ▪ Pour $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$: Si $a.b.c \neq 0$, $x.\overrightarrow{a} + y.\overrightarrow{b} + z.\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \Rightarrow x = y = z = 0$: Syst. libre.
   En sens inverse Syst. libre $\Rightarrow a \neq 0$, car tout système contenant $\overrightarrow{0}$ est clairement lié.
   Syst. libre $\Rightarrow b \neq 0$ sinon $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{\imath}$ colinéaires, donc liés ; et $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ liés ;
   et Syst. libre $\Rightarrow c \neq 0$ sinon $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{c} = \gamma\overrightarrow{\imath} + \gamma'\overrightarrow{\jmath}$ liés car 3 vecteurs dans $Vect(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$! Donc $\boxed{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \text{ libres} \Leftrightarrow abc \neq 0 \text{ pour le système "triangulaire" donné.}}$
2. Enfin génératrices ?
   ▪ Deux vecteurs ne sont jamais générateurs (de tout l'espace) en dim 3.
   ▪ Puis, $\boxed{\text{comme on est en dim 3 :}}$ $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$ gén. $\Leftrightarrow$ base $\Leftrightarrow$ libre $\Leftrightarrow$ $m \neq 9$.

23.3 Famille libres / liées dans $E = \mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathbb{R}[x)$ [corrigé]

1. L'ensemble des polynômes de degré 2 (exactement) n'est pas un sous espace :
   Plusieurs raisons ! $\begin{cases} O \text{ non dans cet ensemble car de degré } -\infty \\ \text{Si } P, Q \text{ sont de degré 2, } P+Q \text{ pas forcément !} \\ \text{Enfin } \lambda = 0 \Rightarrow \lambda.P = 0.P \text{ non de degré 2.} \end{cases}$
2. On a $\mathbb{R}_n[x] = Vect(1, x, , ..., x^n)$ donc sous-e.v. ! $(1, ...x^n)$: Famille génératrice ; qui est libre aussi ; donc base à $(n+1)$ vecteurs. $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[x] = n+1}$ (Ne pas confondre avec $\mathbb{R}^n$.)
3. Puis :
   $\boxed{\text{Soit } R_0, R_1, ..., R_n \text{ des polynômes de degré } r_0 < r_1 < ... < r_n,\ r_0 \geqslant 0 : \text{ cette famille est libre.}}$
   Car soit $\alpha_n R_n + ... + \alpha_0.R_0 = O$. Si un α_k est non nul, soit α_p celui non nul de plus grand indice ; on aurait une contradiction car alors degré(Gauche)$= r_p \geqslant 0$, degré(Droite) $= -\infty$.
   ▪ D'où $(x-a)^k{}_{0\leqslant k\leqslant n}$ libre à $(n+1)$ vecteurs d'un e.v. $\mathbb{R}_n[x]$ de dim. $n+1$ donc autre base.
   ▪ Le cas de P_k, avec $\mathrm{d}^0 P_k = k \geqslant 0$ est un cas particulier de l'encadré ci-dessus.

4. Le cas $\mathbb{R}[x]$ et la famille **infinie** des $Q_k = x.(x-1)...(x-k+1)$:
Montrer que c'est une (autre) base de $E = \mathbb{R}[x]$.

Corrigé. Comme par définition, une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre, on est donc ramené à l'encadré ci-dessus (degrés distints $\geqslant 0$) donc la famille est libre.
Voyons qu'elle est génératrice (attention ! infinie). Soit un polyn. $P \neq O$ (sinon évident) : voyons qu'il est comb. lin. de la famille. Si degré$(P) = p \geqslant 0$, on a $P \in \mathbb{R}_p[x]$, de dim. $p+1$ et $Q_0, ...Q_p$ libre à $p+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_p[x]$ d'où génératrice de $\mathbb{R}_p[x]$, donc génère $P \in \mathbb{R}[x]$.

23.4 Quelques autres exemples de famille libres / liées [corrigé]

1. Dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $x \mapsto 1, x \mapsto sin(x), x \mapsto cos(x), x \mapsto sin^2(x), x \mapsto cos^2(x)$ sont liées.
2. Mais les fonctions $x \mapsto 1, x \mapsto sin(x), x \mapsto cos(x), x \mapsto sin(2x), x \mapsto cos(2x)$ sont libres.

Corrigé :
▪ Vrai car voici une relation de liaison (comb. linéaire !) : $1.1 - 1.cos^2(x) - 1.sin^2(x) = O$.
▪ On applique la définition :
$a.1 + bsin(x) + c.cos(x) + d.sin(2x) + e.cos(2x) \Rightarrow a = b = c = d = e = 0$? : la question !
Réponse : on prend 3 équations avec $x = 0$, puis $x = \pi/2$, puis $x = -\pi/2$; puis on dérive
$b.cos(x) - c.sin(x) + 2d.cos(2x) - 2e.sin(2x) = O$ et mêmes valeurs. D'où : $\begin{cases} a+c+e=0 \\ a+b-e=0 \\ a-b-e=0 \\ b+2d=0 \\ -c-2d=0 \\ c-2d=0 \end{cases}$
(2) et (3) donne $a - e = b = -b$ donc $b = 0, a = e$. (5) et (6) : $c = 2d = -2d$ donc $c = d = 0$.
(1) donne alors $2a = 0$; donc $a = 0 = b = c = d = e$. Fini.

23.5 Somme directe. Supplémentaires et dimension finie [énoncés]

1. Soit E de dimension finie.
Montrer l'équivalence : $\boxed{E = E_1 \oplus E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\overrightarrow{0}\} \\ dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2). \end{cases}}$
Non corrigé ici mais essentiel.

2. Soit $E_1, ...E_p$ sous e.v. de dim finie. Alors $E_1 + ... + E_p$ directe $\Leftrightarrow dim(\sum E_k) = \sum dim(E_k)$.

3. Soit $E = E_1 \oplus E_2$, $dim(E_1)$ finie ; $\overrightarrow{u} \in E_2$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. On pose $E_1' = Vect(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_i}$ base de $E_1\}$.
Montrer que c'est un autre supplémentaire de E_2, distinct de E_1.

4. D'une famille de n vecteurs de rang r, on extrait une sous famille de n' vecteurs de rang r'.
Montrer $n - r \geqslant n' - r'$.
[Car la famille de n' vecteurs peut être complétée par $n - n'$ vecteurs de rang $r - r'$]

5. Montrer, avec des sous e.v. que : $(E_1 + E_2) \cap E_3 \supset (E_1 \cap E_3) + (E_2 \cap E_3)$,
$(E_1 \cap E_2) + E_3 \subset (E_1 + E_3) \cap (E_2 + E_3)$ avec inclusions strictes possibles.
Déduire que $dim(E_1 + E_2 + E_3) = d_1 + d_2 + d_3 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + d_{123}$ est parfois faux.

24 Applications linéaires

24.1 En dim. finie, une équivalence importante pour $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer **En dim. finie** : $Ker(f)$ et $Im(f)$ supplémentaires $\Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. **Corrigé.** Déjà bien revoir : Soit E de dimension finie ; alors on a l'équivalence **23.5** :

$$\textbf{(Si } dim(E) \textbf{ finie)} \qquad E = E_1 \oplus E_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\overrightarrow{0}\} \\ dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2). \end{cases}$$

Avec ceci, il suffit d'invoquer le Théorème du rang et c'est fini.

24.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$: noyau et image parfois non en somme directe

1. Montrer en dimension quelconque : $fof = O \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(f)$.
2. Si E de dim. finie sur $\mathbb{K}$, montrer que : $Ker(f) = Im(f) \Leftrightarrow (f^2 = O$ et $n = 2.rg(f))$.

Corrigé facile :

1) 1ère équivalence : $fof = O \Leftrightarrow fof(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0},\ \forall_E \overrightarrow{u} \Leftrightarrow f[f(\overrightarrow{u})] = \overrightarrow{0},\ \forall_E \overrightarrow{u} \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(f)$
vu que les $f(\overrightarrow{u})$ décrivent $Im(f)$ en entier.

2) $\Rightarrow$ Ayant $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$ [Th. du rang] : $dim(E) = 2.dim(Im(f)) = 2.rg(f)$.
De plus $\overrightarrow{u} \in E \Longrightarrow f(\overrightarrow{u}) \in Im(f) \underset{ici}{\subset} Ker(f)$, donc $f(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$ ou $fof = O$.
$\Leftarrow$ Puisque $f[f(\overrightarrow{u})] = \overrightarrow{0}$, celà veut dire que $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$, ceci $\forall \overrightarrow{u}$: $Im(f) \subset Ker(f)$.
Puis : le Théorème du rang et l'égalité (par hypothèse) $dim(E) = 2.dim(Im(f))$ donnent
[avec $dim(E)$ finie] $dim(Ker(f) = dim(Im(f))$: Egalité des sous espaces $Im(f)$, $Ker(f)$.

24.3 Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$, sur la Dérivation discrète (et cf. 25.7)

1. Vérifier que $f : P(x) \mapsto P(x+1)$ est un endomorphisme ; et aussi $\Delta = f - Id$.
2. Noyau, image et rang de Δ ? (Voir que $d = degre(P) \geqslant 1 \Rightarrow degre(\Delta(P)) = d - 1$.)
3. Vérifier que $\Delta^3 = O$ et inverse de $Id - \Delta$? puis de $Id + \Delta = f$ avec $P(x) \mapsto P(x-1)$.

Corrigé :

1. "endo" est clair car $d^0(P(x+1)) \leqslant 2$. Deux démonstration de "morphisme", ou de la linéarité :
   (a) Profitons de la dim. finie et prenons la base usuelle $(1, x, x^2)$: $P(x) = a + bx + cx^2$, a pour image $P(x+1) = a + b(x+1) + c(x^2 + 2x + 1) = (a + b + c) + (b + 2c)x + cx^2$ donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix}$. Cette écriture $\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ prouve la linéarité et donne même la matrice en base indiquée.
   (b) Donnons une autre démonstration sans tenir compte de la dimension (finie ici) :
   On a $f(\lambda.P) = (\lambda.P)(x+1) = \lambda.P(x+1) = \lambda.f(P)$; et
   $f(P+Q) = (P+Q)(x+1) = P(x+1) + Q(x+1) = f(P) + f(Q)$: fini. Et $\Delta = f - Id$ est lui-même un endomorphisme, par différence, de matrice dans $(1, x, x^2)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Noyau, Image, rang de Δ. Déjà $\Delta : P(x) \mapsto P(x+1) - P(x) = \Delta(P)(x) = (b+c) + 2cx$ et
   $\Delta(P) = O \Leftrightarrow b + c = 2c = 0 \Leftrightarrow P(x) = a$. $\boxed{Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[x]}$ sous e.v. des polynômes constants.

Donc $dim(Ker(\Delta)) = 1$, $rg(\Delta) = 3 - 1 = 2$ par le théorème du rang, soit $\underline{dim(Im(\Delta)) = 2.}$
Or : $P = x$ a pour image $\Delta(P) = 1$, $P = x^2$ a pour image $\Delta(P) = 1 + 2x$, $Im(\Delta) \supset Vect(1, 1+2x)$ $= Vect(1, 2x) = Vect(1, x)$; l'égalité des dimensions (finies) donne $\boxed{Im(\Delta) = Vect(1, x) = \mathbb{R}_1[x].}$

3. Pour $\Delta^3 = 0$, il suffit de voir que l'image de la base $(1, x, x^2)$ par Δ^3 est le polynôme nul [laissé]. $\boxed{Id - \Delta^3 = (Id - \Delta)(Id + \Delta + \Delta^2) = (Id + \Delta + \Delta^2)(Id - \Delta)}$ montre que $Id - \Delta$ est inversible d'inverse $Id + \Delta + \Delta^2$. $\underline{\text{Idem pour } Id + \Delta = f \text{ si on veut mais on a mieux ici}}$: f a pour inverse $P(x) \mapsto P(x-1)$; d'où l'inverse $\underline{\text{de la matrice du triangle de Pascal de 1.(a)}}$ aisément !

24.4 Avec le cours bien connu sur les projecteurs [corrigé]

1. Montrer que ($fog = f$ et $gof = g$) $\Leftrightarrow f, g$ projecteurs de même noyau.
[pour la réciproque, $g(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} \in Ker(g) = Ker(f)$].
2. Montrer que ($fog = g$ et $gof = f$) $\Leftrightarrow f, g$ projecteurs de même image.
3. ▪ Puis (*) Si p, q proj., $p + q$ proj. $\Leftrightarrow$ $poq = qop = O$.
▪ Si $qop = O, r = p + q - poq$ proj. et $Ker(r) = Kerp \cap Kerq$; $Im(r) = Imp \oplus Imq$.
▪ $p - q$ proj. $\Leftrightarrow poq = qop = q$; alors $Ker(p - q) = Ker(p) \oplus Im(q)$,$Im(p - q) = Im(p) \cap Ker(q)$.
▪ Si $poq = qop$, poq projecteur et $Im(pq) = Im(p) \cap Im(q)$, $Ker(pq) = Ker(p) + Ker(q)$ ...

Corrigé de 1. Déjà, deux rappels : [le 2ième pour 2, qui est analogue]
$\boxed{[f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } fof = f] \Leftrightarrow f \text{ projection sur } Ker(f - Id)//Ker(f) \text{ qui sont supplémentaires.}}$
$\boxed{\text{Pour un projecteur, l'image est aussi le sous e.v. des vecteurs invariants } Im(p) = Ker(p - Id).}$
$\Rightarrow$ On a $fof = (fog)of = fo(gof) = fog = f$; et f lin. : f projecteur. De même pour g.
Même noyau : Si $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$, ayant $gof = g$, il vient $g(\overrightarrow{u}) = g[f(\overrightarrow{u})] = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{u} \in Ker(g)$ ou $Ker(f) \subset Ker(g)$ et $\underline{\text{par symétrie de l'hypothèse}}$ $Ker(g) \subset Ker(f)$ aussi ; donc égalité.
$\Leftarrow$ Déjà assurons nous que $g(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} \in Ker(g)$: $g[g(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}] = \overrightarrow{0}$ car $gog = g$! Puis $Ker(g) = Ker(f)$ donne $f(g(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$, ceci $\forall \overrightarrow{x} \in E$. Ou $fog(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})$ ou bien $fog = f$! Et $\underline{\text{par symétrie de l'hypothèse}}$: $gof = g$.

24.5 Rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), E, F$ de dimensions finies ; g...

1. Montrer : $rg(f) \leqslant dim(E)$; $rg(f) \leqslant dim(F)$; $rg(gof) \leqslant min[rg(f), rg(g)]$.
2. Montrer : $rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$; puis $\mid rg(f) - rg(g) \mid \leqslant rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$. Montrer : $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = k.f$ (si $k \neq 0$, $\frac{1}{k}f$ projecteur).

$\underline{\text{Corrigé}}$: (1) $rg(f) = dim(E) - dim(Ker(f)) \leqslant dim(E)$. $Im(f) \subset F \Rightarrow rg(f) \leqslant dim(F)$.
Pour gof, donc g va de F dans $G_{e.v.}$ ici. $f(E) \subset F \Rightarrow g[f(E)] \subset g(F)$: $\underline{rg(gof) \leqslant rg(g)}$. Enfin le th. du rang appliqué à $g_{/f(E)}$ donne $dim[f(E)] = dim[Ker(g) \cap f(E)] + rg(gof)$: $\underline{rg(gof) \leqslant rg(f)}$.

(2) Déjà $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ est clair. [Par contre $\underline{\text{l'inclusion peut être stricte}}$: $f = Id = -g$, $(f + g)(E) = \{\overrightarrow{0}\}$ tandis que $f(E) = E = g(E)$ car f, g bijectifs $E \to E$; d'où $f(E) + g(E) = E$ ici.]
Donc : $rg(f + g) \leqslant dim[f(E) + g(E)]$. Par propriété : $dim[f(E) + g(E)] \leqslant dim[f(E)] + dim[g(E)]$ $= rg(f) + rg(g)$. La fin, classique, est à voir : $f = (f + g) + (-g) \Rightarrow rg(f) \leqslant rg(f + g) + rg(-g)$ $= rg(f + g) + rg(g)$; d'où $rg(f) - rg(g) \leqslant rg(f + g)$ et permutter f et g. (3) laissé **25.5**.

24.6 Sur le rang d'applications linéaires : quelques ajouts (...)

1. Soit E, F de dimension finie. Montrer que sont équivalents :
   a) $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$
   b) $Im(f+g) = Im(f) \oplus Im(g)$
   c) $Ker(f+g) = Ker(f) \cap Ker(g)$ et $E = Ker(f) + Ker(g)$.
2. Soit E et F quelconques. Montrer que $gof(E) = g(F) \Leftrightarrow F = Im(g) + Ker(f)$.
   Et que $f(E)$ isomorphe à $g[f(E)] \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}_F\}$.

24.7 Soit E un e.v. de dim. finie : n. Montrer les équivalences

(*) $\quad Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Notes initiales . Hypothèse "dim finie" ? En fait, indispensable : $P \mapsto$ x.P dans $\mathbb{R}$[x] ou $P \mapsto P'$.

. Bien sûr éviter la FAUTE : $Ker(f^2) = Ker(f) \Rightarrow f^2 = f$. Contre exemple : $f = 2.Id$ dans $\mathbb{R}^2$.

. Un cas où des affirmations n'ont pas lieu [donc aucune n'a lieu, dit l'exercice] : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $f \neq O$ (donc $Ker(f) \neq E$) et $f^2 = O$ (d'où $Ker(f^2) = E$). [f nilpotent d'indice 2].

. L'inclusion $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ est toujours vraie. Donc $Ker(f) = Ker(f^2)$ dit $Ker(f^2) \subset Ker(f)$.

. Idem : $Im(f^2) \subset Im(f)$ a toujours lieu. Donc $Im(f) = Im(f^2)$ dit, en fait : $Im(f) \subset Im(f^2)$.

Corrigé en dimension quelconque quand c'est possible :

1. $Ker(f) = Ker(f^2) \Rightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$:
   Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f) \cap Im(f) : f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{t})$ donc $\overrightarrow{t} \in Ker(f^2) = Ker(f)$...
2. $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\} \Rightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$:
   Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f^2)$; il suffit de voir (comme dit au dessus) que $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$ et ce cera fini.
   Posons $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$; on a $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{v} \in Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$; donc $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$.
3. $Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow E = Ker(f) + Im(f)$:
   Soit $\overrightarrow{u} \in E : f(\overrightarrow{u}) = fof(\overrightarrow{v})$ pour un certain $\overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{v})] + f(\overrightarrow{v})$.
4. $E = Ker(f) + Im(f) \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$. Il suffit de voir $Im(f) \subset Im(f^2)$:
   Soit $f(\overrightarrow{u}) \in Im(f) : \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in Ker(f) + Im(f)$: Donc $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{w}) \in Im(fof)$.
5. Enfin, en dimension finie (seulement), $E = Ker(f) + Im(f) \Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
   (Ceci équivalent à "sous espaces supplémentaires", grâce au Théorème du rang !)

24.8 Quaternions de Hamilton et une note sur $\mathbb{GA} = E \rtimes \mathbb{GL}(E)$

1. (*) Soit $\mathbb{H} = \{M : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha = a+ib, \beta = c+id \in \mathbb{C}\}$, $1 = I_4, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$ e.v. de dim 4, et un corps non commutatif ($M \neq O$, $M^{-1} = 1/det(M).M^*$).
   (b) Vérifier que l'équation $X^2 = -1$ possède une infinité de solutions dans $\mathbb{H} = Vect(1, I, J, K)$.
   (c) Et aussi que $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un groupe non abélien à 8 éléments pour la "loi" x.
2. (*) Un exemple de produit **"semi-direct"** : le groupe affine :
   On rappelle que f est affine associée à $\overrightarrow{f}$ linéaire si $f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$, $\forall O, M$ ou $\forall M$.
   Pour $f\ [\overrightarrow{OO_f}, \overrightarrow{f}]$, $g\ [\overrightarrow{OO_g}, \overrightarrow{g}]$, affines $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, on a donc $gof\ [\overrightarrow{OO_g} + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OO_f})\ , \overrightarrow{g}o\overrightarrow{f}]$. D'où, avec de plus des bijections, on a alors le groupe, produit semi-direct : $\mathbb{GA} = E \rtimes \mathbb{GL}(E)$.
   En effet, plus généralement $G \rtimes_\varphi G'$ concerne $(g, g') \,.\, (k, k') = (g.\varphi_{g'}(k),\ g'.k')$: **loi de groupe si on a une action de G' sur G, $(g', g) \mapsto \varphi_{g'}(g)$ telle que** : $\varphi(\epsilon) = Id_G,\ \varphi(g'.k') = \varphi(g')o\varphi(k')$ en notant $\varphi(g') = \varphi_{g'} \in Aut(G)$, automorphisme de G : $\varphi_{g'}(g.k) = \varphi_{g'}(g).\varphi_{g'}(k)$. On observe ici que $g \simeq (g, \epsilon)$, $g' \simeq (e, g')$ et G distingué dans $G \rtimes_\varphi G'$. Dans l'exemple $\varphi_{\overrightarrow{g}} = \overrightarrow{g}$.
   (Si H et K sous-gr de G avec : $HK = G$, $H \cap K = 1$, $H \lhd G$, $H \rtimes K$ possible : $\varphi_k(h') = k.h'.k^{-1}$.)

25 Calcul matriciel

25.1 Utilité du calcul des puissances d'une matrice.

1. Soit $(u_n),(v_n)$ $\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$, $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Trouver A : $X_{n+1}=A.X_n$; d'où $X_n=A^n.X_0$!
2. On cherche A^n par changement de base ici. Supposons $A=Matr[f,(\vec{\imath},\vec{\jmath})]$, f endomorphisme. Calculer $f(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ et $f(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Déduire : $\exists P$ inv. / $P^{-1}.AP=D$, D diagonale. Conclure.

Corrigé : (a) $X_{n+1}=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A.X_n$; $\boxed{A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$. $X_n=A.X_{n-1}=A.A.X_{n-2}=...$ $=A^n.X_0$ ($A^0=I_2$ ici même si A non inversible ; mais elle l'est !) Ainsi, tout revient à calculer A^n.

(b) $f(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})$? matrices $A.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow f(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})=4.(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})$; $f(\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

Puis $(\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath},\vec{v}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ est une famille libre de 2 vecteurs [non colinéaires] et ceci en dim. 2, donc une autre base. La matrice du même endomorphisme f, mais en base $(\vec{u},\vec{v})$, est $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{matrix}$ (sous : $f(\vec{u})\ f(\vec{v})$). Si $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\end{matrix}$ (sous : $\vec{u}\ \ \vec{v}$), matrice de changement de bases, $\boxed{P^{-1}.A.P=D}$ [Th.] ; D^n facile ; $A=P.D.P^{-1}$; $A^2=P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1}=P.D^2.P^{-1}$ ... $\boxed{A^n=P.D^n.P^{-1}}$ $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finir !

25.2 D'autres méthodes pour le calcul de M^n (...)

Soit $A=\begin{pmatrix} b & b-a \\ -a-b & -b \end{pmatrix}$; $T=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^n, $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer T^2 ; T^3 ; puis T^n, $n\in\mathbb{N}^*$.
2. En écrivant $B=I_3+N$ [Binôme de Newton, N nilpotente commutant avec I], calculer B^{100}.
3. Calculer J^2 en fonction de $I=I_3$ et J ; en déduire que J est inversible et préciser J^{-1}. Préciser le reste de la division de X^n par X^2-X-2. En déduire J^n. Cas $n\in\mathbb{Z}$, ici ?
4. Montrer que $3.C^n=a_n.C+b_n.C^2$ et préciser a_n et b_n.

Corrigé : (a) Pour A : $A^2=...=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=a^2.I_2$: c'est la clé ! Donc :

$A^{202}=(A^2)^{101}=(a^2.I)^{101}=a^{202}.I$, tandis que $A^{203}=A^{202}.A=a^{202}.I.A=a^{202}.A$. Etc.

Pour T : essais (T^2, T^3...) $T^n=\begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, $c_n=c(a^{n-1}+a^{n-2}.b+...+b^{n-1})$. Récurrence ...

(b) Pour B : Ici, $B=I_3+N$, $N=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente et commute avec I : $N^3=O$. Binôme !

Par exemple $B^{100}=(I_3+N)^{100}=I^{100}+\binom{100}{1}.I^{99}.N+\binom{100}{2}.I^{98}.N^2=I+100.N+50.99.N^2$ ...

(c) Pour J : Méthode du polynôme annulateur, guidée par l'énoncé. Déjà $J^2=2I+J$ (à voir) !

▪ D'où $J(J-I)=2I$ ou $J.\frac{1}{2}(J-I)=I$. Ainsi J, carrée, est inversible à droite donc par **Th.** J est inversible, $J^{-1}=\frac{1}{2}(J-I)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. J annule le polynôme x²-x-2 ($J^2-J-2.I=O$).

▪ Faisons ici une division $\boxed{x^n=[x^2-x-2].Q(x)+a.x+b}$ car degré(Reste) $\leqslant 1$: exercice essentiel. Prenons 2 valeurs de x pour trouver 2 inconnues a,b : les racines de x^2-x-2, qui sont -1 et 2.

Alors $\begin{cases} (-1)^n=-a+b \\ 2^n=2.a+b \end{cases}$ et Reste $=\frac{2^n-(-1)^n}{3}.x+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$.

. Idée : substituer J à x et I à 1 $\Rightarrow J^n = O + a.J + b.I = \frac{1}{3}[(2^n - (-1)^n)J + (2^n + 2(-1)^n)I]$.

– Le peut-on ? Un exemple-test : dans x^2=(x-1)(x+1)+1, si on met une matrice M, a-t-on : $(M-I)(M+I)+I = ... \ M^2$? ... OUI ! Et vérifions J^n, $n=1$, $n=0$, $n=-1$ ...

– Remarques : 1) L'expression de J^n doit être valable ici, même si $n \in \mathbb{Z}$ ...

2) Si M non inversible, il faut être prudent avec M^0.

(d) La dernière question est assez facile ...

25.3 En dim. 2, f end. : $Im(f) = Ker(f) = Vect((1,2))$

– Solution. L'énoncé dit $\overrightarrow{u}(1,2)$: donc on a une base. Donner f par sa matrice dans cette base.

– Vu que $\overrightarrow{u}$ base de $Im(f)$ forcément : $f(\overrightarrow{\imath}) = a.\overrightarrow{u}$, $f(\overrightarrow{\jmath}) = b.\overrightarrow{u}$. A ce stade $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$.

– Maintenant $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $a = -2b$. Donc $A = b.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, infinité de solutions.

25.4 Trois questions concernant la trace [corrigé]

1. Prouver que pour un projecteur, en dimension finie, $Tr(p) = rg(p)$.
2. Montrer qu'on ne peut pas trouver deux matrices A, B telles que $AB - BA = I_n$.
3. Soit $A_{n,p}, B_{p,n}$. Montrer que : AB projecteur de rang $p \Rightarrow BA = I_p$.

Solution (a) : Soit p un projecteur en dim. finie [pour parler de Trace] et une base adaptée de $E = Ker(p - Id) \oplus Ker(p)$, savoir $(\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_r)$ base de $Ker(p - Id)$ qui est aussi $Im(p)$ [donc r : nombre de vecteurs = ici rg(p)] réunie à $(\overrightarrow{v}_{r+1}, ... \overrightarrow{v}_n)$ base de $Ker(p)$: $A = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.
$Tr(A) = r$ et on sait que la trace ne dépend pas de la base : $r = Tr(A) = Tr(p) = rg(p)$.

(b) : $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ par Théorème ; $\neq Tr(I_n) = n$. Fini.
Remarque : Mais en dim. infinie, $fog - gof = Id$ est possible : $g(P) = x.P, f(P) = P'$ dans $\mathbb{R}[x]$!

(c) Avec $rg(AB) \leqslant inf(rg(A), rg(B))$, forcément $rg(B) = p$. Puis $BABAB = BAB$ donne (B surj.) $BABA = BA$: BA projection. Alors : $rg(BA) = Tr(BA) = Tr(AB) = p$ et donc $BA = I_p$.

25.5 Si $A \in \mathcal{M}_n$ de rang 1 : $\exists k$, $A^2 = kA$ et $k = Tr(A)$

– Solution. Ici, il est bon d'avoir en tête des matrices de rang 1, c'est-à-dire le sous e.v. engendré par les Vecteurs Colonnes est de dimension 1 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Que \\ des\ 1 \end{pmatrix}$ ...

– Même en dim. quelconque : $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 1 $\Rightarrow fof = k.f$ pour un certain k fixe !
Car si $\overrightarrow{e}_1$ base de $Im(f)$, $f(\overrightarrow{x}) = k_x.\overrightarrow{e}_1$, $fof(\overrightarrow{x}) = k_x.k_{e_1}.\overrightarrow{e}_1 = k_{e_1}.f(\overrightarrow{x})$.

– Ici $dim(Imf) = 1$ de base $\overrightarrow{e}_1$, donc $dim(Ker(f)) = n - 1$ par le Théorème du rang. 2 cas :
soit $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, **alors supplémentaires ; soit** $Im(f) \subset Ker(f)$, $fof = O$, $k = 0$!

1. Si supplémentaires, soit $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$ une base de $Ker(f)$: $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2 ... \overrightarrow{e}_n$ base de E et la matrice est $A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & & \end{pmatrix}$; cas fini : $(A')^2 = \alpha.A'$, $\alpha = k = Tr(A) \neq 0$. ($p = \frac{1}{k}f$ proj. de rang 1.)
2. Quand $Im(f) \subset Ker(f)$, $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ... \overrightarrow{e}_{n-1}$ base de $Ker(f) \supset Im(f)$ **complétée** par un vecteur $\overrightarrow{v}$ pour avoir une base de E. $A' = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & \beta \\ puis & que & des & 0 \\ ... & & & \\ 0 & de & partout & 0 \end{pmatrix}$. Ici aussi : $k = Tr(A)$ $(= 0)$.

25.6 Dans $\mathcal{M}_{2,2}$, deux sous e.v. supplémentaires [corrigé]

Montrer que les sous e.v. des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires. Généraliser.

Solution. Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les **ensembles** des matrices symétriques et antisymétriques.

- Déjà $\mathcal{M}_{2,2} = Vect(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})$ e.v. (connu) sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.2=4.
- $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})$ est un sous e.v. de dimension 3 car les 3 matrices indiquées sont libres. (Rappelons que $M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow {}^tM = M$).
- Ensemble $\mathcal{A}$ (non vu pour $\mathcal{S}$) : $M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $a=0, d=0, c=-b$ donc $\mathcal{A} = Vect(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})$ ainsi $\mathcal{A}$ est un sous e.v. de dimension 1.
- Les deux sous e.v. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont en somme directe car si on a ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ alors $M = O$. Donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{O\}$ et $dim(\mathcal{S} \oplus \mathcal{A}) = 3+1 = 4$. D'où $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_{2,2}$ (par égalité des dimensions).

Autre solution et généralisation pour 'sous e.v. supplémentaires' : la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique ? Déjà, $\mathcal{M}_{3,3}$ est de dimension 9 et $f : M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme (clair) de $\mathcal{M}_{3,3}$ vérifiant $fof = Id$. Par Théorème, f est la symétrie vectorielle / $Ker(f-Id)$ // $Ker(f+Id)$ et ces 2 sous e.v. sont de plus supplémentaires !

L'un est $Ker(f-Id) = \mathcal{S}$ (on exprime exactement que ${}^tM = M$) l'autre : $Ker(f+Id) = \mathcal{A}$. Dimensions : les matrices sym. sont de la forme $\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$ sous e. v. de dimension 3+2+1 = 6. $\mathcal{A}$ de dimension 2+1=3. (6+3=9, correct) et : $M = S + A$, ${}^tM = S - A$: $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ [// *ch*, *sh*].

(Dans le cas général, idem : $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_{n,n}$ avec dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ de somme n^2.)

25.7 Dérivées intermédiaires bornées si les extrêmes le sont

Soit f 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$: f et $f"$ bornées, $M_0 = sup\,|\,f\,|$, $M_2 = sup\,|\,f"\,|$. Si $h > 0$, on rappelle l'égalité (T-L) : $\exists c_1 \in [x, x+h]$ avec $f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f"(c_1)$ notée (1)

Et : $\exists c_2 \in [x, x-h]$ avec $f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f"(c_2)$ notée (2)

1. Avec (1) − (2) et l'inégalité triangulaire, montrer que $2h.\,|\,f'(x)\,| \leqslant 2M_0 + h^2.M_2$
2. Minimum de $\varphi(h) = \frac{2M_0 + h^2 M_2}{2h}$, $h > 0$? En déduire $|\,f'\,|$ bornée : $sup\,|\,f'\,| = M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
3. Cas $n \geqslant 2$. Soit f de classe C^n $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, prouvons que $f^{(k)}$ aussi.

   On peut utiliser : $|\,a\,| - |\,b\,| \leqslant |\,a-b\,| \leqslant |\,a\,| + |\,b\,|$ **et** $|\,a+b\,| \leqslant |\,a\,| + |\,b\,|$.

   Sol. Traitons le cas $n = 4$. On pose $\begin{pmatrix}F_1(x)\\F_2(x)\\F_3(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_1&h_1^2/2!&h_1^3/3!\\h_2&h_2^2/2!&h_2^3/3!\\h_3&h_3^2/2!&h_3^3/3!\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f'(x)\\f"(x)\\f^{(3)}(x)\end{pmatrix}$.

   (a) Si h_1, h_2, h_3 sont non nuls distints, montrer que $H_{3,3}$ est inversible avec $det(H)$.

   (b) Et que l'égalité de (T-L) pour f de classe C^4 sur $[x, x+h_k]$ donne :
   $\exists c_k \in [x, x+h_k] : f(x+h_k) - f(x) - h_k f'(x) - h_k^2 f"(x)/2! - h_k^3 f^{(3)}(x)/3! = \frac{h_k^4}{4!} f^{(4)}(c_k)$.
   Déduire : $|\,F_k(x)\,| - |\,f(x+h_k) - f(x)\,| \leqslant |\,f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)\,| \leqslant \frac{h_k^4}{4!}.M_4$.
   Puis que : $|\,F_k(x)\,| \leqslant |\,f(x+h_k) - f(x)\,| + \frac{h_k^4}{4!}.M_4 \leqslant 2.M_0 + \frac{h_k^4}{4!}.M_4$.

   (c) Conclure sans préciser un majorant. [(*) $M_k \leqslant 2^{k.(n-k)/2}.M_0^{1-k/n}.M_n^{k/n}$ et cf. **34.**12.]

25.8 Un problème sur la dérivation discrète (cf. 24.3)

Soit : $P(X) \xrightarrow{T} P(X+1) = T(P)(X)$ et $\Delta = T - Id : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. Note.[10]

1. Ici $E = \mathbb{R}_2[X]$. Si $P = a + bX + cX^2$, calculer $P(X+1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et montrer : $T \in \mathcal{L}(E)$.
   Matrice A ? Montrer que T est inversible et $T^{-1} : P(X) \mapsto P(X-1)$. En déduire ${}^tA$, $({}^tA)^{-1}$.
2. **Ici** $E = \mathbb{R}[X]$. T endomorphisme de E est supposé acquis. On a $T = Id + \Delta$ ou $\Delta = T - Id$.
   (a) Justifier que $T^p : P(X) \mapsto P(X+p)$, $p \in \mathbb{N}$ et $P(X+p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta^k(P)$. Cas $p = 2$?
   (b) Et aussi que : $\Delta^p(P)(X) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} .(-1)^{p-k} .P(X+k)$. Cas $\Delta^2(P)(X)$ et $\Delta^3(P)(X)$?
   (c) Avec $\Delta^n(X^n) = n!$, puis $k < n \Rightarrow \Delta^n(X^k) = O$, déduire : $n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} .(-1)^{n-j}(x+j)^n$,
   $n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} .(-1)^{n-j} j^n$ $(*)$ et $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} .(-1)^{n-j}(x+j)^k$, $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} .(-1)^{n-j} j^k$ $(**)$.
   (d) Soit f $C^\infty(\mathbb{R})$; n fixé. Avec $f(a+j.h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n)$ et $(*, **)$, déduire que :
   $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} .f(a+j.h) = h^n .f^{(n)}(a) + o(h^n)$ et : $\frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} .f(a+j.h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f^{(n)}(a)$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, soit $N_n(X) = X(X-1)...(X-n+1)$, de degré n, $(N_0 = 1)$: Polynômes de Newton.
   (a) Vérifier que, si $H_n(X) = \frac{1}{n!} . \prod_{k=0}^{n-1} (X-k)$: $\Delta H_0 = O$, $\Delta(H_{n+1}) = H_n$ [cf. $\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)' = \frac{x^n}{n!}$]
   (b) On suppose : degré$(P) \leqslant n$, $n \geqslant 0$. On considère a fixé. On pose $Q(X) = P(a+X)$.
   Montrer que $\exists \alpha_k : P(a+X) = Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k .H_k(X)$ (car : $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ libre dans $\mathbb{R}_n[X]$)
   (c) Justifier que $\Delta^i(Q)(0) = \alpha_i$. Et que $P(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k(P)(a)}{k!} .N_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(a) H_k(X)$.
   (d) Dans la formule **2.** (a), si on remplace X par a, qu'obtient-on ? Commentaire ?
   (e) On rappelle : $H_k(X) = \frac{N_k(X)}{k!}$; $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) .H_k(X)$; $\Delta^p(P)(0) = (-1)^p . \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k .P(k)$.
   Montrer que : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$, avec
   i. P prend des valeurs entières quand la variable est dans $\mathbb{Z}$
   ii. P prend des valeurs entières quand la variable est dans $\{0, 1, ..., p\}$
   iii. Les coordonnées de P dans la base H_k sont des entiers
   iv. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.
4. Formule d'inversion de Pascal et utilisations : on reprend la question **1**), mais dans $E = \mathbb{R}_n[X]$.
   Préciser A_{n+1} avec les images de la base : $(1, X, ..., X^n)$ et son inverse A_{n+1}^{-1}. Note[11]

[10] On note T comme translation mais translation sur l'indéterminée. T est linéaire !

[11] Lecture. Voici, en compléments difficiles, deux utilisations classiques de A^{-1} :

(a) Si $Card(X) = p \geqslant 1$, $Card(Y) = n$, on sait qu'il y a n^p applications de X dans Y.
Si $S_{p,k}$ désigne le nombre de surjections de X dans un ensemble de Cardinal k, on déduit :
$n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} .S_{p,k}$. Et donc par inversion de la matrice de Pascal : $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} . \binom{n}{k} .k^p$.

(b) Si $Card(X) = n$, on appelle d_n le nombre de dérangements de X, à savoir de permutation sans aucun élément invariant.
Par convention, $d_0 = 1$; et comme exemple, $d_3 = 2$ (Sur les 6 permutations, 2 seulement sont des dérangements).
On obtient, par comptage : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .d_k$. Donc par inversion, on arrive à : $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$.

25.9 E.v. et Anneau (algèbre) de matrices [corrigé]

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices du type $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer U^2, V^2, UV, VU ; structure de $(\mathcal{A}, +, .)$?

▪ Sol. Ecrire naturellement : $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: reconnaitre U et V !
Donc $\mathcal{A} = \{a.U + b.V\} = Vect(U, V)$: sous e.v. et ... $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}$=2.

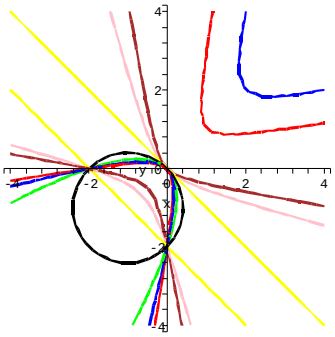
▪ Ensuite pour $(\mathcal{A}, +, .)$: comprendre que la 2ème loi est ici la multiplication des matrices de $\mathcal{A}$ (et non la loi externe connue, vu que $\mathcal{A}$ e.v.). Calculs : $U^2 = 2U$, $V^2 = 2V$, $UV = O$, $VU = O$; donc $(aU + bV)(a'U + b'V) = aa'U^2 + bb'V^2 + O + O = 2(aa'U + bb'V)$: loi interne dans $\mathcal{A}$.
Puis produit commutatif vu le calcul, ass. (toujours), neutre $a + b = 1, a - b = 0$ possible : donc I_2 dans $\mathcal{A}$; et distributivité de ./+ : toujours vraie. Ainsi $(\mathcal{A}, +, .)$: anneau commutatif ; non intègre car $U \neq O$, $V \neq O$, mais $U.V = O$. [$(\mathcal{A}, +, ., .)$: algèbre commutative, non intègre, de dim. 2.]

25.10 Question au sujet des matrices à trace nulle ($\neq$ 48.4)

1. (*) Montrer que si $\forall \overrightarrow{x}$, $f(\overrightarrow{x}) = k_{\overrightarrow{x}}.\overrightarrow{x}$ alors $\exists k : f = k.Id$.
2. Déduire, si $Tr(A) = 0$, que A semblable à A' de diagonale nulle (avec q.1 et récurrence).
3. Si $D = diag(d_1, ..., d_n)$, d_k distincts et $f : M \mapsto MD - DM$, montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $Ker(f) = \{\text{Matrices diagonales}\}$ et $Im(f) = \{\text{Matrices à diagonale nulle}\}$.
Conclure : ▪ $Tr(A) = 0 \Leftrightarrow \exists R, S : A = RS - SR$ (déjà pour A' puis changement de base).
▪ Si ψ est une forme linéaire avec $\psi(AB) = \psi(BA)$, alors $\exists \lambda : \psi = \lambda.Tr$ (dim $Im(\psi) \leqslant 1$).

25.11 Matrice symétrique, conique $x^2 + 2kxy + y^2 + 2x + 2y = 0$

1. Une courbe de degré 2 est une conique, parfois dégénérée. La forme quadratique a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ symétrique : diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec changement de base o.n. si on veut : $P^{-1} = {}^t P$.
2. Avec $C_0 \cap C_1$: on trouve $O(0,0)$ $A(-2,0)$, $B(0,-2)$; puis toutes les coniques contiennent O, A, B.
3. Avec $M = P.\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.P^{-1}$, le type de la conique est : si $\lambda.\mu = det(M) = 1 - k^2 > 0$, type ellipse ; si $\lambda.\mu = det(M) = 1 - k^2 < 0$, type hyperbole ; si $\lambda.\mu = det(M) = 1 - k^2 = 0$, type parabole.
Le cas c) :
$\boxed{k = 1 :}$ $x^2 + 2.xy + y^2 + 2x + 2y = 0$. Or $X = P.X'$ ou $X' = P^{-1}.X$. Posons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. P^{-1} : rotation d'angle $\frac{-\pi}{4}$; P d'angle $\frac{\pi}{4}$; donc $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{I}) = \frac{\pi}{4}$.
L'équation est : $X^2 + \sqrt{2}X = 0$, 2 droites parallèles $X = 0$, $X = -\sqrt{2}$: (A, B) normalement.
$\boxed{k = -1 :}$ $x^2 - 2.xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ ou $(x - y)^2 + 2(x + y) = 0$. Même changement de base (pas d'origine !) $Y^2 + \sqrt{2}.X = 0$: vraie parabole de sommet O (en vert, contient A, B).



Dessin : Lieu des centres laissé ...

26 Déterminants 2x2 ou 3x3

26.1 Exercices de cours sur les déterminants dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1. Rappeler la valeur de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ quand elle existe.
2. Montrer les formules "de Cramer" pour un système linéaire 3x3 inversible.
3. Une réciproque non vraie (assez facile) :
   (a) On sait que A semblable à A' (id est $A' = P^{-1}AP$) $\Rightarrow$ $Tr(A') = Tr(A)$, $det(A') = det(A)$ et $rg(A') = rg(A)$. [Et même : $rg(Q^{-1}AP) = rg(A)$, pour P, Q inversibles].
   (b) Ces 3 égalités ensemble n'entrainent pas la réciproque. $A = I_2$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non semblables.
   1ère façon : l'endomorphisme Id a pour matrice I_2 dans toute base ; jamais de matrice A'.
   2ème façon : $P.I_2.P^{-1} = I_2.P.P^{-1} = I_2 \neq A'$ car I_2 commute avec toute matrice.
4. Avec le produit mixte et un endomorphisme : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Justifier que :
   $$\exists \lambda : [f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)] = \lambda.det_B(x, y, z) \text{ et } \lambda = trace(f).$$
5. Calculer le déterminant 2x2 "de Cauchy" : $\left| \frac{1}{a_i + b_j} \right|$, (*) puis idem 3x3, (**) puis nxn.
6. (a) Rappeler la valeur (et la définition !) du déterminant de Van Der Monde.
   (b) On prend le déterminant n, n [commencer par $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$] $Dn = det(V_n)$ où $V_n = (a_{j,k}) = \omega^{(j-1).(k-1)}$, $\omega = e^{i.2.\pi/n}$. Calculer V^2 puis V^4. En déduire $\mid D_n \mid = n^{n/2}$.
   (c) Avec un dét. de Van Der Monde, déduire que $Arg(D_n) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} Arg \frac{\omega^k - \omega^j}{\omega}$.
   (d) (*) Avec l'égalité (à voir) $\omega^k - \omega^j = e^{i.\pi/n.(k+j)}.2.i.sin(\frac{\pi}{n}(k-j))$, justifier que :
   $$Arg(D_n) = -\frac{2\pi}{n}.\frac{n(n-1)}{2} + \frac{\pi}{2}.\frac{n(n-1)}{2} + \frac{\pi}{n}.\sum k+j = -\pi.(n-1) + \frac{\pi}{4}.n(n-1) + \frac{3.\pi}{n}.\sum \binom{k}{2}$$
   ou, avec $\sum \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$, que $Arg(D_n) = \frac{\pi}{4}.(n-1).(3n-2)$. Et $D_n = n^{n/2}.e^{i.\frac{\pi}{4}.(n-1).(3n-2)}$.

26.2 Déterminants et géométrie, (*) "problème de Napoléon"

Soit un triangle direct A, B, C, d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. Construire pour $z \in \mathbb{C}^*$, $z \neq 1$, P, Q, R d'affixe p, q, r : $b - p = z(c - p)$, $c - q = z.(a - q)$, $a - r = z(b - r)$. [Des triangles semblables BPC, etc.]

1. Par ajout des 3 relations, vérifier que $(1-z)(a+b+c) = (1-z)(p+q+r)$. Sachant que l'isobarycentre de A, B, C est tel que $3.\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; et donc d'affixe $(a+b+c)/3$, que conclure ?
2. (a) Soit ici $z = i$. Justifier que BPC est isocèle rectangle. Vérifier que : $p - a = i(r - q)$.
   (b) En déduire que (AP) est une hauteur de PQR ; et donc $(AP), (BQ), (CR)$ concourantes.
3. On suppose maintenant que P, Q, R et z sont donnés ; et A, B, C inconnus. D'où le système
   $$\begin{cases} 0.a + b - zc = p(1-z) \\ -za + 0.b + c = q(1-z) \\ a - zb + 0.c = r(1-z). \end{cases} \quad \text{Si } D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -z \\ -z & 0 & 1 \\ 1 & -z & 0 \end{vmatrix}, \text{ on sait que : } D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \text{ existent} \\ \text{et sont uniques.} \end{cases}$$
   (a) Vérifier que $D = 0$ **se produit 2 fois seulement.** (On rappelle que $z \neq 1$.)
   (b) Soit ici $z = j = e^{2i.\pi/3}$. Préciser le point P (et Q et R de même). Dans le système 3), que dire de $L_1 + jL_2 + j^2L_3$? Conclure que P, Q, R est équilatéral direct. Cas $z = j^2$?

26.3 (**) Eq. barycentriques, déterminants, matrices (lecture)

1. Si $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. M : cart. $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Rightarrow$ bar. $\begin{pmatrix}A & B & C\\1-u-v & u & v\end{pmatrix}$. Bar. $\begin{pmatrix}A & B & C\\x & y & z\end{pmatrix}\Rightarrow$ cart. $(\frac{y}{x+y+z},\frac{z}{x+y+z})$.
   - **Interprétations de** $x+y+z=0$ $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. 1) : un point à l'infini ; 2) : un vecteur $\overrightarrow{v}=x.\overrightarrow{MA}+y.\overrightarrow{MB}+z.\overrightarrow{MC}=y.\overrightarrow{AB}+z.\overrightarrow{AC}$ indépendant de M ; (pas de cte multiplicative ici).
   - **Droites**. $\mathcal{D}_\infty : X+Y+Z=0$. Sinon : $\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$, en affine $\alpha(1-U-V)+\beta U+\gamma V=0$, $(\beta-\alpha)U+(\gamma-\alpha)V+\alpha=0$; $(\beta-\alpha,\gamma-\alpha)\neq(0,0)$, **vect. dir.** $\begin{pmatrix}\alpha-\gamma\\\beta-\alpha\end{pmatrix}_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$ en bar. : $\begin{pmatrix}\gamma-\beta\\\alpha-\gamma\\\beta-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.
   - **Eq. baryc. de** M,M' : $\begin{vmatrix}x & x' & X\\y & y' & Y\\z & z' & Z\end{vmatrix}=0$. 3 droites concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\\alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0$.

   Donc : $\alpha X+\beta Y+cZ=0$ par. à $\alpha X+\beta Y+\gamma Z+\lambda(X+Y+Z)=0$ car $(\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0,\ \alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z=0)$ doit avoir même sol. que $(\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0,\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z=0,X+Y+Z=0)$.[12]
2. Homologies, élations **du plan projectif** $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)=\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ **: droites vect. de** $E=\mathbb{R}^3$; plan affine $z=1$.
   Les autom. conservant strict. un plan de $\mathbb{R}^3$: de matr. sembl. à $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix},\lambda\neq0$, ou $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (aisé) : dilatations et transvections [qui engendrent $\mathbb{GL}(E)$ car les transv. engendrent $\mathbb{SL}(E)$[13] d'où] Homologies et Elations de $\mathbb{P}(E)$ engendrent le gr. projectif linéaire de E : groupe des transf. projectives de $\mathbb{P}(E)$.
   (a) cas 1) $\Rightarrow$ homologie du plan projectif : une droite de points fixes $\mathcal{D}$, un sommet fixe $S\notin\mathcal{D}$. Si $A\notin\mathcal{D}\ \mapsto A'$, alors : $M\mapsto M'$ avec S,M,M' alignés et $(A,M)\cap(A',M')\in\mathcal{D}$. (Si $M\in(S,A)$, faire 2 fois ceci). Si $M_0=(SM)\cap\mathcal{D}$: $[S,M_0,M,M']=k$; $k=-1$: homologie harm. involutive. L'homologie conserve alignement, birapports, contacts ; donc DH, polarité : $Cercle\mapsto Conique$.
   (b) cas 2) Ici $\exists\ S\in\mathcal{D}$ tel que les droites passant par S soient globalement invariantes. $[Vect(\overrightarrow{J}]$. Si $A\notin\mathcal{D}\ \mapsto A'$, alors : $M\mapsto M'$ avec M,M',S alignés et $(A,M)\cap(A',M')\in\mathcal{D}$. Elation.
   (c) En **affine** ? cas 1) si $\mathcal{D}=\infty$, $[S,\infty,A,A']=\overline{SA}/\overline{SA'}=k$, hom. affine ; $k=-1$: sym.-point ; si $S=\infty$, dilatation de rapport k, d'axe $\mathcal{D}$; $k=-1$: symétrie oblique. cas 2) et $\mathcal{D}=\infty$, translation ; si $S=\infty$ seul, avec $\mathcal{D}=Ox$, $x'=x+a.y$, $y'=y$: transvection affine.
3. (a) Par homol. harm. $(O\notin\mathcal{D})$, cercle $\mapsto$ conique : si $\delta=homoth_{O,1/2}(\mathcal{D})$ tangente au cercle en T, parab.(axe$//OT$, $\mathcal{D}$ invariant) ; si δ sécante, hyp. ; sinon, ellipse. Si $O\overset{aussi}{=}$centre, 2d : $dist(O,\mathcal{D})$, $U,X,V,proj_\perp O,M,M_0,(\perp\mathcal{D})_{M'}$, $OM_0=2.OK_0$, D.H.$[(a+b)(z+z')=2(ab+zz'),\ a=0]$: $OM_0(OM+OM')=2OM.OM'$, $OM.K_0M'=OK_0.OM'$; $OM=R$: $\frac{M'O}{dist(M',\delta)}=\frac{R}{d}\left(\begin{smallmatrix}\text{foy. }O\\\text{dir. }\delta\end{smallmatrix}\right)$.
   (b) Si homologie de centre A, $A\in\mathcal{C}$; $A\notin\mathcal{D}$, $M,N\in\mathcal{C},AM\perp AN$: $AM'\perp AN'$, $A,M',N'\in\mathcal{C}on$, $O'=Fr\left(\frac{point.de}{Frégier}\right)\in M'N'$, $AFr\perp\mathcal{C}on_A$ $\left(\begin{smallmatrix}tang.en.A\\\text{conservée}\end{smallmatrix}\right)$ (Michel Guillerault). [Si $x^2/A+y^2/B=1$,[14] Fr décrit une conique homothétique $K=\frac{B-A}{B+A}$; mais si $y^2=2px$: parabole translatée (aisé).] Th.(Frégier). $O\mapsto Fr$, $pol(O/\mathcal{C})=D_\infty\mapsto pol(Fr/\mathcal{C}on)=\delta$, $homoth_{A,1/2}(\mathcal{D})$. $\Delta=\mathcal{D}_A$ invar., $\Delta\cap\mathcal{C}=b$, $\Delta\cap\mathcal{C}on=B\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{Ab}$, $B\in\mathcal{C}'_{sym_A(\mathcal{C})}\cap\mathcal{C}on\underset{Bezout}{\Rightarrow}$ contact x3 en A $\left(\begin{smallmatrix}\text{c.}\mathcal{C}'=\text{c.courb.}_A\\AFr\cap Med_{[AB]}\end{smallmatrix}\right)$.

[12] (*) Ceci car, en géom. du triangle, A,B,C jouent le même rôle en coord. barycentriques ; calculs, dessins par logiciels. Coniques. $\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2\lambda' yz+...=0$. Tang. en $M_0\in C$ [dl_1, f homog., f. d'Euler ou polarité] $(\lambda x_0+\nu' y_0+\mu' z_0)x+...=0$. Si **a,b,c** affixes de $A...$, les coord. bar. des points cycliques sont $\mathcal{I}$**(c-b,a-c,b-a)**, $\overline{\mathcal{I}}$, [isogonaux : $\alpha.\alpha'=a^2$, **cf. 5.30**] car : $\mathcal{I}\in\mathcal{D}_\infty$ et **(a-c)**$\overrightarrow{AB}$+**(b-a)**$\overrightarrow{AC}$$=X+iY=0$, isotrope. Conique circonscrite à ABC $\lambda yz+\mu zx+\nu xy=0$. $Ellipse_{circ}$: avec $\cap\mathcal{D}_\infty$, $\Delta=(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu$, donc ≤0 ssi $\lambda=\alpha^2,\mu=\beta^2,\nu=\gamma^2$ et α,β,γ côtés triangle non plat ; coord. bar. du centre [=pôle -dédoubl. des termes- de $\mathcal{D}_\infty$] : $(\lambda(\mu+\nu-\lambda),...,...)$. **2 ex.** cf. C_{ABC}. Polaire de $L(a^2,b^2,c^2)/C_{ABC}$: axe de Lemoine $\frac{x}{a^2}+...=0$; d'isog. $yz+zx+xy=0$: Ellipse, tang. en A $//BC$: $Steiner_{circ.}$. Con. non dég. inscrite : [$z=0$, racine double ... matr. inv. de Con.circ. !] $\lambda^2x^2+\mu^2y^2+\nu^2z^2-2(\mu\nu.yz+\nu\lambda.zx+\lambda\mu.xy)=0$. Ell_{insc} : $\cap\mathcal{D}_\infty$, $\Delta\leq0$ ssi $\lambda\mu\nu(\lambda+\mu+\nu)>0$ [vérifié, Maple] centre $(\mu+\nu,...)$. $Steiner_{insc}$: $\lambda=\mu=\nu$ [contient $A'(0,1,1)$...], $Cercle_{insc}$: $\lambda=b+c-a$ [centre :(a,b,c)].

[13] Car Dilatation : $\overrightarrow{x}\mapsto\overrightarrow{x}+\varphi(\overrightarrow{x})\overrightarrow{u}$ où φ est une forme lin. avec $\alpha=\varphi(\overrightarrow{u})\neq0$ et $1+\alpha\neq0$; transvection : $\overrightarrow{u}\in Ker(\varphi)$, $\varphi\neq O$. Soit A avec $det(A)=1$: avec $T_{ij}(\lambda)=I_n+\lambda E_{ij}$, $i\neq j$, $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ remplace L_i par L_j et L_j par $-L_i$. Supposons donc $a_{i1}\neq0$, $i\geqslant2$, avec ce qui précède ; puis se ramener à $a_{11}=1$. Ensuite, avec des matrices de transvections, on a $M_p...M_1.A.N_1...N_q=\begin{pmatrix}1&0\\0&A_1\end{pmatrix}$, etc. D'où $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est engendré par les matr. diag. inversibles : voici le cas d'une transvection (clair si dilatation). Si D diagonale avec coeff. diagonaux tous distincts et non nuls, $T_{ij}=D^{-1}.(D.T_{ij})$ la seconde matrice étant elle aussi diagonalisable (inversible) car triangulaire avec valeurs propres toutes distinctes.

[14] Si hyperbole équilatère, Fr est rejeté à l'infini dans la direction de la normale. Calcul : Norm. $\cap(P(x,-y)Q(-x,y))$; Equations : $Bx(Y-y)=Ay(X-x)$, $x(Y+y)+y(X-x)=0$, d'où : $(A+B)X=(A-B)x$, $(A+B)Y=-(A-B)y$.

27 Espaces vectoriels euclidiens

27.1 Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est toujours libre

Corrigé : Soit $\overrightarrow{v}_1, ... \overrightarrow{v}_p, ...$ la famille. Même si infinie, on prend une combinaison linéaire nulle ; donc une sous famille finie : $a_1.\overrightarrow{v}_1 + ... + a_p.\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{0}$. Le produit scalaire par $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{0}$ donne $a_1.\|\overrightarrow{v}_1\|^2 + 0 + ... + 0 = \overrightarrow{0}.\overrightarrow{v}_1$ ou $a_1.\|\overrightarrow{v}_1\|^2 = 0$; donc $a_1 = 0$. Idem les autres. Fini.

27.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. usuel, décrire l'endomorphisme de matrice B

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Corrigé : **Les vecteurs colonnes étant ortho-normés, on a** $B \in \mathbb{O}_3$. Puis $det(B) = -1$.
- Solution 1 : $-B \in \mathbb{O}_3^+$, en fait demi-tour axial autour de $\overrightarrow{K}$ de matrice, en base judicieuse $diag(1, -1, -1)$. D'où B semblable à $diag(-1, 1, 1)$: reconnaitre la symétrie orthogonale / $\overrightarrow{K}^\perp$ (les invariants).
- Solution 2 : On a $\boxed{{}^tB = B^{-1}}$ car B orthogonale et ${}^tB = B$ par observation. D'où $B = B^{-1}$. Mais alors, par Théorème, B est la matrice d'une symétrie qui est aussi une isométrie : celà entraine symétrie orthogonale ... (à voir). On cherche les vecteurs invariants (sans erreur) : un plan vectoriel.

27.3 Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, un produit scalaire classique et norme de Frobénius

Il s'agit de $\boxed{< A, B >= Tr({}^tA.B).}$ On obtient : $Tr(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}) = aa' + cc' + bb' + dd'$.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^4$ en tant qu'espace vectoriel, on reconnait le produit scalaire canonique !

Et donc les 4 matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée pour ce p.s.

- La norme d'une matrice, déduite de ce p.s. vaut donc : $N(A) = \sqrt{Tr({}^tA.A)}$.
- On a, par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\ Tr({}^tA.B)\ |^2 \leqslant N^2(A).N^2(B)$. Par exemple $|\ Tr(A)\ | \leqslant\ N(I)N(A) = \sqrt{2}.N(A) = \sqrt{2.Tr({}^tA.A)}$; et égalité $\Leftrightarrow A = \alpha.I$.
- **Vérifier, pour finir, que** $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ **et** $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ **sont des supplémentaires orthogonaux** .

27.4 Inégalités : produit scalaire et matrices orthogonales (...)

1. Montrer l'inégalité : $(a_1 + ... + a_n)^2 \leqslant n.(a_1^2 + ... + a_n^2)$.

   Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ avec le p.s. usuel de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{L'inégalité de Cauchy-Shwartz}}$ termine.

2. Pour une matrice orthogonale $(\sum a_{ij})^2 \leqslant n^2$. Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + ... + a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nn} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}) = \sum_{i,j} a_{ij}$! Il ne reste plus qu'à dire : $\|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{v}_1\|^2 + \|\overrightarrow{v}_2\|^2 + ... + \|\overrightarrow{v}_n\|^2$ car ces vecteurs sont orthogonaux ! Et ceci vaut $1+1+...+1$ car aussi unitaires ! Et inégalité de Cauchy-Schwartz.

3. Si $A,\ B,\ \frac{1}{2}(A + B) \in \mathbb{O}$, **vérifier que :** $t \in \mathbb{R}\ \Rightarrow t.A + (1 - t).B \in \mathbb{O}$. **Déduire que** $A = B$. (Pour "déduire" : sinon, un vecteur de $t.(A - B)$ peut devenir "grand").

27.5 Symétrie par rapport à un hyperplan en dimension finie (...)

Soit $f \in \mathcal{L}(E) : \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u} + \alpha.(\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{a}).\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}$ unitaire de E, espace vectoriel euclidien.

1. Montrer qu'on a un endomorphisme symétrique. Puis trouver ses "éléments propres".
2. Trouver α pour que f soit une isométrie ($\|f(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$) à décrire. Enfin vérifier :
3. Dans $\mathbb{R}^3$, si $s(\overrightarrow{u}) = \text{sym}(\overrightarrow{u}/\text{Plan } \overrightarrow{n}^{\perp})$: $\underline{\overrightarrow{u} - s(\overrightarrow{u}) = 2.p(\overrightarrow{u})}$ où $p(\overrightarrow{u}) = \dfrac{(\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{n})}{\|\overrightarrow{n}\|^2}.\overrightarrow{n}$.

27.6 Le Th. du parallélogramme caractérise une norme provenant d'un p.s.

1. Soit $f(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$. Vérifier que $f(2x,y) = 2.f(x,y)$ (avec $\|x+y+x\|^2$ ...)
2. Puis que $g = \|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|z+x\|^2 - \|x\|^2 - \|t\|^2 - \|z\|^2$ (avec $g = \|x + \dfrac{y+z}{2} + \dfrac{y+z}{2}\|^2 = -\|x\|^2 + \dfrac{1}{2}\|2x+y+z\|^2 + \dfrac{1}{2}\|y+z\|^2 = -\|x\|^2 + \dfrac{1}{2}\|y+z\|^2 + \dfrac{1}{2}\|(x+y)+(x+z)\|^2 = ...$)
3. (a) Déduire que f est additive / 1er vecteur. Pour montrer que $f(\lambda.x,y) = \lambda.f(x,y)$:
   (b) Vérifier que c'est vrai si $\lambda \in \mathbb{N}$; puis que $f(-\lambda.x,y) = -f(\lambda.x,y)$ avec l'additivité.
   (c) Puis pour $\lambda = \dfrac{1}{q}$ avec $f(q.\dfrac{1}{q}.x,y)$; puis $\lambda \in \mathbb{Q}$. Enfin $\lambda \in \mathbb{R}$ (avec la continuïté, inég. triang.)
4. Conclure que f est un p.s. (Posant $f(x,y) = 2.(x \,.\, y)$: $\|x\|^2 = x \,.\, x$. (*) (Th. de Von Newman.)

27.7 Applications symétriques ou antisymétriques en e.v.e. (...)

On dit que f est sym. (antisymétrique) si $f(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = u.f(\overrightarrow{v})$ (respect. $f(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}.f(\overrightarrow{v})$).

1. Montrer qu'une telle application est linéaire. Matrice en base orthonormée ?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on dit qu'un champ de vecteurs est équiprojectif si $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{V}(N)$.
   En posant $f(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{V}(M) - \overrightarrow{V}(M_0)$, vérifier que f est antisymétrique ;
   puis qu'il existe $\overrightarrow{\Omega}$ tel que : $\overrightarrow{V}(N) = \overrightarrow{V}(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MN}$.

27.8 Sur les applications conservant le produit scalaire (...)

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire. Montrer que f conserve le p.s. $\Rightarrow f$ linéaire

[Indication : développer $\|f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v})\|^2$ ...]

27.9 (*) Dans $\mathbb{R}_2$[x] avec un p.s. donné par une intégrale (...)

1. Orthogonaliser : 1, x, x^2 pour le produit scalaire $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{\pi} P(t).Q(t).sin(t)dt$.
   (Réponse : 1, x-$\pi/2$, $x^2 - \pi x + 2$)
2. Minimum de $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2 - ax - b)^2.sin(x)dx$? ($\underline{P_3 \,.\, P_3 = x^2 \,.\, P_3} = \delta^2 = 40 - 4.\pi^2$)

   Plus usuel $inf \displaystyle\int_0^1 (t^2 - a.t - b)^2.dt = \frac{1}{180}$. Analogue $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Orthogonaliser la base canonique. [Rép. : $\overrightarrow{\imath}, -\overrightarrow{\imath}/2 + \overrightarrow{\jmath}, -\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$]

27.10 (*) Matrices 3,3 circulantes et rotations vectorielles (...)

Montrer que $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_3^+ \Leftrightarrow p,q,r$ racines de $X^3 - X^2 + a = 0$, $a \in [0, \dfrac{4}{27}]$.

Préciser alors A. [$\overrightarrow{\omega} = (\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k})/\sqrt{3}$, $2.cos(\theta) = 2p - q - r$, $2.sin(\theta) = \sqrt{3}.(r-q)$.]

27.11 Suite de Fibonnacci, nombre d'or ; matrices 2x2 et produit scalaire

A Léonard de Pise, dit Fibonnacci, étudia le problème de la reproduction des lapins (1202).
Un couple de lapins, au mois 1, donne naissance au bout de 2 mois, chaque mois, à un autre couple. Idem pour tout nouveau couple. Donc au mois $(n+2)$, il y a : ceux du mois $(n+1)$ augmentés des nouveaux couples, autant qu'au mois (n) $\Rightarrow$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $(*)$; avec $u_1 = u_2 = 1$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

1. a) Montrer que $(*)$ permet de calculer u_n pour $n \in \mathbb{Z}^-$; Valeurs pour $-5 \leqslant n \leqslant 8$?
   b) Prouver que $u_{-n} = (-1)^{n+1}.u_n$ note[15], en voyant les cas $n = 0$ et $n = 1$. Note[16]

2. a) Désormais $n \geqslant 0$. Montrer très simplement que que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   b) Résoudre l'équation $r^2 - r - 1 = 0$ en notant $\overline{\varphi} < \varphi$ les racines. Préciser $\varphi + \overline{\varphi}$; $\varphi.\overline{\varphi}$; $\varphi - \overline{\varphi}$.
   Connaissant les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, préciser u_n.
   c) Déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et que la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers le nombre d'or φ $(\simeq 1,618...)$.
   d) Montrer que $v_1 = 1$; $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n}$ converge en croissant vers φ. $(\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{...}}}})$
   e) Soit la suite $w_1 = 1$; $w_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{w_n}$. Vérifier que $\mid w_{n+1} - \varphi \mid \leqslant k. \mid w_n - \varphi \mid$, avec $0 \leqslant k < 1$ à préciser. Conclure et faire le lien avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. $\quad (\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{...}}})$ note[17]

B On veut retrouver la valeur exacte de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par une méthode matricielle, en prouvant la réponse.
On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$; $\Delta = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$.

1. a) Vérifier que P est inversible et que $P^{-1}AP = \Delta$ sans calculer P^{-1}.
   b) Calculer ensuite : P^{-1} ; et Δ^n ; et en déduire la première ligne de A^n.
   c) Vérifier que $U_{n+1} = A.U_n$; que $U_n = A^n.U_0$ et retrouver la valeur de u_n.
   d) Justifier sans calcul que A^n est symétrique et que : $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   e) En déduire : $u_{n+2}.u_n - (u_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$, pour $n \geqslant 0$, note[18] et aussi $(*)$ note[19].

2. Vérifier que $A^2 - A - I = 0$. Déduire $\exists\ \alpha_n, \beta_n : A^n = \alpha_n.I + \beta_n.A$; et que $\alpha_{n+1} = \beta_n = u_n$.
   Note[20].

C Un produit scalaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on considère $Tr({}^tM.N)$.

1. Vérifier qu'il s'agit du produit scalaire canonique faisant de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un espace euclidien.
2. Montrer $(Vect(I,A))^\perp = \{M : Tr({}^tM.I) = Tr({}^tM.A) = 0\} = Vect(B,C)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = {}^tC$.
3. Pourquoi a-t-on $A^n \perp Vect(B,C)$? Qu'obtient-on en exprimant que $A^n \perp (B+C)$?

---

[15] De plus : $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$; $\sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} = u_{2n}$; $\sum_{i=0}^{n} u_{2i} = u_{2n+1} - 1$; $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k.u_k = (-1)^n.u_{n-1} - 1$.

[16] On peut également démontrer qu'on a la relation suivante : $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_n.u_{n+1}$.

[17] On peut encore observer l'égalité : $w_n - \varphi = (-1)^n/(\varphi^n.u_n)$ où φ est le nombre d'or.

[18] Donnant : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{u_k.u_{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\varphi}$ et $\prod_{k=2}^{n} (1 + \dfrac{(-1)^k}{u_k^2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ (avec des simplifications télescopiques).

[19] On a aussi $u_{n+1}.u_p + u_n.u_{p-1} = u_{n+p}$, d'où ... $pgcd(u_n, u_p) = u_{pgcd(n,p)}$; ainsi $u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}$.

[20] Et encore, avec $\omega = e^{i\pi/5}$, on obtient : $\dfrac{\mid \omega^2 - 1 \mid}{\mid \omega - 1 \mid} = \varphi$ (cf. pentagone régulier du chapitre $\mathbb{C}$).

28 Espaces affines/Affines euclidiens

28.1 Composée de 2 symétries affines orthogonales dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$

Si $\mathcal{D} : (x.sin(\alpha) - y.cos(\alpha) = 0) \cap (z = h)$; $\mathcal{D}' : (x.sin(\alpha) + y.cos(\alpha) = 0) \cap (z = -h)$, décrire $s_{D'} o s_D$.

Solution (Dessin !) . $\mathcal{D}$ est une droite affine comme intersection de 2 plans affines non parallèles. (Quand donc : 2 plans affines $ax + by + cz = d$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et... sont-ils parallèles ?) $\mathcal{D}'$ idem.

. Oz : la perpendiculaire commune O équidistant de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. L'énoncé donne ce repère judicieux !

. s_D est une isométrie affine. Ici $s_D \in Is_3^+$. L'Application Linéaire associée, notée $\overrightarrow{s_D}$, est la symétrie Vectorielle par rapport à une droite Vectorielle : $Vect\,\overrightarrow{u}(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$ ou demi-tour : dans $\mathbb{O}_3^+$.

(Attention en sens inverse : si $\overrightarrow{g}$ Linéaire de $\mathbb{O}_3^+$, est un demi-tour autour de $Vect(\overrightarrow{u})$, il n'est pas sûr que g, affine, soit une symétrie / une droite Affine de direction $Vect(\overrightarrow{u})$ - et donc, droite affine du type $(P, \overrightarrow{u})$, P à chercher- car en général, g est un Vissage : des translations se "rajoutent" !)

. Puis $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{s_{D'}} o \overrightarrow{s_D}$ Linéaire dans $\mathbb{O}_3^+$ (une rotation Vectorielle axiale) se voit assez bien : C'est la rotation autour de $Vect(\overrightarrow{k})$ (car $\overrightarrow{k}$ invariant) d'angle $-4.\alpha$ ... D'où $f = s_{D'} o s_D$ Affine est

. Un Vissage d'angle $-4.\alpha$, d'axe Affine $(P, \overrightarrow{k})$, P à chercher, ainsi que le Vecteur de Translation.

Mais, rappel de cours : $P \in$ Axe-affine $\Rightarrow \overrightarrow{PP'}$ colinéaire à $\overrightarrow{k}$. D'où la Tentative qui réussit :

Si $H = \mathcal{D} \cap (Oz)$, $K = \mathcal{D}' \cap (Oz)$, on a $H \mapsto H \mapsto H^*$ avec $\overrightarrow{HH^*} = 2.\overrightarrow{HK}$ colinéaire à $\overrightarrow{k}$. Donc H est sur l'Axe-affine cherché, qui est (Oz) et Vecteur de translation $2.\overrightarrow{HK} = 4.\overrightarrow{HO} = -4.h.\overrightarrow{k}$.

28.2 Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ e.a.e., décrire $M \mapsto M' : x' = z - 2$, $y' = x$, $z' = y$

. (**Corrigé**) On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc f est affine.

. L'application linéaire associée, $\overrightarrow{f}$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{O}_3$ selon un Théorème, vu que les vecteurs colonnes forment une base ortho-normée.

. A ce stade, on sait que dét $\overrightarrow{f} = \pm 1$; en fait, $+1$.

Donc $\overrightarrow{f} \in \mathbb{O}_3^+$ est une rotation vectorielle axiale par un autre Théorème. On trouve ...

. Axe (vectoriel de $\overrightarrow{f}$) $= Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Vect(\overrightarrow{u})$; ce vecteur choisi pour orienter l'axe.

. Angle : $2cos(\theta) + 1 = Tr(A)$ par propriété. $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Et comme $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\imath}) = \overrightarrow{\jmath}$, 1ère colonne de A, $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ à vue. (et donc A^{-1} est à la fois : ${}^tA$ et A^2).

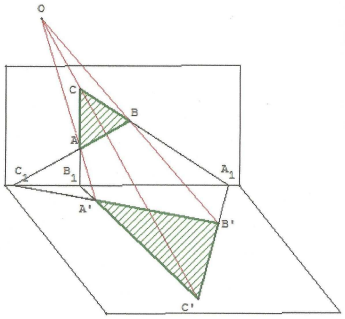
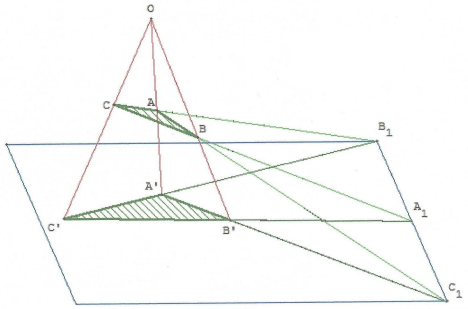
. Revenons à f : Par un troisième Théorème, ayant $f \in \Im s_3^+$, f est un vissage : . Angle : $\theta = +2\pi/3$;

. Axe affine $\mathcal{D}$ de f et Vecteur de translation : $M \in \mathcal{D} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \delta.\overrightarrow{u}$ ou $\begin{cases} x' - x = \delta \\ y' - y = \delta \\ z' - z = \delta \end{cases}$ D'où (laissé)

$\delta = -\frac{2}{3}$, vecteur de translation $\frac{-2\overrightarrow{u}}{3}$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = -2/3 \\ y - z = -2/3 \end{cases}$. Vérification : $\overrightarrow{\mathcal{D}} \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$!

28.3 Applications affines. Note sur la projection conique (Th de Désargues)

1. Préciser f affine : $M \mapsto M'$, $x' = 5x + 2y - 2z + 2$; $y' = -4x - y + 2z - 2$; $z' = 8x + 4y - 3z + 4$.
2. Expression de la projection (affine !) de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ sur le plan affine $x + y + z = 1$ $//Vect(1, 0, 1)$?

3. **Rem. une proj. non affine :**
et Hilbert (*) : Th. de Pappus **29.1** $\Rightarrow$ Th. de Désargues dans $\mathbb{R}^2$; dans $\mathbb{R}^3$ Th. de D. toujours vrai !

28.4 Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, des ensembles de points tels que (...)

1. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = 0$?
2. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}$? [et une note : A, B, C alignés, $\forall M$ $\overline{BC}.MA^2 + \overline{CA}.MB^2 + \overline{AB}.MC^2 + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$ relation de Stewart. **32.**3.]

28.5 Au sujet des torseurs. Un exemple classique

1. Soit un système de "pointeurs" $(A_k, \overrightarrow{u}_k)$: de résultante $\overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{u}_k$; et de moment en M : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M = \sum \overrightarrow{MA_k} \wedge \overrightarrow{u}_k$; on peut prendre des vecteurs "glissants" : remplacer A_k par B_k sur $\mathcal{D}(A_k, \overrightarrow{u}_k)$.
Montrer que $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OM}.}$ (Donc si même $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$ et même $\overrightarrow{R}$, même moment partout).
2. Déduire que $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$ est invariant : **invariant scalaire du torseur** $(\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_O)$.
3. Moment / un axe (OO') : Si on a un axe (O, O') vérifier que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}'_O \cdot \overrightarrow{OO'}$.
$(\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}$ unitaire, est dit moment par rapport à l'axe).
4. Exemple. Montrer que les vitesses d'un solide forment un champ des moments d'un torseur :
   (a) Avec : $A(t)B(t) = cte$, vérifier qu'on a un champ "équiprojectif" : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{dB}/dt = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{dA}/dt$.
   (b) Soit O fixé, $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{V}_M - \overrightarrow{V}_O$; montrer : $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = 0$, $f(\overrightarrow{ON}) \cdot \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON} \cdot f(\overrightarrow{OM})$.
   (c) En utilisant qu'une application antisymétrique est forcément linéaire **27.7** ; de matrice antisymétrique en base o.n. ; donc du type $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u}$, déduire que : $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.
   Vérifier alors que : $\forall M,\ N,\ \overrightarrow{V}_N - \overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MN}$ (ou bien $\overrightarrow{\Omega}$ indépendant de O).
5. Classification
   (a) Si en un point, le torseur se réduit à : $(\overrightarrow{R}, \overrightarrow{0})$ on dit "glisseur".
   Si on a $(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_0)$, on dit "couple" (moment indépendant de O). Inversement, montrer que
   (b) Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 \cdot \overrightarrow{R} = 0$: on a un couple $(\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0})$ ou, avec "la division vectorielle", un "glisseur".
   (c) Dans le cas général, le torseur peut être vu comme somme des deux précédents (ou encore comme système de 2 vecteurs glissants. Les torseurs peuvent être vus comme e.v. de dim 6).
6. "Axe central" d'un torseur : On cherche $\{A$ tel que $\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_A\|$ soit minimum. $\}$
   (a) Montrer que : $\{M$: $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$ soit colinéaire à $\overrightarrow{R}\}$ est une droite affine. Et que les points de cet "axe central" sont les solutions cherchées (avec le Théorème de Pythagore). Dessin en voyant que l'angle entre $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ varie ente 0 et $\pi/2$ si A s'éloigne de l'angle central.
   (b) Remarque : En tout point A de l'axe central, le moment vaut $(\frac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_A}}{R^2}).\overrightarrow{R}$, si $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$.

29 Cercles et coniques (et cf. 30.3,5,6,8)

29.1 Trois questions de barycentre. Note sur le cercle [Pascal]

1. L'isobarycentre de **3 points** A, B, C, est l'intersection des médianes G : connu.
2. Celui de la **plaque homogène** est G **aussi** ; découpons la plaque en lamelles parallèles à (A, B) : chaque lamelle a son centre de gravité au milieu ; or ces milieux sont alignés sur la médiane CC' ! D'où $G_{plaque} \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$: $G_{plaque} = G$. **Par contre, montrer que**
3. L'isobarycentre **du fil** triangulaire homogène est le centre du cercle inscrit au triangle "médian" !

– **Corrigé de 3.** Tout point M de ce plan est barycentre de A, B, C avec des coefficients judicieux :

1. 1ère démonstration : $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ du plan vectoriel de dim. 2, sont liés. $\exists \alpha, \beta, \gamma$ non tous nuls : $\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Ici $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ sinon $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} - (\alpha + \beta)\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$; $\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ liés, car $\alpha = \beta = \gamma = 0$ exclus. Impossible : A, B, C non alignés.
2. 2ème. $\exists \lambda, \mu : \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC} = \dfrac{(1-\lambda-\mu).\overrightarrow{AA} + \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC}}{(1-\lambda-\mu) + \lambda + \mu}$; $bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1-\lambda-\mu & \lambda & \mu \end{pmatrix}$!

– Voici des coefficients barycentriques en toute généralité. D'abord un rappel :

1. $M = bar \begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow A, M, B$ alignés et par ex. $\alpha = \overline{MB}, \beta = \overline{MA}$; "la longueur d'en face ..."
2. Propriété $\boxed{M = bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ Aire(MBC) & Aire(MCA) & Aire(MAB) \end{pmatrix}, Aire(MBC) = Aire\ triangle.}$

Car $\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, donne $\overrightarrow{MA} \wedge (\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
D'où : $\beta.\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \gamma.\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, $\beta.[\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \,.\, \overrightarrow{k}] = \gamma.[\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{k}]$. Or $[\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \,.\, \overrightarrow{k}]$ représente le volume algébrique du solide de base le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$, de hauteur 1 ; donc l'aire algébrique du parallélogramme $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$: $2x\mathcal{A}_{triangle}$
Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$, pour simplifier, $\dfrac{\beta}{AireMCA} = \dfrac{\gamma}{AireMAB} = \dfrac{\alpha}{AireMBC}$ "l'aire d'en face ..."

– Coefficients barycentriques du centre du cercle inscrit à PQR. I est donc bar. de $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ r.QR & r.RP & r.PQ \end{pmatrix}$ ou de $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ QR & RP & PQ \end{pmatrix}$: I barycentre de chaque sommet affecté du coefficient = longueur d'en face.

– Cas du fil. Par associativité A', B', C' affectés des coefficients $(A', BC = 2B'C') : bar \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ B'C' & C'A' & A'B' \end{pmatrix}$.

C'est donc le centre du cercle inscrit au triangle $A'B'C'$: **"centre de Spieker" du triangle**.

Théorème de Pascal, dit Th."de l'hexagramme mystique" (et Th. de Pappus si la conique dégénère en 2 droites) **5.18 28.3 :**

Le génie de Pascal fut -aussi- de prendre ce résultat comme Théorème de départ et "d'en tirer plus de 400 corollaires qui renferment l'essentiel des Coniques d'Apollonius", selon le Père Mersenne.

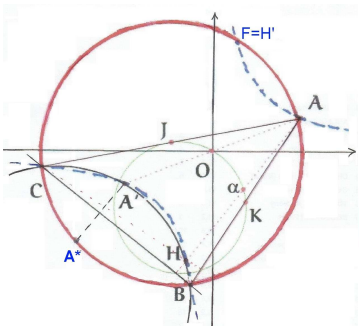
Ayant 6 points $ABC, A^*B^*C^*$ sur un cercle, on a $AB^* \cap A^*B$, $AC^* \cap A^*C$, $BC^* \cap B^*C$ alignés.

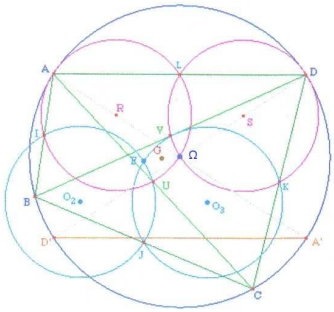
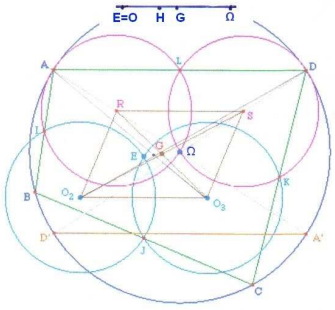
– Un cas particulier (avec le cercle) est le cas où on a des parallèles, donc 2 points sont à l'infini (et on peut (*) se ramener à ce cas facile, d'après Perrin, justifiant Poncelet ...) !?

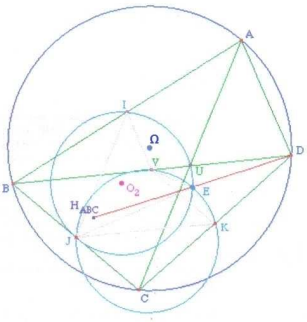
– (*) Une preuve usuelle utilise les birapports : car on peut définir le birapport de 4 points d'un cercle (et même d'une conique). Ce résultat s'étend par projection centrale (perspective) à toute conique.

29.2 (*) Triangle inscrit dans une Hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ [corrigé]

1. Si $\mathcal{H}$ d'asymptotes Ox, Oy ; $A, A', B \in \mathcal{H}$, $A' = sym(A/O)$; $(A,B) \cap Asymp = \{P,Q\}$ vérifier que $K = milieu[A,B] = mil[P,Q]$ et $OK = KP$; puis avec $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{A'B}$: $\widehat{Ox,AB} = -\widehat{Ox,A'B}$ (π).
2. Si maintenant A, B, M sont sur $\mathcal{H}$, de : $\widehat{Ox,AB} = -\widehat{Ox,A'B}$ (π) et : $\widehat{Ox,AM} = -\widehat{Ox,A'M}$ (π), ($[AA']$ encore diamètre) déduire que : $\widehat{AB,AM} = -\widehat{A'B,A'M}$ (π) et réciproquement. Si $M = C$,
3. $A'BCH$ cocycliques $[\widehat{AB,AC} = -\widehat{HB,HC} = -\widehat{A'B,A'C}\ (\pi)]$. $h(A,\frac{1}{2})$: O centre de $\mathcal{H} \in$ Cercle d'Euler $K, J = mil_{[AC]}, \alpha = mil_{[AH]}$ Th. de Brianchon-Poncelet, $H \in \mathcal{H}$. $[\widehat{AB,AH} = \widehat{CH,CB} = -\widehat{A'B,A'H}.]$





1. (a) **Notes (Géry Huvent)**. Le cercle $A'BCH$ a même taille que le cercle ABC : c'est son sym./(B,C). En particulier $A^* = sym(A'/(B,C)) \in$ Cercle ABC ; $\widehat{AB,AC} = \widehat{A^*B,A^*C}$.
   (b) $\mathrm{Sym}(H/O) = H' = F$ se trouve sur $\mathcal{H} \cap Cercle\text{-}ABC$. [Car B sur $\mathcal{H}$ de diam. $[HH']$ donne : $\widehat{HA,HB} = -\widehat{H'A,H'B}$; mais $\widehat{HA,HB} = -\widehat{CA,CB}$ car côtés $\perp$ et Th. de l'arc capable, etc.] La parabole de foyer F de directrice $Steiner_F$ $(H \in St_F)$: est tritangente au triangle$_{ABC}$.
   (c) Notant A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs et ici A_2, B_2, C_2 les milieux des côtés, le Th. de Pappus pour A, C_1, C_2 et C, A_1, A_2 montre que G, H et $(C_1A_2) \cap (C_2A_1)$ sont alignés : la droite de Pascal de l'hexagone inscrit $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ dans le cercle d'Euler est la droite d'Euler !
   (d) Si $A, B, C, D \in \mathcal{H}$ [il existe une telle hyp. équilatère ; une infinité si quadrangle orthocentrique] alors O, centre de $\mathcal{H}$, est sur les 4 cercles d'Euler : $O = E$, centre d'Euler du quadrilatère.
   (e) (Poncelet*) $proj_\perp(D \in \mathcal{H}) = p, q, r$, $Y = m[BD]$: $\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{Or} = YK, Yr =_{[BD,\, BA\, =\, rB,\, Ry]} AD, AB+BD, BA = AD, AB+pD, pr$. $OJ, Oq = AD, AC+pD, pq$. $OK, OJ+Oq, Or = AC, AB+pq, pr$ or $OK, OJ = IK, IJ = AC, AB$: $O; p, q, r$ cocycliques. Si p, q, r alignés : centre$_{HE} \in Simson$. Idem $O; l, m, n$ triangle cévien de $D \Rightarrow l, m, n$ autopolaire$/_{Conique}$; On, lm diam. conj. ; (HE) même inclinaison/asympt. $nm, nl = Om, Ol$. [Ou (l,m,n) ; (O,points cycliques) autopolaires ...]

2. (a) Si $ABCD$ cocycliques (centre Ω, $\mathcal{R}$), les centres des 4 cercles sont cocycliques (q.3, $O = E$) : $OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = \mathcal{R}/2$. Et G isobar. de $ABCD$: $\overrightarrow{\Omega E} = 2.\overrightarrow{\Omega G}$ car par $hom_{D,1/2}$ Cercle $ABCD \mapsto$ *cercle* passant par Ω et les milieux de DA, DB, DC : son sym./G passe par les milieux de BC, AC, AB : un cercle d'Euler ; $\Rightarrow sym_G(\Omega) = O = E$ car sur les 4 cercles !
   (b) Le *cercle* est de diamètre $[D\Omega]$ (centre S,$\mathcal{R}/2$) et $RS = AD/2$ (cf. Fig. 2.3) ; le sym /G est $IJUE$: $[O_3O_2]$ homothétique de $[AD]$ par $s_G o h_{\Omega,1/2} = h_{H,-1/2}$, $3.\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{G\Omega}$, $\overrightarrow{\Omega H} = -2\overrightarrow{EH}$: Par $h_{H,-1/2}$, le quadrilatère des centres des cercles d'Euler (bleu) : homothétique de $ABCD$. Retrouver que les mi-hauteurs de $ABCD$ inscrit sont concourantes en $E = O = sym(\Omega/G)$: $\mathcal{D}(I, \perp CD)$ est $\perp O_1O_2$; c'est donc l'axe radical (IE) ; $\Rightarrow$ chaque mi-hauteur passe par E.
   (c) Si $M = h_{H_{ABC},1/2}(D)$: $M \in (IJU)$, $MV // BH_{ABC} \perp AC$; or $E \in (IJU)$ et $EV // \Omega U \perp AC$ (sym_G, $G = U * V$) donc $M = E$: le quadr. des orthocentres (sur $\mathcal{H}$) est sym.de $ABCD/\ E$.

29.3 (*) C.N.S. pour que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ soit une ellipse. Aire ?

Sol. géom. [**et 59.1**.] Soit le faisceau linéaire de coniques $ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - R^2) = 0$. Forme quadratique dégénérée $\Leftrightarrow \lambda$ v.propre de la matrice. Et (coniques passant par O) $\Leftrightarrow \lambda.R^2 = 1$; on a 2 droites doubles ($det(*) = 0$) sécantes en O : les cas de tangence des 2 coniques initiales. D'où : ellipse "ssi" $\lambda, \lambda' > 0$ ou $(a + c > 0,\ ac - b^2 > 0)$. Et Aire $= \pi.R_1.R_2 = \pi/\sqrt{\lambda_1.\lambda_2} = \pi/\sqrt{ac - b^2}$.

29.4 Ellipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$: construction de Rytz si diamètres conjugués

1. Soit OP_2P_1 alignés, $P_2\in\mathcal{C}(O,b), P_1\in C(O,a) : P=(P_1,y)\cap(P_2,x)$ décrit une ellipse. $[\overline{HP}/\overline{HP_1}=\frac{b}{a}]$
2. Si OP, OQ donnés, diamètres conjugués (i.e. $OP_1\perp OQ_1$), on cherche les axes. Pappus, Euler.
   (a) Vérifier que $rot_{O,\pi/2}:\ O,\ P_2,\ P_1,\ P\mapsto\ O,\ Q_2,\ Q_1,\ P^*$ et : $Q_1,\ Q,\ Q_2,\ P^*$ rectangle.
   (b) Si on prolonge P^*Q, vérifier qu'elle coupe les axes en $X,\ Y$ tels que $QX=b$, $QY=a$. $[Q,Q_2$ projetés en R,S sur Ox et T sur Oy, $\widehat{XQR}=\widehat{SQ_2O}$; triangles ORQ_1, QTY égaux.$]$
3. Une construction : $\mathcal{C}(U_{milieu\ P^*Q};\frac{a+b}{2},O)\cap(P^*,Q)$ donne X,Y ; donc : Ox,Oy ; et aussi : a,b.

$[PR=PS=OQ$, $(PRS)\perp(OQ)\Rightarrow$ Biss.OR,OS : axes ; $U\in(OR), UP//Ox\Rightarrow OU=b, UR=a$. R,S cercles de Châsles.$]$

29.5 Faisceau linéaire de cercles $C_0: x^2-2a_0x+y^2+c_0=0$, $C_1\neq C_0$

Soit le faisceau de cercles de base C_0,C_1 ; $C_k: x^2-2a_0x+y^2+c_0+k.(x^2-2a_1x+y^2+c_1)=0$, $a_1\neq a_0$.

1. Vérifier si $k=-1$ que c'est l'axe radical D, ensemble des points d'égale puissance/C_0,C_1. $\boxed{k\neq-1:}$
2. On fait dorénavant une translation de repère de façon que l'axe radical ait pour équation $x=0$. Vérifier que la famille a pour équation $x^2+y^2-2.\lambda x+c=0$. Et que $P(O,y)$ a même puissance / chaque cercle. Nature du faisceau selon le signe de c (à points de base ; points-limites ; tangents).
3. Vérifier que les trajectoires orthogonales sont $x^2+y^2-2\mu.y-c=0$ (Faisceau conjugué).
4. (*) Dans le plan complexifié ($\simeq\mathbb{C}^2$), si le faisceau $\mathcal{F}$ est à points limites $U,V: x^2+y^2-2\lambda.x+c=0$, $c>0$ [points limites $(\pm\sqrt{c},0)$], vérifier que les points du complexifié : $(0,\pm i.\sqrt{c})$ appartiennent à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ qui a ainsi 2 points communs imaginaires conjugués (et distincts).

   Un faisceau linéaire de cercles est donc une famille de cercles ayant 2 points communs : réels et distints ; ou réels et confondus ; ou bien imaginaires conjugués !
5. (*) Points à l'infini : Dans le plan projectif $\{(X,Y,T)\neq(0,0,0)\}$ (redonnant le plan affine, $T=1$), cherchons avec : $X^2+Y^2-2aXT-2bYT+cT^2=0\cap T=0$ (éq. homogène $x=\frac{X}{T}, y=\frac{Y}{T}$) les
   - "Points à l'infini" : aucun réel ; 2 dans le complexifié : $I(1,i,0)$ et $J(1,-i,0)$, "les points cycliques", points à l'infini des "directions de droites de pente i et $-i$", dites "directions isotropes".
   - Le fait de passer par les points cycliques du plan projectif complexifié caractérise les cercles dans l'ensemble des coniques du plan car équivaut au fait que la forme quadratique est $A(x^2+y^2)$.
   - Avec $\begin{cases} X^2+Y^2-2aXT-2bYT+cT^2=0 \\ Y=iX+(b-ai)T \end{cases}$ montrer que : Cercle $\cap$ (droite **isotrope** passant par **son centre**) admet le point cyclique correspondant comme racine double $\Rightarrow$ une asymptote (tangente en un point ∞). Ces 2 droites **isotropes** sont donc les **asymptotes** du cercle. [Une droite isotrope . fait le même angle avec tout autre droite mais avec elle, angle indéterminé ; on peut dire $\perp$ à elle-même ! . La dist. de 2 points d'une isotrope vaut 0. On a aussi $T_I\cap T_J$ réel car conjuguées. Pôle de D_∞ : centre.]
6. (*) Une conique étant définie par 5 points avec 3 quelconques non alignés, un faisceau de coniques est défini par 4 d'entre eux dits points de base ; donc un faisceau de cercles est un faisceau de coniques tel que 2 points de base sont les points cycliques. Cette présentation englobe le cas du faisceau singulier de cercles concentriques : constitué de cercles ayant les mêmes asymptotes, c'est-à-dire de cercles bitangents à l'infini en I,J, points cycliques, qui sont points de base, et ici points doubles !

   $\cap\ y=i.x+\lambda$ et $x^2+y^2=e^2(x-d)^2$ ou $x^2+y^2=(e.x-p)^2$, $p=e.d$, $d=\delta ist(O=F,\mathcal{D})$.

   On a l'équivalence : $(\Delta=0$, Droite isotrope tangente$)\Leftrightarrow(e^2-1)\lambda^2+2p.e.i.\lambda=0$.

   Définition (Plücker). **Foyer** : un point duquel on peut mener **2** tangentes isotropes à la conique.

   Si $e=0, p=ed\neq0$: $\lambda=0$, droite isotr. tang. en $I(1,i,0)\in C$ passe au centre du cercle, seul foyer.

   si $e=1$, $\lambda=0$ $\left(\begin{smallmatrix} y=ix, \\ y=-ix \end{smallmatrix}\right)$: 1 seul foyer aussi pour la parabole. $[T=0$ ou (I,J), autre tangente à $\mathcal{P}$!$]$

   $e\neq0,1$: 4 foyers $(0,0)$; $[-2pe/(1-e^2),0]$; $[-pe/(1-e^2),\pm i.pe/(1-e^2)]$; $\cap$ de 2 tang. isotropes.

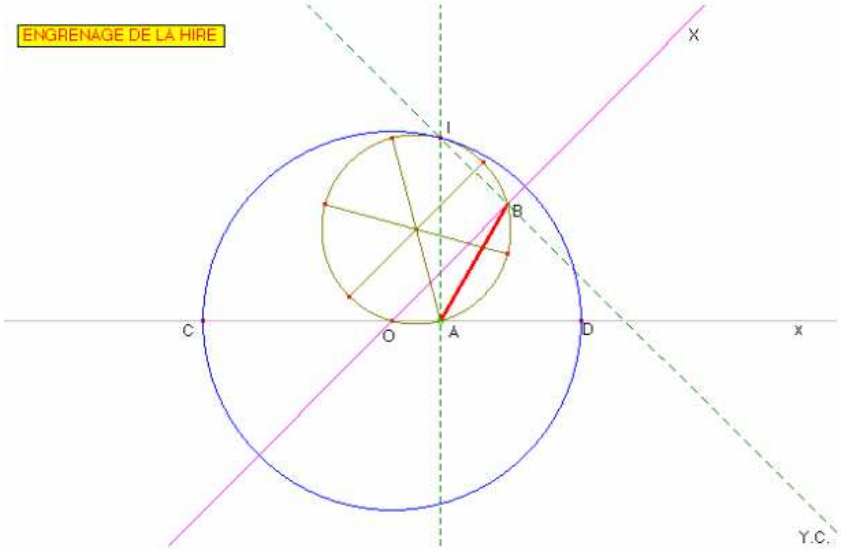
D'où la déf. monofocale. Si : 2 isotropes issues de F sont tangentes en $U,V\in$ Conique et (M,N) sur Con. coupe (U,V) polaire de F (directrice) en P ; si Q tel que $(MNPQ)$ DH et $(UV)\cap(FQ)=R$: $(UVPR)$ DH car P est conjugué de Q et F ; (FI,FJ,FP,FR) faisc.H donc $FP\perp FQ$ (car conjugués/isotropes), donc biss. de FM,FN ! D'où $FM/FN=PM/PN=dist(M,\Delta)/dist(N,\Delta)$ (proportionalité) et fixer N. Cas $M=N$, tangente : $FM\perp FP$!

29.6 Sur un Théorème de La Hire (sur l'Ellipse) [corrigé]

On connait la méthode de "la bande de papier" : étant donnés deux axes orthogonaux Ox, Oy, et une tige rigide mobile par deux de ses points : A sur Ox et B sur Oy (donc $AB = cte$) alors : un point de cette tige décrit une ellipse (qui peut être applatie, comme la trajectoire du point A, par exemple).

L'exercice suivant considère 2 axes non forcément orthogonaux : Ox, OX ; ainsi qu'un solide $\mathcal{S}$ lié à la tige rigide A, B. On montre qu'un point P, fixé sur ce solide, décrit une ellipse (parfois applatie) :

1. Dans le triangle OAB, montrer que $\dfrac{AB}{sin(xOX)} = 2.R$; et donc R est le rayon fixe du cercle OAB[21].
   Le cercle C_2 de rayon R fixe, passant par A, B (et O), de centre Ω variable, peut être vu comme faisant partie du solide mobile. Considèrons aussi le cercle fixe C_1 de centre O, de rayon $2R$.
   Comme OAI et OBI sont $\perp$ (mouvement de A sur Ox ; B sur OX) I est le centre instantané de rotation ; donc le petit cercle roule sans glisser dans le grand. Soit P lié à ce solide ($P = A$ permis)
2. (a) Tracer la droite ΩP coupant C_2 en E et F. (P, E, F appartiennent au solide mobile lié à AB)
   (b) Montrer que E et F décrivent des segments cette fois orthogonaux [théorème de l'angle inscrit pour $\widehat{AOE}$.] Conclure pour P ("Méthode de la bande de papier").[22] (Note[23])



29.7 Sur la double génération des coniques (ex. ellipse)

Soit un repère orthonormé Oxy et une tige $A \in Ox$, $B \in Oy$ de longueur $l > 0$ et M solidaire avec cette tige prolongée tel que $\overrightarrow{AM} = b.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ unitaire de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $b \in \mathbb{R}$! On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.
$x = l.cos(\theta) - b.cos(\theta)$; $y = b.sin(\theta)$ si $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OI})$, I milieu de $[A, B]$. Donc : $\boxed{\dfrac{x^2}{(l-b)^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.\ \mathcal{C}_{l,b}}$

$\mathcal{C}_{l,b} = \mathcal{C}_{l',b'}$? Si $b' = -b$ possibilité en plus $b = \dfrac{l - l'}{2}$. Ex. : $(l = 6, b = -1)$; $(l = 8, b = 1)$.

Si $b' = b$ une possibilité en plus $b = \dfrac{l + l'}{2} > 0$. Ex. : $(l = 3, b = 4)$; $(l = 5, b = 4)$.

Remarques

– On peut se limiter au dernier cas : grand axe sur Ox.

– (*) De même on a une double génération des courbes cycloïdales. **15.5**.5.

[21] Le point O n'est pas un point lié au petit cercle, considéré comme solide animé.

[22] Ceci constitue le Théorème de La Hire. Un cas particulier est : si un disque roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle double, un point de la circonférence tel A décrit un diamètre ! Mouvement circulaire transformé en mouvement rectiligne.

[23] Sur le nom "La Hire" : les joueurs de cartes doivent savoir que La Hire est le valet de ♡ ...

29.8 (*) Puissance d'un point/une conique [Jean de Biasi]

Soit une conique de foyer F ; M se projetant en H_M sur la directrice $\Delta \perp \overrightarrow{\imath}$: si une droite $(A, \overrightarrow{u})$ coupe la conique en M_1, M_2 : $\boxed{[1 - e^2.cos^2(\theta)].\overrightarrow{AM_1}\,.\,\overrightarrow{AM_2} = cte = AF^2 - e^2 AH_A^2 \quad \text{où} \quad \theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}).}$

(Arriver à une équation de degré 2, à l'intersection : $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u} \cap \overrightarrow{FM}^2 - e^2\overrightarrow{H_M M}^2 = 0$; de terme en λ^2 : $1 - e^2.cos^2(\theta)$ car $\overrightarrow{H_M M} = \overrightarrow{H_A A} + \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP}^2 = \lambda^2.cos^2(\theta)$; et de terme constant : $AF^2 - e^2 AH_A^2$.)

D'où le **Théorème de Joachimsthal**. 2 sécantes en A coupent une conique en $M_1, ..., M_4$: une CNS pour que les M_i soient cocycliques est $cos^2(\theta_1) = cos^2(\theta_2)$, $\theta_2 = -\theta_1(\pi)$: inclinaisons sym./Directrice ou sa perpendiculaire.[24] (Si droites// : $(A, B)//Ox$ ou Oy, un rectangle.) [$\Leftrightarrow$ si α_i, angles sur le cercle, $\sum \alpha_i = 0$].

. Cas $y^2 = 2px$ et $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$; trouver $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$: centre de gravité $\in$Axe.
. Cas $x = acos(t), y = bsin(t)$; avec $T = e^{it}$ et $x^2+y^2-2Ax-2By+C = 0$ trouver $t_1+t_2+t_3+t_4 = 0(2\pi)$.
. Cas $x = a(T + 1/T), y = b(T - 1/T)$ [hyp.] : $T_1T_2T_3T_4 = 1$. Cf. **30.3**,25 Th. de J. vrai aussi : normales à H, $T_1T_2T_3T_4 = -1$. [Toute conique a une éq. : $y^2 = 2p.x+q.x^2$, $q = e^2-1$, $p = ed$ paramètre, $F(\frac{p}{1+e}, 0)$, $d = \delta(F, \mathcal{D})$.]

29.9 (*) Polynôme de degré 3. Convexité. Ellipses de Steiner

1. Deux questions liées : Ayant $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ de racines complexes α, β, γ, affixes du triangle A, B, C, peut-on "voir" où sont les deux racines de P' ? Soit S ou S_T l'aire du triangle.
2. (a) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse circonscrite à ABC d'aire minimum.
   (b) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse inscrite à ABC d'aire maximum.
   Et que ces deux ellipses [de Steiner] sont de centre G et homothétiques de rapport 2.

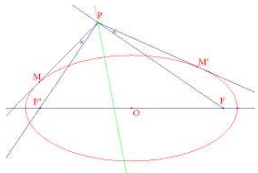
Pour 2) et 1) : $\boxed{\textbf{les racines de } P' \textbf{ sont les affixes des 2 foyers de l'ellipse inscrite dans } ABC \textbf{ !}}$

1. (a) On a $2S = ab.sin(C) = bc.sin(A) = ca.sin(B)$ donc : $8S^3 = a^2b^2c^2.sin(A)sin(B)sin(C)$.
   (b) $f(t) = -ln[sin(t)]$ convexe sur $]0, \pi[$ $(f" > 0)$; donc $f(\frac{A+B+C}{3}) \leqslant \frac{1}{3}[f(A)+f(B)+f(C)]$ et égalité $\Leftrightarrow$ $A = B = C$. Donc : $sin(A)sin(B)sin(C) \leqslant 3.\sqrt{3}/8$ et égalité $\Leftrightarrow A = B = C = \pi/3$.
   D'où : $S^3 \leqslant \frac{3.\sqrt{3}}{64}a^2b^2c^2$, $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}$ et égalité si et seul. si Triangle équilatéral.
2. (a) On sait que : $\sqrt[3]{xyz} \leqslant (x + y + z)/3$ et égalité $\Leftrightarrow x = y = z$. D'où :
   (b) $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$ et égalité $\Leftrightarrow a = b = c$ (inutile ici ; inég. de Weitzenböck).
   (c) $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}(\frac{a+b+c}{2})^2$, égalité $\Leftrightarrow$ Triangle équilatéral. Soit $p = \frac{a+b+c}{2}$ demi-périmètre.
3. (a) 1b) et $\frac{abc}{2S} = 2R$ (rayon du cercle circonscrit) : $S \leqslant \frac{3.\sqrt{3}}{4}R^2$ et égalité "ssi" T équilatéral.
   (b) 2c) et $S = p.r$ (rayon du cercle inscrit) donnent $S \geqslant 3.\sqrt{3}.r^2$ et égalité "ssi" T équilatéral.
4. Ici, on utilise qu'une bijection affine du plan multiplie les aires par une constante [comme l'application affine sera composée de 2 affinités, clair]. Et qu'une application affine conserve le barycentre.
   (a) Soit E une ellipse d'aire S_E, circonscrite au triangle T ; on tranforme l'ellipse en cercle par une application affine f [possible]. Alors : $\frac{S_E}{S_T} \geqslant \frac{\pi.R^2}{3.\sqrt{3}.R^2/4} = \frac{4.\pi}{3\sqrt{3}}$. Et égalité $\Leftrightarrow$ [par 3a) encore] Nouveau triangle équilatéral $\Leftrightarrow$ Centre du cercle = Centre de gravité du nouveau triangle $A'B'C' \Leftrightarrow$ [par f^{-1}] Centre de l'ellipse = Centre de gravité ancien triangle ABC.
   (b) Nombre de solution(s). Au moins une : Si g affine, $ABC \mapsto A"B"C"$ équilatéral de cercle circonscrit $\Gamma"$: $g^{-1}(\Gamma")$ convient. Unicité : Avec f du a) fog^{-1} est une similitude φ, car un triangle équilatéral $\mapsto$ un autre ; comme $g = \varphi^{-1}of$, $g(E)$ =le cercle circonscrit car $f(E)$ cercle.
5. De même F étant une ellipse inscrite à un triangle, on a $\frac{S_F}{S_T} \leqslant \frac{\pi.r^2}{3.\sqrt{3}.r^2} = \frac{\pi}{3.\sqrt{3}}$ et égalité $\Leftrightarrow$ ...
   $\Leftrightarrow$ Centre de l'ellipse = Centre de gravité ancien triangle ABC. Ellipse unique encore.
   Et E homothétique de F dans le rapport 2, puisque $R = 2.r$ pour le triangle équilatéral image.

[24] Sans lien mais : si $xy = x_0y_0$ est équilatère ; $A, B(-x_0, -y_0)$ un diamètre ; AP, BP inclinées sym/Asympt $\Leftrightarrow P \in \mathcal{H}$.

6. **Foyers**. Soit $P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Par translation [centre G] on peut supposer $\alpha+\beta+\gamma=0$ et par rotation, $\alpha.\beta+\beta.\gamma+\gamma.\alpha\in\mathbb{R}^-$ (à voir). Qui ramène à : $P(x)=x^3+px+q,\ p\in\mathbb{R}^-$.
   (a) Les formules de Cardan donnent ainsi les racines : Ayant u,v tels que $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u.v=-p/3 \end{cases}$, on a : $\alpha=u+v,\quad \beta=uj+vj^2,\quad \gamma=uj^2+vj,$ ce qui se traduit encore par (*) :
   h : affine $z\mapsto u.z+v.\overline{z}$ transforme $\{1,j,j^2\}$ équilatéral en A,B,C d'affixes α,β,γ.
   (b) Notons $u=r.e^{it}, v=s.e^{-it}, r\geqslant s$. Le cercle inscrit $z=\frac{1}{2}e^{i.\theta}$ a pour image l'ellipse d'équation $z=\frac{1}{2}[r.e^{i(\theta+t)}+s.e^{-i(\theta+t)}]$ de centre O, de demi-axes $\frac{r+s}{2}$ sur Ox, $\frac{r-s}{2}$ sur Oy. D'où les foyers ici sur Ox, tels que : $x^2_{foyer}=(\frac{r+s}{2})^2-(\frac{r-s}{2})^2=rs=uv=\frac{-p}{3}\in\mathbb{R}^+$: $x_f=\pm\sqrt{-p/3}$.
   (*) Ce sont donc les racines de $P'(x)=3x^2+p$: Théorème de Siebeck-Marden !

Notes : 1) $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=\frac{3(x-z)(x-z')}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$. Avec $x=z$ on a aisément : les racines de P' sont dans le triangle ABC : (Théorème et points de Gauss-Lucas **11.4**).
2) $\frac{(\alpha-z)(\alpha-z')}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\frac{1}{3}$, $arg(\frac{1}{3})=0$ d'où des égalités d'angles avec les foyers : Théorème de Poncelet.



3) Si P décrit une ellipse homofocale, $M'P+PM+\text{grand.arc}MM'=$cte : Graves.
[Avec 1), $d/dt(PM'+PM)=\overrightarrow{PM'}/PM'.(\overrightarrow{V}_{M'}-\overrightarrow{V}_P)+\overrightarrow{PM}/PM.(\overrightarrow{V}_M-\overrightarrow{V}_P)=\|\overrightarrow{V}_M\|-\|\overrightarrow{V}_{M'}\|=-dL/dt$.]

29.10 Polarité / à un cercle, réciprocité, quadrangle harmonique

1. **Définitions**. Déjà soit deux cercles $\mathcal{C}$ $[x^2+y^2=R^2]$ et Γ.
   (a) $\mathcal{C}$ et Γ sont orthogonaux $\Leftrightarrow R^2+\rho^2=O\Omega^2\Leftrightarrow puiss(\Omega/\mathcal{C})=\rho^2\Leftrightarrow puiss(O/\Gamma)=R^2$.
   Vérifier, si $[MM']$ est un diamètre de Γ, que ceci équivaut à : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=R^2$.
   (b) On dit que M et M' sont conjugués / $\mathcal{C}$ si le cercle de diamètre $[MM']$ est $\perp$ à $\mathcal{C}$.
   . Si la droite (MM') coupe $\mathcal{C}$ en P,P', vérifier que $MM'PP'$ est une D.H. (cf. **4.6** ; etc.)
   . (Idem) Si (OM) coupe $\mathcal{C}$ en A,B ; et Γ en M,μ, vérifier que (A,B,μ,M) est harmonique.
   (c) Avec la définition, montrer que si $M_0\binom{x_0}{y_0}\neq O$, le lieu de ses conjugués est la droite d'équation $xx_0+yy_0=R^2$ (orthogonale à OM_0 ; calculs à éviter) : **polaire de** M_0. M_0 **est dit son pôle**.
   La droite de l'infini est la polaire du centre O ; pour tout diamètre $[P,Q]$: $(P,Q,O,\infty)=-1$.
2. **Conséquences**.
   (a) Si M_0 est sur $\mathcal{C}$ montrer que sa polaire, notée (m_0), est la tangente en M_0.
   (b) Si M_0 extérieur, tracer les tangentes M_0T, M_0T' : justifier que sa polaire est (T,T').
   (c) Si M_0 intérieur, soit $\Delta\perp OM_0$ en M_0 ; $S,S'=\mathcal{C}\cap\Delta$; $U=Tang._S\cap Tang.'_S$. Polaire ?
3. **Réciprocité polaire.** La relation de conjugaison étant symétrique ($\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=R^2$), si la polaire de M passe par M', celle de M' passe par M : droites "conjuguées" ; et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(a,b)$ (π). D'où :
   (a) (1) Si un point décrit une droite $\Delta; O\notin\Delta$, sa polaire pivote autour du pôle de cette droite ;
   (2) et si une droite pivote autour d'un point $I\neq O$, son pôle décrit la polaire de ce point.
   (b) (3-3') Des points sont alignés sur une droite ne contenant pas O (respectivement contenant O) $\Leftrightarrow$ les polaires sont concourantes au pôle de cette droite (resp. parallèles).
   (c) (4-4') A,B,C,D sont en $D.H.\Leftrightarrow$ les polaires $(a),(b),(c),(d)$ forment un faisceau harmonique. Plus généralement : A,B,C,D alignés sur une droite ne contenant pas $O\Leftrightarrow(a),(b),(c),(d)$ concourantes $-$ au pôle $-$: comme ces polaires sont resp. $\perp$ à OA,OB,OC,OD, le faisceau des 4 polaires est isométrique à celui des 4 droites $OA,\ldots$: même birapport. Et : si A,B,C,D sur une droite contenant O, les polaires sont parallèles ; avec $x_{M'}=R^2/x_M$: même résultat.

4. Exercices avec indications

(a) Soit (O,R) un cercle et M un point. Si MUV et $MU'V'$ sont sécantes au cercle issues de M et si $P=(U'V)\cap(UV')$, $Q=(UU')\cap(VV')$ alors la polaire de M est la droite (P,Q).

[En effet, M et P sont conjugués par rapport au couple de droites UU' et VV' : Si on a une D.H. PP_1UV' les droites QU, QV', QP_1, QP sont un faisceau harmonique donc les conjugués de P forment une droite passant par Q ; et idem par M avec UV et $U'V'$: c'est MQ ; MPQ triangle autopolaire. (D'où si $UV\cap PQ=M'$, $MM'UV$ harmonique, M' conjugué de M par rapport au cercle : le cercle de diamètre $[MM']$ est $\perp(O,R)$. Idem avec $M"=PQ\cap U'V'$).]

(b) Soit un triangle ABC, dont les bissectrices intérieures coupent le cercle circonscrit en $A_0B_0C_0$. Si M est sur les tangentes en A et A_0, etc., alors : M,N,P sont alignés.

[Biss. int. concourantes $\Rightarrow$ pôles alignés. Idem avec les médianes (AA'), hauteurs AA_1, etc.]

(c) Soit ABC de cercle inscrit $\mathcal{I}(i,r)$ touchant les côtés en i_1,i_2,i_3 ; la polaire de A /$\mathcal{I}$ est (i_2,i_3) donc le pôle de (A,H) est $M=(i_2,i_3)\cap\alpha$, $\alpha\perp(A,H)$ passant par i ; idem avec N,P : M,N,P alignés, car hauteurs conc. Idem : pôle de (Ai_1)... conc. (point de Gergonne) ...

(d) Enfin si deux courbes sont tangentes en un point, les polaires aussi **29.11** (exercice).

5. **Birapport de 4 points réels cocycliques : réel.** **4.6**... (cas de points alignés : connu).

(a) Montrer : $\forall M\in\mathcal{C}$, $[M;A,B,C,D]=cte$-réelle. (Avec le Th. de l'angle inscrit : une rotation affine transformant ce faisceau en $[N;A,B,C,D]$ $N\in\mathcal{C}$: on dit birapport $[A,B,C,D]$ et bien sûr, on peut faire tendre M vers A, ce qui donne une tangente : birapport (T_A,AB,AC,AD).

(b) et cte =birapport des affixes complexes. (Un changement de repères − qui ne modifie pas le birapport − ramène au cas où $O\in$ Cercle et centré sur Ox ; avec une inversion $z'=1/\overline{z}$, le Cercle est transformé en une droite et le birapport réel, est seulement conjugué, donc conservé).

(c) Inversement, birapport des affixes complexes réel $\Rightarrow$ points cocycliques, si non alignés.

6. **Quadrangle harmonique et conjugaison.** **4.7**. (A,B,M,M') (QH) si birapport $=-1$. Ici (A,B,C,D).

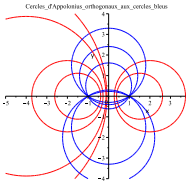
(a) Th. Si $\mathcal{C}(C,R)$ est un cercle ; $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ une droite : $\|\vec{u}\|=1$; si $\vec{u}$ varie en direction, $\mathcal{D}\cap\mathcal{C}=\{M,M'\}$ on a : $\overline{AM}.\overline{AM'}$ constant et vaut $puiss(A/\mathcal{C})=CA^2-R^2=d^2-R^2$: "puissance du point $A/\mathcal{C}$".

Démonstration **par calcul vectoriel, sans repère !** Pour $\mathcal{D}$: $\overrightarrow{AM}=\lambda.\vec{u}$. Pour $\mathcal{C}$: $\overrightarrow{CM}^2=R^2$. Donc $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})^2=R^2$ d'où $\lambda^2+2.\lambda.(\vec{u}\,.\,\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{CA}^2-R^2=0$ ($\|\vec{u}\|=1$ choisi). Le produit des racines vaut $\lambda.\lambda'=(\lambda.\vec{u})\,.\,(\lambda'\vec{u})=\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{CA}^2-R^2$. Fini ! 3 cas : 1) $A\in\mathcal{C}$, 2) A intérieur $\Leftrightarrow puiss(A/\mathcal{C})<0$. 3) A extérieur au cercle $\Leftrightarrow puiss(A/\mathcal{C})>0$: avec une tangente AT au cercle, on a aisément $AT^2=d^2-R^2$.

(b) Utilisation. Ensemble des points du plan M : $\frac{MA}{MB}=k$, $A\neq B$, $k\geqslant 0$; courbe notée $\mathcal{C}_k$. ($k=1$: médiatrice).

Si $k\neq 1$, $\mathcal{C}_k$ est un cercle (d'Apollonius) centré sur (A,B). (*) Et $\mathcal{C}_k\perp$ à tout cercle Γ passant par A et B.

Démonstration ($k\neq 1$ sinon clair ; A et B points communs du dessin). 1) On a donc $\overrightarrow{MA}^2-k^2.\overrightarrow{MB}^2=0$ ou $(\overrightarrow{MA}+k.\overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MA}-k.\overrightarrow{MB})=0$. Si U : baryc.$(A,1)(B,+k)$, V : $(A,1)(B,-k)$: $(1+k).\overrightarrow{MU}=\overrightarrow{MA}+k.\overrightarrow{MB}$, $(1-k).\overrightarrow{MV}=\overrightarrow{MA}-k.\overrightarrow{MB}$. D'où $\overrightarrow{MU}\,.\,\overrightarrow{MV}=0$, $\overrightarrow{MU}\perp\overrightarrow{MV}$: M décrit le cercle de diamètre $[UV]$.



2) (*) Pour l'orthogonalité $\frac{UA}{UB}=\frac{VA}{VB}=\frac{MA}{MB}=k$, $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}}=-\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$ (1) : on dit que A,B,U,V sont en division harmonique. [$\Rightarrow U$ et V pieds des biss. de AMB]. Celà entraine la relation de Newton **4.6** :

Si Ω est milieu de $[U,V]$, $\Omega U^2=\Omega V^2=\overline{\Omega A}.\overline{\Omega B}$ (2) : écrire $\overline{UA}=\overline{U\Omega}+\overline{\Omega A}$, etc, pour passer de (1) à (2).

Si maintenant Γ passe par A et B : $\overline{\Omega A}.\overline{\Omega B}=puiss.\Omega/\Gamma$; ici, Ω est extérieur ($puiss>0$) ; si T est un point d'une tangente à Γ issue de Ω, $puiss(\Omega/\Gamma)=\Omega T^2$ (Th.) ; et aussi ΩU^2 avec (2). Ceci indique que $\mathcal{C}_k\perp\Gamma$!

(c) Montrer : A,B,C,D, situés sur le cercle $\mathcal{C}$ forment un $QH\Leftrightarrow(AB)$ et (CD) conjuguées.

($\Rightarrow$ $[B;C,D,A,\omega]$ harm. ; $\omega\in(C,D)$ conj. de P : pôle de (A,B) ; $(AB),(CD)$ conjuguées.
$\Leftarrow$: Si le pôle ω de AB est sur CD, $[C,D,P,\omega]=-1$ et $[B;C,D,A,\omega]$ harm. ; $B\omega$ étant tangente, on a $[A,B,C,D]=-1$: Q.H. Voir aussi le cas où AB, CD diamètres, $\omega=\infty$!)

Rem. Ω, pôle de $(C,D)/\mathcal{C}$: $\Omega\in(A,B)$, centre de $\Gamma\perp\mathcal{C}$; $\omega P\Omega$ autopolaire, d'orth. O centre de $\mathcal{C}$.

29.11 Polarité par rapport à un cercle, Théorème de Salmon, tppr

1. **Théorème de Salmon**. Soit A, M de polaires $(a), (m)$; α, μ les proj$_\perp$ de A, M respectivement sur $(m), (a)$, A', M' celles de O sur, respectivement $(a), (m)$; Δ la bissectrice de $[OA), [OM)$.
   (a) Justifier que : $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OM}.\overline{OM'} = R^2$. En déduire que :
   (b) dans la similitude inverse composée de la réflexion/Δ et $h(O, \overline{OM}/\overline{OA})$: $A \mapsto M$, $M' \mapsto A'$.
   (c) Par conservation de l'orthogonalité, justifier que : $\alpha \mapsto \mu$ et $\boxed{\overline{A\alpha}/\overline{M\mu} = \overline{OA}/\overline{OM}}$:
   $\boxed{\text{Le rapport des dist. à } O \text{ de } A \text{ et } M \text{ vaut celui des dist. de } A \text{ et } M \text{ à la polaire de l'autre.}}$
   (d) Ou bien : voir que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{O\alpha} = R^2$; donc $\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M\mu}) = \overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\alpha})$ ...

2. Définition. La **tppr** de cercle $\mathcal{C}(O, R)$ est la bijection pôle-polaire. (Transf. par polaires réciproques).
   A toute figure F formée de points et de droites correspond f formée de droites et de points.
   (A des points alignés avec O, correspondent des droites parallèles.)
   A toute propriété de F correspond une propriété de f dite "corrélative". F est dite autopolaire si $F = f$: c'est le cas **d'un triangle conjugué** (chaque sommet est le pôle du côté opposé).

3. **Courbes polaires réciproques**. [Calcul avec le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$.]
   On suppose une Courbe C^1 donnée comme ensemble de ses points ou enveloppe de ses tangentes. Lorsque M décrit la Courbe $(u(t), v(t))$ le pôle δ de la tangente Δ, $x.v'(t) - y.u'(t) + u'v - uv' = 0$ décrit une courbe [d'équation ci-dessous] ; et la polaire (m) de M : $x.u(t) + y.v(t) = 1$, enveloppe aussi cette même courbe décrite par δ ; (en prenant 2 tangentes en M, M' proches, de points de Courbe ou par calcul) : $x = \dfrac{-v'}{u'v - uv'} = \dfrac{(1/v)'}{(u/v)'}$, $y = \dfrac{u'}{u'v - uv'} = \dfrac{(1/u)'}{(v/u)'}$. Application involutive !

4. $\boxed{\text{Transformée } \textbf{du cercle } (A, r) \text{ décrit par } \alpha, \text{ id est : } A\alpha = r.}$ [Revoir le Théorème de Salmon.]
   Notons $d = OA$, le théorème de Salmon donne : $\dfrac{MO}{M\mu} = \dfrac{d}{r}$, (m) étant tangente variable au cercle.
   Donc : La tppr par rapport au cercle (O, R) du cercle (A, r) est la **conique de foyer O ; de directrice (a), polaire de A par rapport au cercle (O, R) ; d'excentricité** $e = \dfrac{d}{r} = \dfrac{OA}{r}$.
   D'où, si $r = d$, c'est-à-dire si $O \in$ cercle (A, r), la tppr est une parabole (courbe non fermée) !
   $\boxed{\text{Toute propriété du cercle a une propriété corrélative focale pour la conique obtenue.}}$ **Ainsi :**
   (a) Comme (m) tangente au cercle est orthogonale en α à $A\alpha$ on aura $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OT}$, T pôle de $A\alpha$ mais T est intersection de (a), polaire de A = directrice, et de celle de α = Tangente en M.
   Donc la portion de tangente à une conique comprise entre M et T sur la directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit. Et points M, F, M' alignés donnent le même T.
   Si on a une parabole, $\widehat{MTM'} = \pi/2$ et si $(M, M')//$Tangente en $E \in \mathcal{P}$, $(TE)//Axe$:
   (Si $Ox = Axe$; $I, I' = Tang. \cap Oy$: $y_I = \dfrac{y}{2}$; milieu II' = milieu TF : $y_T = \dfrac{y + y'}{2}$; c'est y_E.)
   (b) Deux tangentes (m) et (m') en α, α' sont symétriquement inclinées sur la droite (α, α').
   Donc (O, S) S : pôle de (α, α'), est bissectrice de OM, OM' ; or le pôle S de (α, α') est l'intersection des tangentes en M, M' ; (O foyer). D'où le **1er théorème de Poncelet**.
   (Le 2ème fait intervenir les 2 foyers ; chacun peut se démontrer avec le cercle directeur).

5. Autre démonstration de **29.10**.3.(c)
   $\boxed{A, B, C, D \text{ alignés sur une droite } \Delta \textbf{ dans le plan projectif} : (A, B, C, D) = (a, b, c, d).}$
   Si $\Delta \neq D_\infty$, ne contenant pas O : $(a), (b), (c), (d)$ concourantes au pôle δ ; si $A' = (OA) \cap (a)$ etc, on a $(A, B, C, D) = (OA, ...) = (A', B', C', D')$ ici cocycliques ! ceci vaut $(\delta A', ...)$ ou (a, b, c, d).
   Si $O \in \Delta$, les polaires sont parallèles ; $x_{M'} = R^2/x_M$ et même birapport (Δ, sécante possible) !
   Si points de D_∞, on a 4 directions donnant 4 diamètres, de polaires : les diamètres orthogonaux.

6. **Lien avec la podaire**. Soit un point O et une courbe γ ; la podaire de γ le lieu γ_1 de H noté P en **15.3** **30.6**, pied de la perp. abaissée de O sur les tangentes à γ ; γ est l'enveloppe des $\perp OH$, en H : antipodaire de γ_1. Le pôle K de la tangente/$\mathcal{C}(O,R)$ vérifie O,H,K alignés et $\overline{OH}.\overline{OK} = R^2$.

⇒ La tppr γ' de γ relativement à $\mathcal{C}(O,R)$ est l'inverse de la podaire γ_1 dans $Inv(O, puiss\ R^2)$.

C'est donc aussi l'antipodaire de l'inverse γ_2 de γ, puisque γ est la tppr de γ' (cf. Rem. 2).

Remarques : ▪ Quand la tangente à γ en A passe par O, la tppr γ' passe par le point à l'infini dans la direction $\perp (OA)$; la polaire de A (usuellement tangente à γ') étant l'asymptote à γ'.

▪ Si A est en O, on a une branche parabolique. Cf. cas du cercle contenant O, $\rho = 2acos(\varphi), R = a$.

▪ Soit γ enveloppe des droites $x.cos(\theta) + y.sin(\theta) = p(\theta)$; la podaire γ_1 a pour équation polaire $\rho = p(\theta)$; donc l'inverse/$\mathcal{C}(O,R)$ a pour équation $\rho = R^2/p(\theta)$: c'est aussi la tppr de γ.

7. Autres méthodes pour la tppr d'un cercle par rapport au cercle $\mathcal{C}(O,R)$

La tppr par rapport au cercle $\mathcal{C}(O,R)$ du cercle (A,r) est une conique de foyer O.

En effet la podaire d'un cercle (A,r) est un limaçon de Pascal ($\rho = a.cos(\theta) + r$, $a = OA$, $\theta = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}$) et une cardioïde si $O \in \gamma$; l'inverse est donc une conique de foyer O et une parabole si cardioïde.

Ou alors l'inverse γ_2 de γ est un cercle ou une droite si $O \in \gamma$. Et on sait que l'antipodaire d'un cercle est une conique de foyer O (on dit alors cercle "principal") tandis que l'antipodaire d'une droite (ne passant pas par O) est une parabole de foyer O (la droite étant sa tangente au sommet).

Ou encore si $\mathcal{C}(O,1)$ et Courbe : $A((a.r,0),r)$: $u = r.(a + cos(t))$, $v = r.sin(t)$ donne la courbe : $x = \frac{1}{r}.\frac{cos(t)}{1+a.cos(t)}$, $y = \frac{1}{r}.\frac{sin(t)}{1+a.cos(t)}$ ou en polaires : $\rho = \frac{1}{r}.\frac{1}{1+a.cos(t)}$, conique de foyer O ; de directrice (a) $x = 1/a.r$, polaire de A ; d'excentricité $e = a = d/r$. Si $O \in$ Cercle, $a = 1$: parabole.

Théorème de l'angle pivotant, utilisation : [L'arc capable et l'angle pivotant sont duaux.]

Soit un cercle $(O, OP = OQ = OM)$; $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}} = \theta\ (\pi)$ avec tangentes $(p),(q)$. Si $M_p \in (p), M_q \in (q)$ sont tels que $\widehat{\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_q}} = \theta\ (\pi)$, alors $(m) = (M_pM_q)$ enveloppe le cercle ; $\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}} = 2.\theta$.

Plus généralement :

Si $(p),(q)$ 2 droites, $O \notin (p) \cup (q)$; $M_p \in (p)$, $M_q \in (q)$ tels que $\widehat{\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_q}} = \theta(\pi)$: l'enveloppe des droites $(M_pM_q) = (m)$ est une conique de foyer O tangente à (p) et (q) en P,Q et $\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}} = 2\theta$.

En effet : Avec une tppr/ $\mathcal{C}(O,R)$, soit P', Q', M' les pôles (à dist. finie) de $(p),(q),(m)$; on a $\overrightarrow{OM_p} \perp \overrightarrow{P'M'}$ car M_p pôle ; donc $(\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'Q'}) = \theta(\pi)$. Ainsi M' décrit un cercle, (Th. de l'arc capable) et par suite, $(m) = (M_p, M_q)$ enveloppe une conique de foyer O. La tangente (p) en P correspond à : $M_q = (p) \cap (q)$ d'où $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{O.p \cap q}) = \theta$; et idem avec $\overrightarrow{OQ}$, donc $\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}} = 2.\theta$.

8. Remarques. ▪ Soit P et Q sur un cercle. Si M sur le cercle, l'angle $\widehat{(M,P),(M,Q)}$ est indépendant de M ; il en est de même du birapport $[MP, MQ, MI, MJ]$; il y a un lien ! Origine en $M \in \mathcal{C}(\mathcal{O},\mathcal{R})$:

$\widehat{(M,P),(M,Q)} = \theta$ ⇒ $[P,Q,I,J] = e^{-2.i.\theta}$; I, J, "points cycliques" **29.5** : formule de Laguerre.

D'où $(MP) \perp (MQ) \Leftrightarrow [P,Q,I,J]$ harmonique (Laguerre, "candidat à l'X" ajoute-t-on en général !)

En effet, on a les droites $MP : y = x.tan(\alpha)$ et $MQ : y = x.tan(\beta)$, elles coupent la droite de l'infini contenant les points cycliques $I(1,i,0)$, $J(1,-i,0)$ aux points $(1,tan(\alpha),0)$, $(1,tan(\beta),0)$.

Donc $[P,Q,I,J] = \frac{i - tan(\alpha)}{i - tan(\beta)} : \frac{-i - tan(\alpha)}{-i - tan(\beta)} = e^{2.i.(\alpha-\beta)} = e^{-2.i.\theta}$, avec $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$. **58.6**.

▪ On peut définir le birapport de 4 points et de 4 tangentes à une conique Γ.

▪ Avec $x = x_0 + X, y = y_0 + Y$, $\Gamma : A.X^2 + B.XY + C.Y^2 + D.X + E.Y = 0$ a une éq. par. $[Y = t.X]$: $x = \frac{at^2+bt+c}{gt^2+ht+l}$, $y = \frac{dt^2+et+f}{gt^2+ht+l}$; **inv.** 6 polynômes de $\mathbb{R}_4[t]$ sont liés : ces éq. param. donnent Γ.

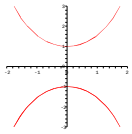
Si Γ $u = \frac{P}{R}$, $v = \frac{Q}{R}$, sa t.p.p.r./$\mathcal{C}(O,1)$ **29.11**.3 $x = -\frac{Q'R - QR'}{P'Q - PQ'}$, $y = \frac{P'R - PR'}{P'Q - PQ'}$: une autre conique !

▪ On peut encore étudier la tppr relative à une conique : tppr de $\mathcal{C}$ $x^2 + y^2 = R^2$ par rapport à $\mathcal{H}$ $x^2 - y^2 = a^2$? polaire de $M(R.cos(t), R.sin(t))$: $Rx.cos(t) - Ry.sin(t) = a^2$; enveloppe : $\mathcal{C}'(O, a^2/R)$.

30 Longueur et courbure des courbes planes

30.1 Courbes C^1 telles que $a.\mathcal{R} = a^2 + s^2$

1. Souvent, une courbe est donnée ; on cherche $\mathcal{R}$ et s ; ici c'est inverse ! Paramètre **naturel** : α.
   Et si une courbe est solution, si on la translate, ce sera **encore** une solution (car rien de changé pour $\mathcal{R}$ et s). Idem si on la tourne ... Les solutions sont définies à un déplacement près !
2. Puis $\frac{a.ds}{d\alpha} = a^2 + s^2$. Equation différentielle **non** linéaire mais à variables séparées $\frac{a.ds}{a^2+s^2} = d\alpha$ $Arctan(\frac{s}{a}) = \alpha - \alpha_0$. Choix de direction de $\overrightarrow{\imath}$ pour que $\alpha_0 = 0$ et choix d'origine intéressant ...
3. On revient à x, y par $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T}$ ou $\frac{dx}{ds} = cos(\alpha)$ $\frac{dy}{ds} = sin(\alpha)$. Donc $s = a.tan(\alpha)$, $ds = \frac{a.d\alpha}{cos^2(\alpha)}$ et : $dx = \frac{a.cos(\alpha)d\alpha}{cos^2(\alpha)} = \frac{a.d\alpha}{cos(\alpha)}$... primitive $x = a.ln \mid tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) \mid + x_0$ (difficile à savoir)

   $x = a.ln \mid tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) \mid$ $(x_0 = 0)$; $dy = \frac{a.sin(\alpha).d\alpha}{cos^2(\alpha)}$, $y = \frac{a}{cos(\alpha)} + y_0$; $y = \frac{a}{cos(\alpha)}$.
4. La courbe semble être une "chainette" : $y = a.\ ch(\frac{x}{a})$ à un déplacement près. Vérifions !
   Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ici : $y \geqslant 0$. Alors $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (donc valeur absolue inutile ici) :
   $x = a.ln\left(tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})\right)$; $tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) = e^{x/a}$. $\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = \frac{t + 1/t}{2} = \frac{t^2+1}{2.t}$ où $t = tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$.
   Mais : $\frac{2.tan(\theta)}{1 + tan^2(\theta)} = sin(2\theta)$. Ici $\frac{1}{sin(2.\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right))} = \frac{1}{cos(\alpha)}$: $\frac{y}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$!

30.2 (*) Quelques autres équations intrinsèques

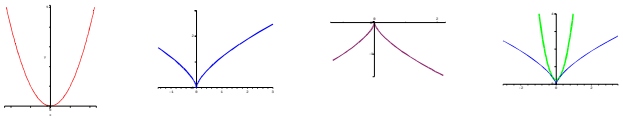
1. Idem : $R = s$ (autre cas $R = f(s)$) donnant $s = k.e^{\alpha}$; $\rho = k.\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\, e^{\theta} = K.e^{\theta}$ à déplacement près.
   (Ici dans un repère lié aux **tangentes**, lieu du Centre de Courbure : droite $Y = X$, $Y = R, X = s$.)
2. Idem : $R^2 = 2as$ ou $s = \frac{a}{2}\alpha^2$ donne une développante de cercle de rayon a à déplacement près.
   $[M = C + \lambda.\overrightarrow{\tau}$, $d\lambda/d\sigma = -1$ donc $\lambda = -\sigma + \lambda_0$. $x = cos(t) + t.sin(t)$, $y = sin(t) - t.cos(t).]$
3. **Autre type d'équation intrinsèque :** $s = g(\alpha),\ \mathcal{R} = g'(\alpha)$. **Exemple.** $s = a.\alpha$ **: Cercle.**
   Utilité : Si $\mathcal{C}$ (abscisse curviligne σ, rayon de courbure r) est la développée de Γ $(s, \mathcal{R})$ avec $C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}$: $d\sigma = d\mathcal{R}$; $\sigma = \mathcal{R} = g'(\alpha)$, $r = \frac{d\mathcal{R}}{d\alpha} = g"(\alpha)$ car $r = \frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{d\sigma}{d\alpha}$ $(= \mathcal{R}.\frac{d\mathcal{R}}{ds})$. Donc $s = k.e^{\alpha}$: développée isométrique ! Ex 2-3, clairs. $R = a.cot(\alpha)$: Tractrice et sym/Ox, cf. Ex 1.
4. Courbes cycloïdales **15.5**. On avait $s = \frac{-4\rho.m}{m-1}.cos(\frac{m-1}{2}.t)$, $\alpha = \frac{m+1}{2}.t$. D'où $s = K.cos(\omega.\alpha)$ $\omega = \frac{m-1}{m+1}$; et $t = \tau - \tau_0$, $\alpha = \theta - \theta_0$, si utile. **30.6.8.9**. Donc développée semblable (Lahire) !
   Et développée isométrique 'ssi' $\omega = 1$ ou $m = 1 + \frac{a}{\rho}$ infini ou a infini : seul cas de la cycloïde.
5. Notes. Cycloïde $R^2 + (s - 4a)^2 = 16a^2$; courbes cycloïdales $(m+1)^2R^2 + (m-1)^2s^2 = 16\rho^2m^2$.

30.3 (*) Parabole Γ $t \mapsto M(x=2t, y=t^2)$, normales

1. (a) Justifier que le foyer a pour coordonnées $F(0,1)$ et préciser la directrice $\mathcal{D}$ (ici $x^2=4y$).[25]
   (b) Donner l'équation vérifiée par le point (X,Y), décrivant la tangente en $M \in \Gamma$; fig.1.
   (c) Si $Tangente \cap Ox = \{T\}$, montrer : $\overline{OP} = 2\overline{OT}$ où $P(x,0) = proj_{\perp}(M)$ sur Ox. [Non demandé : ceci permet de construire la tangente en M ; ainsi que le foyer car MTF est rectangle en T].

2. Calculer $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$; et ds où $s = \widehat{OM}$. Soit $M_1(2,1)$; interpréter $I = \int_0^1 2.\sqrt{1+t^2}.dt$.
   Avec $t = sh(\varphi)$ et $ch^2(\varphi) = \frac{1+ch(2.\varphi)}{2}$, relier I à $J = \int_0^{ln(1+\sqrt{2})} ch^2(\varphi).d\varphi = \frac{ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2}$.

3. (a) Calculer $\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$; et $\overrightarrow{N}$. Avec $\alpha = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{T})$, vérifier que $tan(\alpha) = t$. Préciser $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha}$.
   (b) Vérifier les coordonnées du centre de courbure à transl. près $(X_c = -2.t^3, Y_c = 3.t^2)$; fig.2.[26]



Pour ellipse et hyperbole : (*) [27] [28] [29]

4. Propriété mécanique de $\mathcal{C}$, isochronisme de Leibnitz. Nouveau repère encore noté O,x,y ; fig.3 : Trouver les courbes telles qu'un point matériel, soumis à son poids et à la réaction normale (sans frottement), ait une vitesse verticale constante. On suppose qu'au temps $t=0$, $x = y = \frac{dx}{dt} = 0$. On note encore $\alpha = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{T}) \in [\frac{-\pi}{2}, 0]$. Ayant donc $\frac{dy}{dt} = -\beta$ ($\beta > 0$, constant) on a $y = -\beta.t$. Puis : $m.g = R.cos(\alpha)$, $m.\frac{d^2x}{dt^2} = -R.sin(\alpha)$ (>0) donnent (acquis) : $\frac{d^2x}{dt^2} = -g.tan(\alpha) = -g.\frac{dy}{dx}$.
   (a) Justifier que $\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dx}{dt} = g.\beta$ puis que $\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt})^2 = g.\beta.t$ et $x = k.t^{3/2}$, $k = Cte$.
   (b) Soit $x = k.\tau^3$, $y = -\beta.\tau^2$ (où $\tau^2 = t \geqslant 0$). On pose $u = \frac{x}{y}$: montrer que $x = l.u^3$; $y = l.u^2$, l nouvelle constante. Conclusion sur les $\mathcal{C}_{p,q} : x = p.\tau^3, y = q.\tau^2$ ("parabole semi-cubique") ?

5. Courbe orthoptique de $\mathcal{C}$. Tangente en M_0 passant par (X,Y) : $X + t_0.Y - t_0^3 = 0$; avec $\frac{+1}{t_0.t'_0} = -1$, que $t"_0 = -X$ solution. D'où l'autre parabole $Y = 1 + X^2$ (fig. 4) ; tangente à $\mathcal{C}$ car à l'intersection : $4.(Y - \frac{3}{2})^2.(Y+3) = 0$! Donc en $U,V(\pm 1/\sqrt{2}, 3/2)$ passent une tangente double et une normale à $\mathcal{C}$.

---

[25] Avec le foyer, justifier aussi que toutes les paraboles sont semblables entre elles.

[26] Normales à la parabole $y^2 = 2px$. Menées de $N(\alpha,\beta)$: $y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0$ (*) donc $y_1+y_2+y_3 = 0$. Avec : cercle $(x-A)^2+(y-B)^2 = R^2 \cap$ parab. : $y^4 + 4p(p-A)y^2 - 8p^2By + 4p^2(A^2+B^2-R^2) = 0$, **29.8**, donc contient M_1, M_2, M_3 $\Rightarrow y_4 = 0$; inversement, le cercle (M_1, M_2, O) contiendra M_3 : M_1, M_2, M_3 pieds des normales $\Leftrightarrow O, M_1, M_2, M_3$ cocycliques. Alors, $A = (p+\alpha)/2, B = \beta/4, R = \sqrt{A^2+B^2}$. Trois remarques : 3 solutions pour (1) $\Leftrightarrow N$ "intérieur" de la développée. Eliminant y de (*) et $y^2 = 2px$: $x_1+x_2+x_3 = 2\alpha - 2p$; si $N \in Ox$ ($\beta = 0$) $M_1 = O$ et $FM_2 = FM_3 = FN$ $(x_2 = \alpha - p)$. Enfin avec $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$ dans cercle $\cap$ par., le cercle osculateur en A la recoupe en D : $y_D = -3y_A$.

[27] (*) Si ellipse : $x^4 - 2a^2\alpha/c^2.x^3 + a^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)/c^4.x^2 + 2a^4\alpha/c^2.x - a^6\alpha^2/c^4 = 0$. 4 sol. : intérieur de développée. Ellipse $\cap (x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2$: $x^4 - 4a^2A/c^2.x^3 + 2a^2[2(a^2A^2+b^2B^2)+c^2k^2]/c^4.x^2 - 4a^4k^2A/c^4.x + a^4(k^4 - 4b^2B^2)/c^4 = 0$, $k^2 = A^2+B^2-R^2+b^2$ [Maple]. Si M_i sont les pieds des normales, $sym(M_4/O) \in$cercle$(M_{i,1\leqslant i\leqslant 3})$! (Joachimsthal) : Dém. $N(\alpha,\beta) \in normale.[x = acos(t), y = bsin(t)] \Leftrightarrow \alpha.asin(t) - c^2sin(t)cos(t) = \beta.bcos(t)$. Produit des racines de l'équation de degré 4 : $e^{i(t_1+t_2+t_3+t_4+\pi)} = 1$ et **29.8**. D'où si A_i, B_i centres : $x_1+x_2+x_3 = a^2(\alpha+2A_4)/c^2, x_4 = a^2(\alpha-2A_4)/c^2$, $A_4 = \alpha/2 - c^2x_4/2a^2, B_4 = \beta/2 + c^2y_4/2b^2$. $\sum A_i = \alpha$, $\sum B_i = \beta$. Hyp : changer b^2 en $-b^2$, HE : $c^2 = 2a^2$ changer b^2 en $-a^2$, $A_4 = \alpha/2 - x_4, B_4 = \beta/2 - y_4$, $\sum x_i = \alpha$! et $[A = A_4; \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \sigma'_2 = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$ ...] : $4(a^2A^2 + b^2B^2) + 2c^2k^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) = 2a^2(4A^2 - \alpha^2)$, $k^2 = A^2+B^2-R^2-a^2$; $\Rightarrow 4R_i^2 = \alpha^2+\beta^2$! En général (voir E. et H.) les M_i sur l'HE d'Apollonius : $c^2xy = a^2\alpha.y - b^2\beta.x$ passant par N, O ...

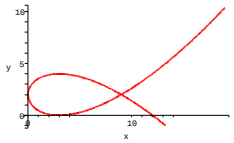
[28] Steiner : "Par $D \in Ell$ passe 3 cercles oscul. en $A,B,C \in Ell$; A,B,C,D cocycl." ; Joachimsthal : "et Isob.$(ABC) = O$". Géom. **29.8**. Isob$(A,B,C) = O \Rightarrow AO \cap BC = A'$, conjuguées : $Tang_A // BC$. $Con \cap C_{ABC} = D \Rightarrow T_A, AD$ ég. inclinées/axes et si $C_{osc.A} \cap Con = D^*$, idem pour $T_A, AD^* \Rightarrow D^* = D$. Et normales en A,B,C, hauteurs $\Rightarrow$ concourantes en N ...
Analyt. $D \in$ cercles osc. en A et en $B \Leftrightarrow 3t_1+t_4 = 2k.\pi$, $3t_2+t_4 = 2l.\pi$; $t_2 - t_1 = \pm 2\pi/3$; donc 2 sol. B,C : $t_2, t_3 = t_1 \pm 2\pi/3$. $t_1+t_2+t_3+t_4 = 2k.\pi \Rightarrow A,B,C,D$ cocycliques et ABC déduit de $A'B'C'$ équilatéral de centre O : O isob.(A,B,C).

[29] Si $A,B,M \in Ell$, $AM+MB$ maximum, on a réflexion en M -extremum lié- donc si Biss en M coupent (AB) en U,V : $[A,B,U,V]$ D.H., (A,B) contient V pôle de Norm, $\Rightarrow T$ pôle de $(A,B) \in$ Norm : $M \in$ HE d'Apollonius(T). Si $B = sym(A)$: $T = \infty_{T_A}$, $M = proj_{\perp}(T)$; $T_A, T_M, T_B, T_{M'}$ rectangle $\in C_{Monge}$; réflexion en M, AM//diag : $max = diag_{rect} = 2\sqrt{a^2+b^2}$!

30.4 (*) Au sujet des courbes de poursuite usuelles (...)

Un maitre partant de O se dirige sur Oy à la vitesse $v = k.V$, $0 < k < 1$. Son **chien** partant de $(a > 0, 0)$ se dirige vers lui en décrivant la courbe $y = f(x)$ à la vitesse $V = v/k$, $0 < k < 1$, $x \geqslant 0$.

1. Vérifier que l'ordonnée du maitre est $y - x.y'$ et que $\dfrac{d(y - x.y')}{dt} = k.V$ (1) éq. horaire.
   Vérifier que : $\dfrac{ds}{dt} = V$ (2) éq. horaire et aussi que $\dfrac{ds}{dx} = -\sqrt{1 + (y')^2}$.
2. En déduire que $x.y" = k.\sqrt{1 + (y')^2}$ (3) éq. différentielles avec coordonnées. Puis que :
3. [on peut poser $y' = sh(\varphi)$] $y' = \dfrac{1}{2}\left((\dfrac{x}{a})^k - (\dfrac{a}{x})^k\right)$ $(y'(a) = 0.)$ Et que la position du chien est
4. $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}(\dfrac{x}{a})^k + \dfrac{1}{k-1}(\dfrac{a}{x})^k\right) + C$, $k \neq 1$; $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2a} - a.ln(x)\right) + C$, $k = 1$; $(rattrapage \Leftrightarrow k < 1.)$
5. En déduire, avec $f(a) = 0$, que le temps de rattrapage est $\tau = \dfrac{a}{V}.\dfrac{1}{1-k^2}$ (avec $f(0)$, $\tau = \dfrac{C}{v}$).
6. On prend $k = \dfrac{1}{2}$. Vérifier que : $C = \dfrac{2}{3}.a$, $\tau = \dfrac{4}{3}.\dfrac{a}{V}$ et $\boxed{(y - \dfrac{2a}{3})^2 = \dfrac{x}{9a}(3a - x)^2}$ **"cubique de Tschirnhausen"** passant par $(a, 0)$ à tangente horizontale et $(0, 2a/3)$ à tangente verticale.



Angle $\dfrac{\pi}{3}$ au point double. En par. $x = a.u^2$, $y = \dfrac{2a}{3} + a.u(1 - \dfrac{u^2}{2})$.

Remarque. $b.y^2 = x^2(a - x)$ ou $x = a - b.t^2$, $y = t.x$: Cubique de Tsch. si $b = 3a > 0$.
Courbe de Lissajous si $a = 3b > 0$! en effet, $x = sin(2t), y = sin(3t + \pi/4)$ avec $t = \pi/4 - \varphi$:
$2x + 1 = 3 - T^2, 2y = T.(2x + 1)$ si $T = 2.sin(\varphi)$. Folium parabolique si $a = b$: $\rho = cos(2\theta)/cos^3(\theta)$.

30.5 Enveloppes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$; cf. 13.4 ; développée ; et 30.6

1. En dim 2 Si $D_t : a(t)x + b(t)y = c(t)$, montrer que l'enveloppe des D_t vérifie $\begin{cases} a(t).x + b(t).y = c(t) \\ a'(t)x + b'(t)y = c'(t). \end{cases}$
   Plus généralement l'enveloppe dans le plan des $f(x, y, t) = 0$ s'obtient par (1) et (2) $f'_t(x, y, t) = 0$.
   Si on a par contre $u \mapsto M(u, t)$, l'env. vérifie ici $\partial\overrightarrow{M}/\partial t, \partial\overrightarrow{M}/\partial u$ colinéaires ; relation symétrique.
   $(Env.)$: lieu des points où une courbe de la 1ère famille est tangente à une courbe de la 2ème.
   4 exemples : . Pour l'enveloppe des (C_t) : $a(x, y).t^2 + b(x, y).t + c(x, y) = 0$, faire $\Delta = 0$.
   . Pour (C_t) : $a(x, y).cos(t) + b(x, y).sin(t) = c(x, y)$, faire $a^2(x, y) + b^2(x, y) = c^2(x, y)$. Pour :
   . $[x - a(t)]^2 + [y - b(t)]^2 = R^2$, $x = a(t) \pm \dfrac{-R.b'(t)}{\sqrt{a'^2(t) + b'^2(t)}}$, $y = b(t) \pm \dfrac{R.a'(t)}{\sqrt{a'^2(t) + b'^2(t)}}$ // $t \mapsto (a(t), b(t))$.
   . $y = x.tan(\alpha) - g.x^2/2v_0^2cos^2(\alpha)$ [tir], $1/cos^2(\alpha) = 1 + t^2$, par. enveloppe : $y = v_0^2/2g - gx^2/2v_0^2$.
2. En dim 3 une famille de droites n'a pas d'enveloppe en général : Pour avoir $M(t) = A(t) + \lambda(t).\overrightarrow{v}(t)$ et $d\overrightarrow{M}/dt$ colinéaire à $\overrightarrow{v}(t)$, $\boxed{\text{CNS : } \exists \lambda(t), \mu(t) : A'(t) + \lambda(t)\overrightarrow{v}'(t) + \mu(t)\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{0}.}$
   Donc CN : $\det(A'(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{v}'(t)) = 0$ $(*)$. Supposons $(*)$ satisfaite :
   – si $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}' \neq \overrightarrow{0}$, $\lambda(t).\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}' = A' \wedge \overrightarrow{v}$ ... $d\overrightarrow{M}/dt = (\lambda' - \mu)\overrightarrow{v}(t)$, μ inutile. D'où $\lambda(t)$, $M(t)$.
   – si $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}'(t_0) = \overrightarrow{0}$: si $\begin{cases} A' \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, & D_{t_0} \text{ n'a pas de point caractéristique (droite singulière);} \\ A' \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, & \text{tous les points de } D_{t_0} \text{ sont caractéristiques (d. stationaire).} \end{cases}$
   Rem. : $\forall t, \lambda' = \mu$ possible : gerbe de droites conc. $\forall t, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$ possible : gerbe de droites //.
   Cas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ CN : $\alpha'b' - \beta'a' = 0$. Alors $\exists z(t), \mu(t)/\ldots : \mu(t) = 0$, $z = -\dfrac{\alpha'}{a'} = -\dfrac{\beta'}{b'}$.
   Tangentes à $(Env.)$: surf. développable ! **58.2.3, 59.5.** $(Env.)$ est appelée 'arête de rebroussement' : car à $z = z_0$, $x' = a'z_0 + \alpha'$ donc $x' = 0$; idem $y' = 0$; d'où un point de rebroussement.

30.6 Podaire, enveloppe, coordonnées polaires, courbure 15.5

– La podaire d'une courbe/un point O est le lieu des pieds des hauteurs abaissées de O sur les tangentes. Si la podaire a pour équation : $\overrightarrow{OP} = \rho.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}(cos(\theta), sin(\theta))$, la courbe initiale (E) : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}_1$ avec $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ col. à $\overrightarrow{u}_1$. Donc $\lambda = \rho'$ et (E) a pour équation $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u} + \rho'\overrightarrow{u}_1$: enveloppe des droites $D_\theta : x.cos(\theta) + y.sin(\theta) = \rho(\theta)$. Considérons $D'_\theta : -x.sin(\theta) + y.cos(\theta) = \rho'(\theta)$; $D'_\theta \perp D_\theta$, passant par $M \in (E)$, donc par N, tel que $OPMN$ soit rectangle : $\overrightarrow{ON} = \rho'(\theta).\overrightarrow{u}_1$. D'_θ : Normale en M.

– Développée $\mathcal{C}_0$ de $(E) = \Gamma_0$: l'enveloppe des D'_θ. $D"_\theta$ est $\perp \overrightarrow{u}$ et passe par L : $\overrightarrow{OL} = \rho".(-\overrightarrow{u})$. Donc le rayon de courbure de (E) est donc $\mathcal{R}$ tel que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PL} = (\rho" + \rho)(-\overrightarrow{u})$. $\mathcal{R} = \rho + \rho"$, $\rho_{podaire}$.

– Tangente à la podaire : $\frac{\overrightarrow{dP}}{d\theta} = \rho'\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{u}_1$. [Exemple : $\rho = a(1 + cos(\theta)) \Rightarrow (E)\ x^2 - 2ax + y^2 = 0$.] Normale dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)$. $\rho'(X - \rho) + \rho.Y = 0$; la normale passe par $N(0, \rho')$ ou ω milieu de $[OM]$: Podaire : **enveloppe des cercles de diamètre** $[OM]$. Env.cercles ($\begin{smallmatrix}\text{centre } M\\ \text{contient } O\end{smallmatrix}$) $= h_{O,2}(Podaire)$.

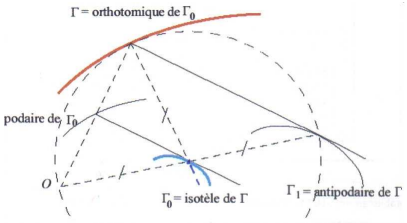
– Propriétés : [Si $\rho = b.sin(k.\theta - \varphi)$, (E) est une courbe cycloïdale $k = \frac{m-1}{m+1}$, $m = \frac{1+k}{1-k}$ **15.5**.5 **30.2**.]

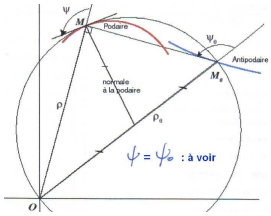
1. (P) étant la podaire de (E), on dit que (E) est l'antipodaire de (P) ; et aussi que (E) est l'orthocaustique de (P) [Enveloppe des rayons "réfléchis" issus de O, mais ici réflexion à **angle droit** !]

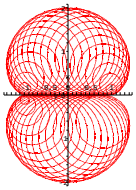
2. Soit $(Q) = \text{homothétique}_{O,2}(Podaire)$. (Q) est le lieu des sym. de O / aux tangentes à (E), on dit l'orthotomique de (E) fig.1.2 ; donc aussi l'enveloppe des cercles centrés sur (E) passant par O.
   Sa développée $\mathcal{C}$, enveloppe des (MQ), est la caustique de (E) pour la source placée en O.
   [On dit parfois que $(Q) = \Gamma$ anticaustique ; et (E) caustique inverse de cette développée de (Q).]
   (E) est encore le lieu des points équidistants de (Q) et O $[\overrightarrow{MQ} \perp (Q)]$ [l'isotèle de (Q)] et aussi la **polaire** (tppr) de l'inverse de (P) [Si $\overline{OP}.\overline{OK} = a^2$: polaire de $K/Cercle(O, a) = (M, P)$].
   Enfin : Faisant rouler sur (E) fixe, sa symétrique/Tangentes : le point $O' = Q$ décrit l'orthotomique qui est donc aussi une "roulette" : ainsi une cardioïde est podaire d'un cercle/un de ses points O et épicycloïde de rebroussement O. L'orthotomique d'une Parabole/F : Directrice. Autres cas ?

3. Remarques. • Si $O = \infty$ (rayons incidents //) la caustique est aussi une développée : si Δ droite $\perp$ rayons, $H = proj_\perp(M, \Delta)$, $S = sym(H/Tang.\ en\ M)$. Le lieu de S est l'anticaustique/Δ (env. des cercles : centre M,tang. à Δ,*) ; sa développée est la caustique à ∞ de (E), courbe réfléchissante.
   Ex. Caustique d'un cercle C. Si $O \in C$, cardioïde de sommet O [dév. de card.] ; si $O = \infty$, nephroïde car si 2 cercles de rayon R, $\frac{R}{2}$, sont tangent ext. en I, $(\Omega, \widetilde{AI})$ et $(U, \widetilde{IM})$, $\widetilde{AI} = \widetilde{IM}$: tang. en $M = (MJ)$, où $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{UJ}$, (ΩJ) biss. de (MJ), $(J\overrightarrow{\imath})$, $\overrightarrow{\imath}$ col à $\overrightarrow{\Omega A}$: néphroïde caustique de ∞ pour le Cercle (Ω, J). Et $\delta(I, \Omega A) = IM$: enveloppe.cercles$_{centre.I \in C_0(\Omega,R).tangent.diam\Omega A}$, néphroïde car tangents à (MJ) en M. fig.3.
   • Cercles $C_t \perp C_0$, $\Omega \in$ Axe-rad.$(C_t, C_{t'})$, $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = R^2 \Leftrightarrow$ env.(C_t) : courbe anallagmatique !
   • $\mathcal{C}$ourbe : env. de ses cercles osculateurs. Et courbes//$\mathcal{C}$: env. des cercles (centrés sur $\mathcal{C}$, $r = cte$).
   [Note : Trajectoires$_\perp$ de cercles centrés sur Ox ; $x = \lambda + R(\lambda).cos(\varphi)$, $y = R(\lambda).sin(\varphi)$. Trajectoires $\perp$: $dy/dx = tan(\varphi) \Rightarrow d\varphi/sin(\varphi) = d\lambda/R(\lambda)$ ... $R(\lambda) = cte$, tractrice ; $R(\lambda) = \lambda$, cercle tangent à Ox en O.]

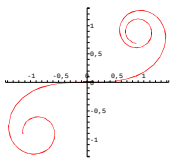
4. Exercices. . Antipodaires (orthocaustiques) d'une droite $\mathcal{D}$: paraboles, $F = O$, tang. au sommet $\mathcal{D}$.
   Podaire des coniques à centre/un foyer F : cercle principal $\mathcal{C}$. [Orthot. : $h_{F,2}(\mathcal{C}) = cercle\text{-}dir.\ de\ F$.]
   . Podaire d'une hyperbole équilatère/son centre : Lemniscate de Bernoulli [=Aussi inverse HE/Centre.]
   [(*) tppr d'une conique/Cercle(O, a) : ellipse si $O \in$région.foyer, hyperb. si O ext., parab. si $O \in$conique.]
   . Podaire d'une par./sommet : Cissoïde droite ; /pied de dir. : Strophoïde droite [inverse HE/Sommet] ...







Spirale de Cornu



30.7 Equation intrinsèque $R.s = 1$: spirale de Cornu (fig. 4)

Montrer que les courbes $\frac{1}{R} = s$ sont, à déplacement près : $x = \int_0^s cos(u^2/2)du$, $y = \int_0^s sin(u^2/2)du$.

30.8 (*) Au sujet des normales à certaines courbes (...)

1. Une propriété de l'ellipse. Soit $(x = a.cos(t)\ y = b.sin(t))$ une ellipse.
   La normale en M coupe Ox en P et Oy en Q. Montrer que $\overline{PM}/\overline{QM} = b^2/a^2$.
2. Sur la parabole. Soit une normale à la parabole $y^2 = 2px$ en M, coupant la directrice $(x = -p/2)$ en N et de centre de courbure C en M. Vérifier que $x_c + \frac{p}{2} = 3.(x + \frac{p}{2})$ ainsi : $\overrightarrow{MC} = -2.\overrightarrow{MN}$.
3. Pour la chainette $y = a.ch(\frac{x}{a})$, si $N = Normale \cap Ox$, vérifier l'égalité : $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MN}$.
4. La normale en M à une cycloïde $x = a(t - sint(t))$, $y = a(1 - cos(t)$ coupe Ox en P et le cercle qui génère la cycloïde est supposé être MPM_1P_1 ces 2 derniers points diamétralement opposés.
   (a) Vérifier qu'on passe de (M_1P_1) à (MP) par une translation de vecteur $-2.a\overrightarrow{\jmath}$. Puis que :
   (b) M_1 décrit une cycloïde translatée de $a.\pi.\overrightarrow{\imath}$ et de tangente en M_1 : (M_1P_1) donc que M_1 est le point caractéristique de (M_1P_1) **56.1**. Si C point caractéristique de (MP) : $\overrightarrow{M_1C} = -2.a.\overrightarrow{\jmath}$, d'où la développée de la cycloïde initiale obtenue par translation et $\overrightarrow{MC} = 2.\overrightarrow{MP} = 2.\overrightarrow{MN}$!
5. Développée de courbe cycloïdale **15.5**.5. Soit M un point de la 'roulette' (contact des 2 cercles en P) M_1, P_1 diam. opposés ; $h : dr(M,P) \mapsto dr(M_1,P_1)$ l'homothétie(O du cercle fixe, rapport $\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP}}$). La tangente au lieu de M_1 (courbe cycloïdale décalée d'une 1/2 période) est (M_1, P_1) [normale(P, M_1)] : M_1 point caractéristique de (M_1, P_1) ; $\mu = h^{-1}(M_1)$ p.caract. de (PM) normale (idem à 'Euler-Savary') décrit aussi une courbe cycloïdale, la développée. $(m = 1 + \frac{a}{r}, \frac{P\mu}{PM} = \frac{1-m}{1+m}, \frac{M\mu}{MP} = \frac{2m}{m+1}, \frac{O\mu}{OM_1} = \frac{m-1}{m+1})$.

30.9 (*) Enveloppe de droites et courbes particulières

1. Soit une tige de longueur fixe $P(a.cos(t), 0) \in Ox$, $Q(0, a.sin(t) \in Oy$.
   (a) Montrer que l'enveloppe des (P,Q) est une astroïde $\begin{pmatrix} x = a.cos^3(t) \\ y = a.sin^3(t) \end{pmatrix}$, $t = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$. [C.I.R. (non centre de Courbure) $M(a.cos(t), a.sin(t))$. Point caractéristique $I = proj_\perp(M, (P,Q)$.]
   (b) Et que l'enveloppe des médiatrices de $[P,Q]$ est une même astroïde mais tournée de 45°.
   [Point caractéristique $J = proj_\perp(M, Mediatr.\Delta)$ car solide ; si $\overrightarrow{OK} = 2.\overrightarrow{OJ}$, (I,M) enveloppe le lieu de K : astroïde 2 fois plus grosse tournée de 45°, développée de l'astroïde ; d'où J !]
2. Soit $A(a.cos(t), a.sin(t))$ et $B(a.cos(m.t), a.sin(m.t))$, $m \neq 1$. Vérifier que :
   (a) (A,B) a pour équation : $x.cos\frac{m+1}{2}.t + y.sin\frac{m+1}{2}.t = a.cos\frac{m-1}{2}.t$. (**30.**6.) Puis
   (b) $D_m + iD'_m$: $z.e^{-i.\frac{m+1}{2}.t} = \frac{a}{m+1}(e^{i.\frac{m-1}{2}.t} + m.e^{-i.\frac{m-1}{2}.t})$ ou $z = \frac{a}{m+1}\left(e^{i.m.t} + m.e^{i.t}\right)$.
   [Courbes cycloïdales aussi, se ramener à $z = \rho\left(m.e^{it} - e^{im.t}\right)$] avec $t = \tau - \tau_0$. **cf. 15.5**...
3. Avec les tangentes aux courbes cycloïdales : $x.sin\frac{m+1}{2}t - y.cos\frac{m+1}{2}t = a.\frac{m+1}{m-1}sin\frac{m-1}{2}t$, on a l'enveloppe des D_θ $(\frac{m+1}{2}t = \theta + \frac{\pi}{2})$: $x.cos(\theta) + y.sin(\theta) = b.sin(k.\theta - \varphi)$ (courbe initiale) et inversement par rotation de repère $k = \frac{m-1}{m+1}$, $b = a.\frac{m+1}{m-1}$. Par calcul (si on veut aussi) la développée, enveloppe des D'_θ, a la même forme (**30.**6, $k \neq 1$) : c'est donc une courbe cycloïdale semblable !
4. Sur les droites réfléchies sur $y = e^x$, des droites verticales venant de $+\infty$ dans le sens des y.
   (a) Equation ? [si $f'(x) = e^x = tan(\alpha)$, pente $= tan(\frac{\pi}{2} + 2.\alpha) = \frac{-1}{tan(2.\alpha)} = \frac{e^{2x}-1}{2.e^x} = sh(x)$.]
   (b) Enveloppe ? [enveloppe des droites $Y - e^x = (X - x).sh(x)$; trouver $Y = ch(X + 1)$!]

31 Fonctions de plusieurs variables : Continuité

31.1 Continuité de $f(x,y) = (1 - cos(\sqrt{|\, x.y\,|}))/\,|\, y\,|$ [corrigé]

. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$, Δ étant $y = 0$; elle y est continue par les théorèmes généraux.

. Peut-on la prolonger par continuïté au point $(x_0, 0)$ de Δ ?

On a $1 - cos(\sqrt{|\, x.y\,|}) \underset{(x,y)\to(x_0,0)}{\sim} \dfrac{|\, x.y\,|}{2} [= \dfrac{h^2}{2}]$; donc $f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,0)}{\longrightarrow} \dfrac{|\, x_0\,|}{2}$ pour $x_0 \neq 0$ et $x_0 = 0$.

Ainsi $\boxed{\text{de poser : } f(x_0,0) = \dfrac{|\, x_0\,|}{2} \quad \text{prolonge } f \text{ par continuïté sur tout } \mathbb{R}^2.}$

31.2 (*) Tangentiels de 3 points alignés d'une cubique : alignés

Le titre correspond au cas particulier 2.(d).

1. Soit Γ une courbe plane algébrique de degré n d'équation $F(x,y) \equiv \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x,y) = 0$ où φ_k est homogène de degré k ; et soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p points **quelconques** de ce plan. (Exemple : $n = 3, p = 4$).

   Notons $M_{i,j} = \Gamma \cap (A_i A_{i+1})$, $1 \leqslant j \leqslant n$ car n points d'intersection à i fixé ; $A_{p+1} = A_1$. Puis :

   $M = \dfrac{A_i + \lambda.A_{i+1}}{1+\lambda}$, donc $\dfrac{\overline{MA_i}}{\overline{MA_{i+1}}} = -\lambda$; $\lambda_{i,j}$ correspondant aux $M_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

   a) Vérifier que les $(\lambda_{i,j}), 1 \leqslant j \leqslant n$, sont racines de $\sum_{k=0}^{n} (1+\lambda)^{n-k} \varphi_k(x_i + \lambda x_{i+1}, y_i + \lambda y_{i+1}) = 0$.

   b) Que le coefficient de λ^n vaut $F(A_{i+1})$; et que le coefficient constant vaut $F(A_i)$.

   c) Que $(-1)^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} = \dfrac{F(A_i)}{F(A_{i+1})} = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{\overline{M_{i,j}A_i}}{\overline{M_{i,j}A_{i+1}}}$; et qu'au total : $\prod_{i=1}^{p} . \prod_{j=1}^{n} \dfrac{\overline{M_{i,j}A_i}}{\overline{M_{i,j}A_{i+1}}} = 1$.

2. On prend maintenant le cas d'une cubique et on suppose connu le théorème de Ménélaüs.

   (a) Soit L, L' deux droites coupant Γ en P, Q, R; P', Q', R' ; $A = QQ' \cap RR'$, etc. Figure ?

   (b) Notons $P" = (PP') \cap \Gamma$, $Q"$, $R"$, idem :
   Que dire (avec q.1) de la quantité $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} . \dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} . \dfrac{\overline{P"B}}{\overline{P"C}} . \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} . \dfrac{\overline{Q'C}}{\overline{Q'A}} . \dfrac{\overline{Q"C}}{\overline{Q"A}} . \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} . \dfrac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} . \dfrac{\overline{R"A}}{\overline{R"C}}$?

   (c) Le théorème de Ménélaüs donne $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} . \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} . \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ et une autre relation ; conclusion ?

   (d) Que peut-on déduire dans le cas particulier : $P = P'$; $Q = Q'$; $R = R'$? (tangentes).

   (e) Cas des points d'inflexions de Γ. Si la condition d'alignement de 3 points P, Q, R est :
   $(*)$ $a.t_1t_2t_3 + b.(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + c.(t_1 + t_2 + t_3) + d = 0$, les points d'inflexions sont solutions de : $at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0$, $\sigma_1 = \dfrac{-3b}{a}, \sigma_2 = \dfrac{3c}{a}, \sigma_3 = \dfrac{-d}{a}$. Que conclure ?

   [D'abord, si $P = P'$ (tangente) $t_1 = t_2 = t$, donne $P"(t_3 = t')$ très facilement (tangentiel), $at^2 + 2bt + c = 0$ signifiant que $t' = \infty$. Puis il y a en génétal 3 points d'inflexion (degré 3) et pour voir s'ils sont alignés, vérifions $(*)$: $a.\sigma_3 + b.\sigma_2 + c.\sigma_1 + d = 0$? Oui, ils sont alignés.]

Notes : . Pour les cubiques, il s'agit du "Théorème de Lamé".

. Les courbes ayant une paramétrisation rationnelle sont dites "unicursales" ; c'est rarement le cas, même si $n = 3$: $y^2 = x(x^2 - 1)$, 2 morceaux. Mais les coniques sont toutes unicursales.

32 Fonctions de plusieurs variables : Dérivation

32.1 Soit $f(x,y)=\dfrac{sin(x^3)-sin(y^3)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

Montrer qu'on a défini une application $C^0(\mathbb{R}^2)$ avec d.p. partout, non C^1 en $O(0,0)$.

Corrigé : La fonction est C^1 hors de $(0,0)$ par les théorèmes généraux ; donc C^0. En $(0,0)$:

- Continuïté : d'abord $0\leqslant\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$ donc $\dfrac{sin(x^3)}{x^2+y^2}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}.x\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$.
  Et de même l'autre terme : Donc $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0=f(0,0)$. f est $C^0(\mathbb{R}^2)$.
- Existence des dérivées partielles en $O(0,0)$: $f(x,0)=\dfrac{sin(x^3)}{x^2}\underset{x\to0}{\sim}x$; donc $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$: $f'_x(0,0)$ existe et vaut $+1$. Idem $f'_y(0,0)$ existe et vaut -1.
- f non C^1 en $O(0,0)$. Calculons hors de O : $f'_x(x,y)=\dfrac{cos(x^3).3.x^2.[x^2+y^2]-2.x.[sin(x^3)-sin(y^3]}{[x^2+y^2]^2}$
  Donc $f'_x(x,x)=\dfrac{cos(x^3).3.x^2.[2.x^2]}{[2.x^2]^2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\neq1$. f'_x non continue en $O(0,0)$.

32.2 Maximum(xyz), $M\in$ triangle ABC, $x=dist(M,BC)$, gradient

- Corrigé (*). Faire une figure. Ensuite, les trois variables x,y,z ne sont pas indépendantes car 2 degrés de liberté. En considérant 3 triangles MBC, MCA, MAB : $\boxed{ax+by+cz=2.S=cte.}$
- $f(M)=f(x,y)=x.y.[2S-ax-by]$, continue sur un fermé borné, est bornée et atteint ses bornes.
  [Le fermé-borné en (x,y) : $x\geqslant0, y\geqslant0, ax+by\leqslant2S$]. Sur la frontière, minimum : produit nul.
- Le maximum est donc atteint "à l'intérieur" et c'est "un point critique" pour fC^1. Un calcul à faire annulant les d.p. donne alors $ax=by=2S-ax-by$ qu'il vaut mieux lire ainsi, par symétrie du problème : $ax=by=cz$ et donc $\boxed{ax=by=cz=\dfrac{2S}{3}}$ ce qui fait au plus un point candidat.

Comme on sait que le maximum est atteint en au moins un point, en ce point et en lui seulement, le maximum est atteint. (Note : Même pour une fonction d'une variable C^0 sur un segment, le maximum peut être atteint en plusieurs points : sin sur $[0,\pi/2+4\pi]$.)

- $\boxed{\text{Connait-on ce point géométriquement ? Oui.}}$

1) Tout point M du plan est barycentre de A,B,C non alignés affectés de coefficients judicieux : Ecrire $\exists\lambda,\mu:\overrightarrow{AM}=\lambda.\overrightarrow{AB}+\mu.\overrightarrow{AC}$ et $(1-\lambda,\lambda,\mu)$ conviennent.

2) Ensuite, $\overrightarrow{MA}\wedge[\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma.\overrightarrow{MC}]=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$, pour M intérieur [notre cas], voir que $\dfrac{\beta}{AireMCA}=\dfrac{\gamma}{AireMAB}=\dfrac{\alpha}{AireMBC}$; en un mot, on a des coefficients barycentriques géométriques !

3) Justement, on a trouvé ici $ax=by=cz$: 3 aires égales donc c'est l'isobarycentre.

Le maximum du produit est atteint au seul point G, centre de gravité du triangle.

Note (*) : autre utilisation habile du gradient

On donne les 2 droites ensemble $(y-ax)(y-bx)=0$. Trouver le faisceau des bissectrices.

1. On peut considérer les hyperboles $f(x,y)\equiv(y-ax)(y-bx)-k=0$ et exprimer $\overrightarrow{grad}(f)(M)$ col. à $\overrightarrow{OM}$ car ce vecteur est orthogonal à la tangente. Trouver $\boxed{(a+b)[y^2-x^2]+2(1-ab)xy=0.}$
2. Autre solution possible avec de la trigonométrie ...

32.3 Minimum de $MA^2+MB^2+MC^2$, $M \in Triangle.ABC$, Leibniz

Facile $\neq$ 32.2 : fonction scalaire de Leibnitz [et $\neq \min(MA+MB+MC)$ "problème de Fermat" (*)]

▪ Soit G quelconque, pour le moment et $f(M)=\alpha.MA^2+\beta.MB^2+\gamma.MC^2$. Alors :

$f(M)=\alpha.(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+...=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC})+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$.

▪ Cas $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$: choisissons G barycentre de A,B,C avec coeff. α,β,γ ; on a, par ex. dans notre cas $\alpha=\beta=\gamma=1$, $f(M)=3.MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=$ Quantité fixe $+\ 3MG^2$:

Il y a donc un minimum, même si $M \in$ au plan ABC en entier atteint en G et en G seulement.

Rem. : $\alpha.MA^2+\beta.MB^2+\gamma.MC^2=cte=k \Leftrightarrow MG^2=Cte$: Cercle de centre G, si $Cte \geqslant 0$.

▪ Si $\alpha+\beta+\gamma=0$ $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{V}$ indépendant de M ! $f(M)=cte \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{V}=Cte$: Droite sauf si $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{0}$. Ex : $(b^2-c^2)MA^2+(c^2-a^2)MB^2+(a^2-b^2)MC^2=0$: droite d'Euler $(O,G.)$

Autres : $MA^2sin(2A)+MB^2sin(2B)+MC^2sin(2C)=\dfrac{abc}{R}$: cercle ABC (contient A). Cercle d'Euler : $MA^2+MB^2+MC^2+MH^2=4.R^2$ (A_1 pied de hauteur : $c^2+CH^2=\dfrac{BB_1^2+CB_1^2}{sin^2(A)}=\dfrac{a^2}{sin^2(A)}=4.R^2$).

$\{i\}=\{M : aMA^2+bMB^2+cMC^2=abc\}$ **2.2**.8 ! Cercle(i,r) $\{M : aMA^2+...=abc+(a+b+c)r^2\}$.

32.4 Soit g C^0 ; et f telle que : $f(x,y)=\dfrac{1}{x}.\displaystyle\int_x^{x.y} g(t).dt$ (...)

1. Montrer qu'on peut prolonger f par continuïté sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction prolongée $\widetilde{f}$ est-elle C^1 ? C^2 ?

32.5 (*) Une équation aux dérivées partielles [corrigée]

Résoudre : $2.\dfrac{\partial f}{\partial f}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2y$ en posant $X=x, Y=x+2y$ (bien voir les notations déjà).

On a donc $f(x,y)=F(X,Y)$; écrivons (comme en physique) $z=f(x,y)=F(X,Y)$, avec $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ désignant $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\dfrac{\partial z}{\partial X}$ désigne $\dfrac{\partial F}{\partial X}$ ... règle de la chaîne : $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial X}.\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial Y}.\dfrac{\partial Y}{\partial x}$.

Après calculs, il semble qu'on arrive à l'équation $2.\dfrac{\partial z}{\partial X}=\dfrac{1}{2}X^2(Y-X)$; voilà la fin :

▪ Il ne reste qu'à prendre une primitive d'une fonction polynômiale par rapport à la lettre X.

▪ En notant qu'une constante par rapport à X est une fonction arbitraire d'une variable Y mais dérivable (ex. : exp, $Arctan$...) trouver $z=\dfrac{X^3.Y}{12}-\dfrac{X^4}{16}+\varphi(Y)$, φ arbitraire dérivable ; et remettre x,y ...

32.6 Sur l'inversion, avec différentielle de f. de deux variables

1. Avec $\overrightarrow{OM'}=k.\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$, vérifier que $df(M)(\overrightarrow{u})=\dfrac{k}{OM^2}[\overrightarrow{u}-2.(\overrightarrow{t}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{t}]$ où $\overrightarrow{t}=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.

   Matrice : $\dfrac{k}{\rho^2}\begin{pmatrix}-cos(2\theta) & -sin(2\theta)\\ -sin(2\theta) & cos(2\theta)\end{pmatrix}$.

2. Comme $\overrightarrow{u}\mapsto\overrightarrow{u}-2.(\overrightarrow{t}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{t}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{t}^{\perp}$ [ayant $\|\overrightarrow{t}\|=1$] : déduire que l'inversion géométrique conserve les angles mais change les signes.

   (On peut voir que la différentielle de $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mapsto\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est $(\overrightarrow{h},\overrightarrow{k})\mapsto\overrightarrow{u}.\overrightarrow{k}+\overrightarrow{h}.\overrightarrow{v}$; celle de $M\mapsto\|\overrightarrow{OM}\|^2$: $\overrightarrow{h}\mapsto 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{h}$; et déduire que $df(M)$ est une similitude vectorielle indirecte).

3. Déduire que les tangentes aux points A et A' sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[A,A']$.

33 Fonctions de plusieurs variables : Intégration

33.1 Calcul de l'intégrale de Gauss avec les intégrales doubles [corrigé]

Il s'agit de l'existence et du calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

▪ Existence.
Comme $f(x) = e^{-x^2} \geqslant O$, $\beta \mapsto \int_0^{\beta} f(x)dx = F(\beta)$ est croissante ; donc l'intégrale converge $\Leftrightarrow$ elle est majorée indépendamment de β. Soit $1 \leqslant \beta$: écrivons $\int_0^{\beta} = \int_0^1 + \int_1^{\beta} = a + G(\beta)$.
Il suffit de voir, si $1 \leqslant x \leqslant \beta$ que $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ et de savoir [évidemment] que $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge [celle-ci peut se calculer par primitive !] pour majorer $G(\beta)$ et donc $F(\beta)$.

▪ Calcul. Soit $D_R = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant R\}$, $C_R = \{0 \leqslant x \leqslant R, 0 \leqslant y \leqslant R\}$:
Alors $\int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant \int\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant \int\int_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ (pourquoi ?)
Calculer les intégrales extrêmes et vérifier que celle du milieu vaut $[F(R)]^2$. Puis conclure.

On a donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$ qui intervient de manière essentielle en probabilités (par exemple).
Il y a d'autres manières de la calculer ; en particulier avec les intégrales généralisées avec paramètre.

33.2 (*) $\int\int (x^2 - y^2)dxdy$ sur l'intérieur de l'ellipse $x = a.cos(t), y = a.sin(t)$

$[x = a.\rho.cos(\theta),\quad y = b.\rho.sin(\theta)\,;\quad \text{jacobien}=a.b.\rho\,;\quad \text{d'où}\quad I = \frac{\pi.a.b}{4}\,(a^2 - b^2)]$.

33.3 Volume commun à 2 cylindres de révolution (même rayon) d'axes $\perp$

$[16.R^3/3]$ [(*) Pour la surface d'éq. : $z = f(x, y)$, on rappelle que $\mathcal{A} = \int\int_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\; dx.dy$.]

33.4 Quelques calculs : une aire non plane et un volume [avec réponses]

de la "Trompette de Gabriel" (*) [Roberval, Torricelli]. L'hyperbole équilatère (H) $y = \frac{a^2}{x}$, $0 \leqslant x \leqslant a$ tournant autour de Oy, engendre un volume fini $(\pi.a^3)$ mais une surface non plane infinie.

[Notons qu'on sait calculer aussi l'aire de la "fenêtre de Viviani",
la courbe qui la limite portant le nom d'"hippopède" $x = R.cos(t)sin(t), y = R.sin^2(t), z = R.cos(t)$!]

33.5 Avec les formule de Stockes et d'Ostrogradski, rotationnel, divergence

1. Montrer que $\int_\Gamma ydx + zdy + xdz = \frac{-\pi.a^2}{\sqrt{2}}$ où $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cap x + z = a$ orientée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
2. Flux de : $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ au travers du tore décrit par le cercle de centre $\Omega(a, 0, 0)$, rayon $R < a$?
   a) $div(\overrightarrow{V}(M) = 3$. b) Volume connu : $2.\pi^2 a.R^2$. D'où : $\phi = 6.\pi^2.a.R^2$.

Exercices de programme SPE

34 Compléments sur les Fonctions

34.1 Quelques équivalents à trouver

1. Soit $f(x) = \dfrac{x}{ln(x)}$. Montrer que c'est une bijection de $[e, +\infty[$ dans $[e, +\infty[$.
   Equivalent de $f^{-1}(y)$ en $+\infty$?
2. (a) Montrer que : $\underline{Arccos(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}.\sqrt{1-x}}$ avec $cos(h) - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{-h^2}{2}$.
   Puis avec $h = Arccos(x) \underset{x\to 1}{\sim} sin[Arccos(x)] = +\sqrt{1-x^2}$.
   (b) Puis avec $Arccos(1-h)$, $h \to 0$, en posant : $h = 2sin^2(u)$, $u \geqslant 0$ ... (Idem : $Argch$)

34.2 Dérivée nième de : $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$?

34.3 Limite de $(tan\dfrac{3x}{2})^{tan(3x)}$ en $\dfrac{\pi^-}{6}$

34.4 Une limite théorique très classique

Soit f dérivable en 0^+, avec $f(0) = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n^2})$?

34.5 Manipulation d'inégalités de convexité (...)

1. Après vérification de la convexité de $ln(1+e^x)$, montrer : $1 + (\prod x_k)^{1/n} \leqslant \prod (1+x_k)^{1/n}$ $x_k > 0$.
2. Pour $x_k > 0$, montrer $x_2/x_1 + x_3/x_2 + ... + x_n/x_{n-1} + x_1/x_n \geqslant n$. ($x_k = exp(t_k)$, exp convexe).
3. (**) Montrer (avec la définition) pour f définie sur $]0, +\infty[$: $f(1/x)$ convexe $\Longleftrightarrow$ $x.f(x)$ convexe.
   $[(\alpha a + \beta b).f(\alpha a + \beta b) \leqslant \alpha.a.f(a) + \beta.b.f(b) \Leftrightarrow f(\dfrac{1}{\gamma A + \delta.B}) \leqslant \gamma.f(\dfrac{1}{A}) + ...$ si $\gamma = \dfrac{\alpha a}{\alpha a + \beta b}$, $A = \dfrac{1}{a}$ ... d'où $\Rightarrow$. Et $(\Leftarrow)$ avec $(\Rightarrow)$ appliqué à $g(1/x) = x.f(x)$.]

34.6 Pour f C^2 dans un voisinage de x_0 où $f"$ ne s'annulle pas

Montrer que le "θ" des Accroissements finis est unique et qu'il tend vers $1/2$.

34.7 (f C^0 sur $[a,b]$, dér. sur $]a,b[$, $f(a) = 0$, $\mid f' \mid \leqslant \alpha. \mid f \mid$) $\Rightarrow f = 0$

Corrigé : $F(x) = e^{-2.\alpha.x}.f^2(x)$ est positive, décroissante, nulle en a !

34.8 Au sujet du Théorème de Rolle généralisé (remarque)

Soit f C^0 sur $[0, +\infty[$ dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer $\exists c \in]0, +\infty[$ avec $f'(c) = 0$.

34.9 (*) Théorème des Accroissements finis généralisés

Soient f, g C^0 sur $[a,b]$ avec $g(a) \neq g(b)$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer $\exists c \in]a,b[$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

D'où la "règle de l'Hôpital" : Ayant $f(x)/g(x)$ une forme indéterminée du type "$0/0$" en x_0, si $f'(x)/g'(x)$ tend vers λ, alors $f(x)/g(x)$ aussi. [Et on peut recommencer avec $f"$ et $g"$!]

34.10 (*) Avec les "polynômes de Lagrange"

1. Soit $x_0 < ... < x_n$ réels donnés distincts dans $[a,b]$. On note : $\Pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$; et $L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i).\Pi'_{n+1}(x_i)}$. Montrer qu'on a une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Interpolation : Soit f C^∞ (pour question suivante) donnée ; Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n$[x] tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ et <u>alors</u> : $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i(x)$.
3. Erreur : $\forall x \in [a,b], \exists \alpha_x : f(x) - P_n(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha_x),\ \alpha_x \in]min(x,x_0), max(x,x_n)[$.
4. Points équidistants. Posons $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i.h$; $f_i = f(x_i)$; et $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Montrer : $\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_k^j f_{i+j}$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$; et, avec : $Q_n(s) = P_n(a+s.h) = P_n(x)$ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 . \underbrace{\frac{s(s-1)(s-2)...(s-k+1)}{k!}}_{N_k(s),\ polynome\ de\ Newton}$, $s = \frac{x-a}{h}$, $s \in [0,n]$: <u>formule de Newton</u>.
5. (Autre : $\forall s \in \mathbb{Z}, N_k(s) \in \mathbb{Z}$ soit avec les C_n^k ou bien avec $N_k(s) - N_k(s-1) = N_{k-1}(s)$.)

34.11 (*) Prouver une existence d'une dérivée (...)

Soit $t \in]0,1[$ et f $C^0 :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\frac{f(x) - f(t.x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \lambda$.
Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. (<u>Ind.</u> : remplacer x par $x.t$, etc. $f'(0) = \frac{\lambda}{1-t}$.)

34.12 (*) Majoration de dérivée intermédiaire, M_k majorant $| f^{(k)} |$

1. Sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall k > 0, | f' | \leqslant \frac{M_0}{k} + \frac{k.M_2}{2}$. Déduire que $| f' |$ est bornée et $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
2. Sur $[0,+\infty[$. Montrer que : $\forall x \geqslant 0, | f'(x) | \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$, $h > 0$. Puis que : $M_1 \leqslant 2.\sqrt{M_0M_2}$.
   (** Cas $[a,b]$ beaucoup plus difficile, Landau ... **Sur $\mathbb{R}$, 25.7 : inégalités de Kolmogorov.**)

34.13 (*) Théorème de Darboux (avec le Th. des Accroissements finis)

Montrer que toute fonction dérivée vérifie le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

34.14 (*) Soit f telle que $fof(x) = a.x + b$, $a \neq 0$ (...)

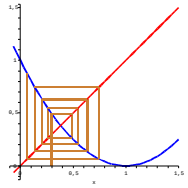
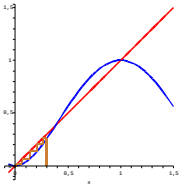
1. Montrer que f est bijective. Puis en la supposant C^0 qu'elle est monotone ; et que $a > 0$.
2. On suppose f C^1 et $a \neq 1$. Prouver que f est affine ($f(ax+b) = af(x) + b$, $f' = Cte$) et conclure.

34.15 (*) Existence de fonctions C^∞ régularisante

1. Montrer que $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est C^∞ <u>sur $\mathbb{R}$</u>.
2. Montrer que $g(x) = 0$ si $| x | \geqslant 1$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $| x | < 1$ est C^∞ <u>sur $\mathbb{R}$</u>.
3. Exemple de fonction C^∞ <u>sur $\mathbb{R}$</u> nulle si $| x | \geqslant 2$, valant 1 si $| x | \leqslant 1$? (Utiliser $\int_{-1}^{x} g(t).dt$.)

35 Compléments sur les Suites

35.1 Cas $u_{n+1} = f(u_n)$, $f(x) = (1-x)^2$, $u_0 \in]0,1[$ intervalle de stabilité

Dessins   Le point fixe de f est répulsif ! (u_{2p}), (u_{2p+1}) convergentes [à voir] chacune vers un point fixe de fof. Mais fof a 3 points fixes : $\alpha = 0 < l < \beta = 1$, l étant point fixe de f, donc de fof ! (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont convergentes mais vers des limites distinctes ...

35.2 Limite de suites en lien avec des intégrales (...)

1. Soit f continue en 1. Montrer que : $n.\displaystyle\int_0^1 x^n.f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.
2. Soit $I_n = \dfrac{1}{2.n.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin^2(nt/2)}{sin^2(t/2)}dt$, $n \geqslant 1$; et $J_n = \dfrac{1}{2\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin[(n+\frac{1}{2})t]}{sin(t/2)}dt$.
   Montrer que $J_n = 1$; puis que $(n+1)I_{n+1} - n.I_n = J_n = 1$; et que $I_n = 1$.

35.3 Théorème de Césaro et lemme de l'escalier

1. Soit une suite (u_n) ; on pose $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$.
   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, montrer qu'il en est de même de v_n (l finie ou non). Mais réciproque fausse.
2. Montrer que la réciproque est vraie si, de plus, (u_n) est monotone.
3. (Lemme de l'escalier, cf. 1.) Soit (x_n) telle que $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$; montrer que $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

35.4 Des équivalents avec le théorème de Césaro (...)

1. Soit la suite $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n^2}, x_0 > 0$. Nature de (x_n) ? Montrer que $x_{n+1}^3 - x_n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
   En déduire, avec le théorème de Césaro, qu'on a l' équivalent : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.
2. De même avec $u_{n+1} = sin(u_n)$, $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \to \dfrac{1}{3}$; donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3/n}$
3. Idem avec $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Avec $y_n = e^{-x_n}$, $\dfrac{1}{y_{n+1}} - \dfrac{1}{y_n} \to 1$; donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$.
4. Soit $u_0, u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n.u_{n-1}}$. Etudier (u_n). Equivalent de u_n avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.
5. Soit $-1 < u_0 < 0$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Avec $v_{n+1} - v_n$, vérifier que $v_n = \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.
   Puis avec $v_{n+1} - v_n = -1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{\epsilon_n}{n}$, montrer que : $v_n = -n - ln(n) + O(1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_k}{k}$.
   Sachant que la dernière somme est négligeable / $ln(n)$ déduire que : $u_n + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ln(n)}{n^2}$.

35.5 Comparaison des règles de Cauchy et D'Alembert sur les séries

Montrer que si $u_n > 0$ et $u_{n+1}/u_n \to \lambda$, alors : $\sqrt[n]{u_n} \to \lambda$ $(n \to +\infty.)$ [ln possible.]

35.6 Suite bornée en lien avec la convexité (...)

Soit (a_n) bornée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ a_{n-1} + a_{n+1} \geqslant 2.a_n$.

1. On pose $d_n = a_{n-1} - a_n$; montrer que (d_n) est décroissante ; puis que $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que (a_n) est décroissante. (On note a sa limite, si utile).
3. Montrer, pour $n \geqslant p+1$: $a_p - a_n \geqslant (n-p)(a_{n-1} - a_n) \geqslant 0$. En déduire la limite de $(n.d_n)$.

35.7 Approximation de nombres irrationnels

1. Si $x \notin \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$ montrer $\exists\ (p,q)$ avec $1 \leqslant q \leqslant n$: $\mid x - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{n.q}$.
2. En déduire une infinité de couples $(p,q) \in (\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{N}^*$ tels que $\mid x - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{q^2}$.

Solution : On prend $n+1$ valeurs et $k \mapsto \{kx\} = k.x - [k.x]$ sur $[[0,n]]$; on découpe $[0,1[$ en n intervalles $[0,1/n[$, ... alors ("tiroirs de Dirichlet") : $\mid q.x - p \mid < \frac{1}{n}$; et donc $\mid x - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{n.q} \leqslant \frac{1}{q^2}$.
Puis : $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid < \frac{1}{n.q_n} \leqslant \frac{1}{n}$ donc les $\frac{p_n}{q_n}$ convergent vers x ; si nombre fini de couples distints, la suite serait stationnaire à partir d'un certain indice (car convergente) et x serait rationnel ; exclus.

35.8 (*) Equivalent avec le théorème de Césaro : généralisation

Soit une suite (u_n) convergeant vers 0^+, du type $\boxed{u_{n+1} = u_n - g(u_n)\ ;\ u_0 = a\ ;\ g \text{ continue}}$ avec :
1) Sur $]0,a]$, $0 < g(x) < x$; 2) $g(x) <<_{x\to 0^+} x$; et 3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(v_n)$.

Alors : Si $\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{\sim} h(x)$ [pour simplifier, éventuellement] et si H est une primitive de h (ainsi par exemple en prenant $H(x) = \int_a^x h(t).dt$), on a $\boxed{H(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n.}$ Et on inverse H selon les cas.

Exemples : $g(x) = x^\alpha, \alpha > 1$; $g(x) = \frac{-x}{ln(x)}$; $g(x) = e^{-1/x}$ [pas de primitive connue ici] ; $g(x) = x^2.e^{-1/x}$.

Rem. Pour $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, $\sum ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$ div. (télescopie), donc $\sum u_n$ div. (aisément, sans équivalent)

Démonstration : Déjà 1) suffit à montrer la convergence de (u_n) vers 0, en décroissant.
Ensuite, l'idée vient d'une analogie avec les équations différentielles ! $\frac{y'}{g(y)} = -1$ ou $h(y).y' = -1$ ...
En toute rigueur, voyons que $H(u_{n+1}) - H(u_n) \to -1$: ceci suffit avec le Théorème de Césaro.
On a : $H(u_{n+1}) - H(u_n) = (u_{n+1} - u_n).h(\theta_n)$ par le théorème des accroissements finis.
Et $u_{n+1} \leqslant \theta_n \leqslant u_n$ sont équivalents avec 2). Donc $H(u_{n+1}) - H(u_n)$ équivalent à -1 avec 3).

Les exemples (exercices) :
• Si $g(x) = x^2.e^{-1/x}$, l'hypothèse 3) n'est pas assurée [exemple : $x \underset{x\to 0}{\sim} x - x^2$ mais $g(x - x^2) \nsim g(x)$].
Cependant la conclusion est juste.
• Cas $g(x) = \frac{-x}{ln(x)}$: $\frac{-1}{2}.ln^2(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$, $ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{2.n}$. L'ennui est alors que "$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{2.n}}$ ... " est plus qu'incertain ! (exponentielles d'équivalents en l'infini). En réalité : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{2.n}/\sqrt{e}}$!

35.9 (*) Soit $R_n = (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + ... + (\frac{n}{n})^n$. On cherche sa limite (...)

Soit $p = E(\sqrt{n})$; on considère : $S_n = \sum_{k=1}^{n-p-1} (\frac{k}{n})^n$ et $T_n = \sum_{j=0}^{p} (1 - \frac{j}{n})^n$. Vérifier que $S_n \leqslant n.e^{-\sqrt{n}}$.

Puis, avec $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$, montrer que $e^{-\alpha.j} \leqslant (1 - \frac{j}{n})^n \leqslant e^{-j}$, $j \leqslant p$, et que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e-1}$. Conclure.

36 Séries numériques

36.1 Convergence d'une série avec un Développement Limité

Soit $u_n = [(1+\frac{1}{n})^{-n} - \frac{1}{e}]^{\alpha}$. Convergence de $\sum u_n$ et de $\sum (-1)^n.u_n$?

– Corrigé. On sait que $(1+\frac{1}{n})^{-n}$ tend vers $\frac{1}{e}$: on le refait en mieux. Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

– Si la 1ère série est à termes $\geqslant 0$, la 2ème est alternée ... Précisons le [...] avec $ln(1+h)$ et e^h :

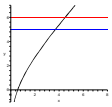
Si $n \geqslant 1$: $(1+\frac{1}{n})^{-n} = exp(-n.(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{\epsilon_n}{n^3})) = exp(-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2})$

$= \frac{1}{e}.exp(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}) = \frac{1}{e}.(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2} + \frac{1}{8n^2})$. Donc $[...] = \frac{1}{e}.(\frac{1}{2n} + \frac{k}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2})$, $k = cte$.

1. $u_n = [...]^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{contante > 0}{n^{\alpha}}$: convergence $\Leftrightarrow \alpha > 1$. $(-1)^n.u_n$ si $\alpha > 0$, CN de convergence :
2. $(-1)^n.u_n = \frac{(-1)^n}{(2e.n)^{\alpha}}(1 + \frac{K}{n} + \frac{\epsilon_n}{n})^{\alpha} = \frac{(-1)^n}{(2e.n)^{\alpha}}(1 + \frac{K.\alpha}{n} + \frac{\epsilon'_n}{n})$. Série alternée qui est somme d'une série semi-convergente et d'une série Absolument convergente $\frac{(-1)^n}{(2e.n)^{\alpha}}(\frac{K.\alpha}{n} + \frac{\epsilon'_n}{n})$: convergente.

36.2 $x + ln(x) = n$ a une unique racine u_n. $\sum 1/u_n$, $\sum (-1)^n/u_n$

Corrigé. C'est un cas où u_n est défini **implicitement** (sans **pouvoir** l'expliciter).

On fait un dessin de $f(x) = x + ln(x)$; elle est C^0, strictement croisante, même concave ($f"(x) = -1/x^2 < 0$) et possède une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$ (ce qui est $f(x)/x$ tend vers 1 et $f(x) - x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$)  Notons : $f(1) = 1$.

Ainsi : f^{-1} existe, est continue, croissante et bijective de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Et donc :

$u_n = f^{-1}(n)$ est aussi croissante et tend vers $+\infty$ (u_n croissante ; si majorée, on ne pourrait avoir $u_n + ln(u_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). $ln(u_n) << u_n$ et donc $n = u_n + ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$

D'où $\sum 1/u_n$ est divergente par équivalent pour les séries **à termes positifs** et $\sum (-1)^n/u_n$ convergente par le Th. spécial des séries alternées car $1/u_n$ est **aussi décroissant.**

(Ajout sans réponse ! Voir que $u_n = n - ln(n) + \epsilon_n$.)

36.3 Convergence et somme de série (par télescopie)

1. De la série de terme général : $u_n = Arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$. $(Arctan(n+1) - Arctan(n).)$
2. De la série de terme général : $u_n = ln(1 + \frac{2}{(n+1)(n+4)})$. $(ln(3).)$
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} ln(1 - \frac{1}{n^2})$ est une série convergente de somme $-ln(2)$.
4. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} ln(1 + \frac{(-1)^n}{n})$ est une série convergente de somme nulle.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k.ln(k)}{k} = \gamma.ln(2) - \frac{ln^2(2)}{2}$ avec $\sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k} - \frac{ln^2(n)}{2}$ conv. vers λ, valeur inutile.

36.4 Nature de la série de terme général u_n (...)

1. $u_n = sin(\pi.\sqrt{n^2+1})$ (Dl_3 de $\sqrt{1+1/n^2}$, somme d'une série semi-conv. et d'une série abs. conv.)
2. $u_n = ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ $\quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ $\quad w_n = ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}})$ (Convergence $\Leftrightarrow a=-1$)

Corrigé de (1) On a : $\pi.\sqrt{n^2+1} = \pi.n.(1+\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})) = \pi.n+\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n^3})$.

Avec $sin(n.\pi+h) = (-1)^n.sin(h)$, et $sin(h) = h+O(h^3)$, on déduit : $u_n = (-1)^n.[\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n^3})]$.

La série apparait comme somme d'une série semi-convergente par le Théorème des séries alternées et d'une série absolument convergente ; donc convergente.

Attention

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow$ séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature à condition que u_n soit de signe constant.
- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ semi-convergente par le Théorème des séries alternées mais $\sum ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ diverge, bien que u_n et v_n équivalents. Car $ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n.\sqrt{n}})$ somme de 3 séries respectivement semi-conv./div./absolument conv. ; donc divergente. D'où $|u_n|, |v_n|$ n'ont pas la même monotonie !

36.5 Somme d'une série et comparaison avec $1/n^\alpha$

1. Soit $0<a<b$ et $u_1>0$. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.
   - Trouver α : la suite $v_n = ln(n^\alpha.u_n)$ converge. (Equivalent de $v_{n+1}-v_n$; trouver $\alpha = b-a$.)
   - CNS sur (a,b) pour que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. $(b-a>1.)$ Ceci étant on trouve, ici, la somme !
   - Convergence de la série de terme $(n+1)u_{n+1}-n.u_n$; conclure que $S = b.u_1/(b-a-1)$.
2. Rem. : comparaison logarithmique. Si $u_n>0, v_n>0$; et $\forall n \geqslant n_0$: $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$, alors : $u_n \leqslant k.v_n$, $k = u_{n_0}/v_{n_0}$. Avec $a_n = 1/n^\alpha$, $a_{n+1}/a_n = 1-\alpha/n+\epsilon_n/n$, d'où la "Règle de Duhamel" !

36.6 (*) On suppose $\sum \frac{u_n}{n}$ convergente. Alors : $(\sum u_k)_{k\leqslant n}\ /n \to 0$

Corrigé : Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V$. Alors $u_n = n.[V_n - V_{n-1}]$. D'où :

$\sum_{k\leqslant n} u_k = \sum k.V_k - \sum k.V_{k-1} = -V_0 - V_1 - ... - V_{n-1} + n.V_n$. Et Théorème de Césaro.

36.7 (*) Si (u_n) décroissante et série convergente, alors : $n.u_n \to 0$

Corrigé. Faire une "transformation d'Abel" (comme une intégration par parties) :

$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} [k-(k-1)]u_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k.u_k - \sum_{1\leqslant l\leqslant n} l.u_{l+1} + n.u_{n+1} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k[u_k - u_{k+1}] + n.u_{n+1}$.

Donc $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k[u_k - u_{k+1}]$ a une limite finie car croissante majorée. Par conséquent $n.u_{n+1}$ a une limite finie λ. La convergence de $\sum u_n$ exige alors que $\lambda = 0$, car la série harmonique diverge.

Autre corrigé. Vu que la série converge, $u_n \to 0$; et comme u_n décroissante, $u_n \geqslant 0$; d'où : $0 \leqslant p.u_{2p} \leqslant u_{p+1} ... + u_{2p}$ donc $2p.u_{2p} \to 0$; $0 \leqslant (2p+1)u_{2p+1} \leqslant u_{2p+1} + 2p.u_{2p}$ tend aussi vers 0.

Remarque. si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, convergente, sans autre hypothèse, soit R_n le reste ; alors : (*) $\sum n.u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature. Et sommes égales si convergence.

$\sum_{k=1}^{n} k.u_k = \sum k(R_{k-1}-R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$. Si $\sum k.u_k$ conv., $0 \leqslant nR_n \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k.u_k$; d'où un sens.

Inversement, $\sum R_k$ convergente $\Rightarrow \sum k.u_k$ conv. (car majorée) ; alors, même somme est déjà vu.

36.8 (*) Calculs de somme de séries en lien avec des intégrales

1. Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha.n+\beta} = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}.dt}{1+t^\alpha}$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Si $\alpha = 3$, $\beta = 1$: $\frac{1}{3}(ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}})$.
2. Montrer que : $\sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{(n-\alpha).(n-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}.\int_0^1 \frac{[t^{n_0-1-\alpha} - t^{n_0-1-\beta}].dt}{1-t}$, $n_0 > \alpha > \beta$.

36.9 Montrer la formule d'Euler sur les nombres premiers p_n

1. Soit $s > 1$. Montrer la convergence de la suite $P_n = \prod_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et que $\lim_{n\to+\infty} P_n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.
2. (*) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{p_n}$ diverge.

36.10 Série convergente/u_{n+1} équivalent à $u_n \geqslant 0$: $u_n = o(R_n)$

Corrigé : (Ex. : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}$, $a > 1$.) Soit $\epsilon \in]0, 1/2]$. $\exists N > 0$: $p \geqslant N \Longrightarrow u_{p+1} \geqslant (1-\epsilon)u_p$.

Donc si $n \geqslant N$: $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... \geqslant u_n + (1-\epsilon).u_n + (1-\epsilon)^2.u_n + (1-\epsilon)^3.u_n + ... = u_n.\frac{1}{\epsilon}$.

D'où : $u_n = o(R_{n-1})$ donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} = o(R_n)$.

36.11 (*) Sur la formule de Stirling (avec diverses précisions ...)

1. Avec $\int_{n-1}^n (t-n-\frac{1}{2})'.ln(t)dt$, si $u_n = \int_{n-1}^n ln(t)dt - \frac{ln(n-1)+ln(n)}{2}$: $u_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + O(\frac{1}{n^4})$.
2. En déduire que $ln(n!) = (n+\frac{1}{2}).ln(n) - n + 1 - \sum_{p=2}^{n} u_p$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \rho_n = \frac{1}{12.n}$;
3. Précisons : avec q.1, montrer que $v_n = \rho_{n-1} - \rho_n = \frac{1}{12(n-1)} - \frac{1}{12.n} = u_n + O(\frac{1}{n^4})$; puis que
4. $u'_n = u_n - v_n = O(\frac{1}{n^4}) \Rightarrow \sum_{p \geqslant n+1} u'_p = O(\frac{1}{n^3})$, $ln(n!) = (n+\frac{1}{2}).ln(n) - n + 1 - S + \frac{1}{12.n} + O(\frac{1}{n^3})$.
5. D'où $n! = n^{n+1/2}.e^{-n}.K.exp\big(\frac{1}{12.n} + O(\frac{1}{n^3})\big) = ...$ et $K = \sqrt{2.\pi}$ (par les intégrales de Wallis (*).)

36.12 Accélération de convergence $\gamma = \sum u_n$, $u_n = \frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})$

1. Monter la convergence de la série $\sum u_n$ et qu'on a aussi $\gamma = \lim_{n\to+\infty} (\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k} - ln(n))$.
2. Si $v_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{12(k+1)^2}$, montrer que $u_k - v_k = O(\frac{1}{k^5})$. En déduire que :
3. $\gamma = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k} - ln(n+1) + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)^2} + O(\frac{1}{n^4})$. [$n = 4$, $S_4 \simeq 0,47$. $0,57722$: erreur $< 2.10^{-5}$.]

36.13 Convergence et somme de la série $u_n = (-1)^n sin(n)/n$ **54.7**

1. Vérifier que : $cos(\frac{t}{2}).\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.cos(kt) = \frac{1}{2}.[(-1)^n.cos(\frac{2n+1}{2}t) - cos(\frac{t}{2})]$.
2. Montrer la convergence de la série et justifier que la somme vaut : $\sum_{n \geqslant 1} u_n = \frac{-1}{2}$.

[Tout faire en même temps ; ou bien $S_n = \sum_{k \leqslant n} (-1)^k.sin(k)$ borné et transformation d'Abel.]

36.14 (*) Développement asymptotique d'une suite grâce aux séries

1. Sommation de comparaisons ; soit $v_n \geqslant 0$:

   (a) Si $\sum v_n$ converge. Si $u_n << v_n : R_n << R'_n$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$; (vrai avec O)

   (b) (*) Si $\sum v_n$ diverge. Si $u_n << v_n$: $S_n << S'_n$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S'_n$; (idem)

2. Convergence de la suite : $x_0 \in]-1,0[$ et $x_{n+1} = x_n + x_n^2$. En déduire, avec $y_n = -1/x_n$,

   que $y_{n+1} - y_n = 1 + \dfrac{1}{y_n - 1}$; et que $x_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{ln(n)}{n^2} + \dfrac{ln(n)}{n^2}.\epsilon_n$.

36.15 (*) Si $u_n > 0$, étudier $\sum u_n/R_{n-1}^\alpha$ si $\sum u_n$ convergente, $\sum u_n/S_n^\alpha$ sinon

1. Cas $\sum u_n$ convergente. $\alpha \geqslant 1 : \sum v_n$ divergente. Car $\alpha = 1 : 1 - v_n = \dfrac{R_n}{R_{n-1}}$, $\prod(1 - v_n)$ tend vers 0, $\sum ln(1 - v_n)$ div. vers $-\infty$. Si v_n tend vers 0, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -ln(1 - v_n)$ div. et sinon div. aussi !

   Si $\alpha < 1$, $\sum v_n$ convergente. Car $\dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha} = \displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{R_{n-1}^\alpha} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$: convergence.

2. Cas (u_n) divergente. Si $0 < \alpha \leqslant 1$, $\sum v_n$ divergente. Cas $\alpha = 1 : 1 - v_n = \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$, $\prod(1 - v_k)$ tend vers 0, $\sum ln(1 - v_k)$ vers $-\infty$. Si v_n ne tend pas vers 0, divergence ! sinon, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -ln(1 - v_n)$.

   Si $\alpha > 1$, $\sum v_n$ convergente. Car $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} = \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\alpha > 1$: convergence.

36.16 (*) Somme avec les coefficients binômiaux. L'égalité : $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} \frac{1}{C_n^p} = \frac{p}{p-1}$

1. $\binom{n+p}{p} = C_{n+p}^p$; et si $u_n = 1/\binom{n+p}{p}$, vérifier que : $(n + p + 1).u_{n+1} = (n + 1).u_n$.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer, par télescopie, que $(p - 1).S_n = 1 - (n + 1).u_n$. Conclure.

36.17 (*) Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Trouver $a_i < i \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{p}{q} = \displaystyle\sum_{i\geqslant 2} \frac{a_i}{i!}$. Cas de $\frac{4}{7}$

Note. l'écriture n'est pas unique : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2!} = \displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{k-1}{k!}$; et $\dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{3}{5!} + \dfrac{3}{6!} + \dfrac{3}{7!}$. Etc.

36.18 (*) Un certain développement de $x \in]0,1]$ (...)

Montrer que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{p_0} + ... + \dfrac{1}{p_0...p_n})$ avec $p_0 \geqslant 2$, $p_{n+1} \geqslant p_n$. Et : (p_n) stationnaire $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ...

(Au départ, montrer l'existence de p_0 tel que : $x \in]\dfrac{1}{p_0}, \dfrac{1}{p_0 - 1}]$; etc.)

37 Suites et Séries de fonctions

37.1 Etude de la convergence simple et uniforme

1. De la suite de fonctions $x \mapsto x^n$ sur $[0,1[$.
2. De la série de fonctions $x \mapsto x^n$ sur $[0,1[$.
3. (a) (*) Montrer le Théorème de Dini :
   Si f_n C.S. vers f ; f_n, f C^0 sur un compact ; et si la suite $(f_n)_n$ est croissante : il y a C.U.
   (b) Utilisation de (a) : La suite $P_0 = O$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$ C.U. vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.
4. Montrer cette question de cours : Si f_n Riemann-intégrable, C.U. vers f sur $[a,b]$, alors :
   f est R-intégrable et $F_n(x) = \int_a^x f_n(t).dt$ C.U. vers $\int_a^x f(t).dt$; même $\int_a^b \mid f - f_n \mid dt \to 0$.

37.2 Suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $P(x)$

(A partir d'un certain indice, forcément : $P_n = P + \epsilon_n$)

37.3 Est-on, ou non, dans un cas de convergence uniforme ?

1. Polynômes de Lagrange avec subdivision régulière.
   Soit f $C^\infty[a,b]$. On suppose les dérivées uniformémént bornées : $\exists M$ tel que sup $\mid f^{(k)} \mid \leqslant M$.
   Alors les polynômes de Lagrange associés aux subdivisions régulières convergent uniformément vers f sur $[a,b]$ (utilité des hypothèses ! **34.10**.)
   Cas f à valeurs dans $\mathbb{R}$: Th de Rolle. Avec $x_j = a + j.\frac{b-a}{n}$, $f(x) - P_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j).\frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}$
   Cas f à valeurs dans $\mathbb{C}$: ce qui précède pour parties réelles et imaginaires.
2. Convergence simple, puis uniforme sur $\mathbb{R}$, de : $f_n(x) = \frac{1}{1+\mid x-n \mid}$?
   Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x).dx = 2$. Soit g C^0 telle que g^2 soit intégrable ; verifier que $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n.g$ existe et que I_n tend vers 0 si $n \to +\infty$ (* avec $\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{+\infty}$.)

37.4 Echange de symboles : intégrale et somme de série

1. Cas où c'est faux. Si $f_n(x) = \frac{2^n.x}{1+n.2^n.x^2}$, vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx$.
2. Un cas où c'est juste. Un Théorème rappelé (*) :
   (1) $u_n(x)$ continues par morceaux (CM)
   (2) $\sum u_n(x)$ converge simplement et $\sum u_n(x)$ CM
   (3) $\sum \int_I \mid u_n(x) \mid dx$ converge, alors $\int_I \sum u_n$ existe et vaut $\sum_{n\geqslant 0} \int_I u_n$.

37.5 Convergence uniforme mais pas "normale"

1. Montrer que la série $u_n(x) = \frac{x.e^{-n.x}}{ln(n)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais pas normalement.
2. Donner un autre exemple. [$u_n(x) = (-1)^n/(n+1)$, même sur $\mathbb{R}$!]

38 Séries entières

38.1 Le Lemme d'Abel. Des exemples

1. Si la série entière $\sum a_n.z^n$ est telle que $a_n.r^n$ est bornée, $r \in \mathbb{R}^+$, montrer que la série converge absolument pour les z tels que $\mid z \mid < r$.
   [Ecrire : $\mid a_n.z^n \mid = \mid a_n \mid .r^n.(\frac{\mid z \mid}{r})^n \leqslant M(\frac{\mid z \mid}{r})^n$. Puis $R = sup(r)$ ...]
2. Exemples. 1) Rayon de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.z^n$ où a_n= somme des diviseurs de n ? $[1 \leqslant a_n \leqslant n^2 \Rightarrow ... \ R = 1]$.
   2) de $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n.z^{2n}$? [Etudier la convergence absolue de cette série considérée comme numérique par la règle de D'Alembert, par exemple : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3. \mid z \mid^2$. Donc $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Elle est géométrique !]

38.2 Des calculs de rayons de convergence

de $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$; de $\sum a_n z^n$ où a_n est la $n$ème décimale de π.

38.3 Convergence suivi d'un calcul de somme

de $\sum a_n.z^n$ où $a_n = 2n^3 - 3n^2 + 1$; puis $a_n = \frac{n^3}{n!}$.

38.4 D.S.E. avec une équation différentielle

1. Vérifier que $f(x) = Arcsin^2(x)$ vérifie : $(1-x^2)y" - x.y' = 2$.
2. En déduire que f est Développable en S.E sur $]-1,1[$. Trouver ce D.S.E. (pair).

38.5 D'autres calculs de rayon de convergence

1. On suppose que $f(x) = \sum a_n.z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.
   Montrer que $g(x) = \sum a_n.z^n/n!$ possède un rayon infini. [Prendre $z_0 \neq 0$ tel que $a_n z_0^n$ bornée.] Montrer ensuite que, si $x > \frac{1}{R}$: $\frac{1}{x}.f(\frac{1}{x}) = \int_0^{+\infty} e^{-x.t}.g(t).dt$
2. On suppose que $\sum a_n.z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Rayon de $\sum a_n.z^{2n}$? de $\sum a_n^2.z^n$?
   [Réponse : $\sqrt{R}$; R^2.]
3. Cas : $a_n = sin(n)$; $a_n = n^n/n!$; $a_{3p} = 0, a_{3p+1} = 2^{2p+1}, a_{3p+2} = 2^{2p+2}$; $a_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$.

38.6 Une égalité en utilisant le produit de Cauchy

1. Soit $A_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k$, une suite convergente. En déduire que $\sum a_n.x^n$ a un rayon $R \geqslant 1$.
   Et montrer que, sur $]-1,1[$: $(1-x).\sum_{n\geqslant 0} A_n.x^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n.x^n$ avec le produit de Cauchy.
2. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; montrer que $R = 1$ pour $\sum H_n.x^n$ et que : $\sum_{n\geqslant 1} H_n.x^n = -\frac{ln(1-x)}{1-x}$.

38.7 Soit $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k.a_{n-k}$ **;** $S(x) = \sum a_n x^n \neq$ **39.4**

1. On suppose $R > 0$. Montrer que $x.S^2(x) + 1 = S(x)$ sur $]-R, R[$.
2. En déduire $S(x)$ et a_n puis R. [Trouver $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ qui est donc entier. Vérifié.]
3. En déduire le nombre de façons de calculer $x_1 * ... * x_n$ (par des parenthèses) pour une loi non associative. (Nombres de Catalan.)

38.8 Utilisation d'une série entière pour une série numérique

1. Vérifier que $f(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de $(1-x^2).y' - x.y = 1$. $(*)$
2. Montrer que les solutions de $(*)$ sont : (avec $C_{2n}^n = \binom{2n}{n}$.)

   $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n.x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^{2n}}{(2n+1).C_{2n}^n} x^{2n+1},\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$. Rayon de convergence ?
3. En déduire que : $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.x)^{2n}}{C_{2n}^n}$. Puis que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{C_{2n}^n} = \dfrac{36 + 2.\pi.\sqrt{3}}{27}$.

38.9 Autre façon d'obtenir certaines intégrales de Wallis

Vérifier, pour $|\ x\ | < 1$ que : $\sum_{n \geqslant 0} x^n . \int_0^{\pi/2} cos^{2n}(t).dt = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 - x.cos^2(t)} = \dfrac{\pi}{2.\sqrt{1-x}}$.

[Rappelons que le cas génétal des intégrales de Wallis est $I_n = \int_0^{\pi/2} cos^n(t).dt$.]

38.10 Quelques développements en série entière (D.S.E.)

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x - x^2)^n$. Domaine de définition ? [C'est $]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[\setminus \{1\}$.]

   Puis domaine sur lequel elle est développable en série entière (DSE) ? [Somme connue ; $]1-\sqrt{2}, 1[$!]

2. Développer $f(x) = Arctan\dfrac{1}{x+1}$ en série entière (autour de 0).

   [En $(-1)^+$ et $(-1)^-$ les limites sont différentes ! Ecrivons si $x > -1$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2} - g(x)$, on trouve que g (avec g') est DSE sur $]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$. Donc f est DSE sur $]-1, \sqrt{2}[$.
   (On trouve que $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} = \dfrac{1}{2.i}\left(\dfrac{1}{x+1-i} - \dfrac{1}{x+1+i}\right) = \Im m(\dfrac{1}{x+1-i})$.
   On écrit $\dfrac{1}{(1-i).(1+\frac{x}{1-i})}$: $g'(x) = \Im m \sum_{k \geqslant 0} \dfrac{(-1)^k.x^k.e^{i(k+1).\pi/4}}{\sqrt{2}^{k+1}} = \sum_{k \geqslant 0} \dfrac{(-1)^k.x^k.sin((k+1).\pi/4)}{\sqrt{2}^{k+1}}$;
   d'où $g(x) = ...$ On ne peut pas excéder $\sqrt{2}$ pour g car le terme général est alors non borné.
   Autre note utile : en un point de l'ouvert de convergence : la fonction localement bornée aussi).]

38.11 Une série numérique avec le D.S.E. de la fonction *exp*

Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n} = \int_0^1 \dfrac{1}{x^x}.dx$.

38.12 Montrer que $f(x) = e^{x^2}.\int_0^x e^{-t^2}dt$ est D. S. E. (E.D.L.)

[Corrigé. Trouver : $f'(x) = 1 + 2.x.f(x)$. La clé est le Théorème de Cauchy-Lipschitz qui dit que $(y' - 2xy = 1,\ y(0) = 0)$ possède une unique solution ! Or f est solution ; et par calcul une solution est D.S.E. avec un rayon $R > 0$. A finir (...)]

38.13 Trouver $f(x) = \sum \frac{I_n}{n!}.x^n$ avec $I_n = \int_1^e ln^n(t).dt$

1. Montrer que I_n, $n \geqslant 0$, est décroissante vers 0 ; nature de $\sum(-1)^n.I_n$?
2. Vérifier que $I_{n+1} = e - (n+1).I_n$; d'où un équivalent de I_n et la nature de $\sum I_n^\alpha$
3. Rayon de convergence de $\sum \frac{I_n}{n!}.x^n$? Vérifier que $f(x) - I_0 = e.(e^x - 1) - x.f(x)$; conclure.

38.14 Trouver $f(x) = \sum a_n x^n$ avec $a_n = \int_0^{\pi/4} tan^n(t).dt$

1. Calculer a_0 et a_1. Montrer que (a_n) converge vers $l \leqslant 1$.
2. Vérifier que $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$; en déduire l.
3. Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$; puis montrer que $(x^2+1).f(x) - a_0 - a_1.x = -x.ln(1-x)$.

38.15 Vérifier que $\frac{x.sin(a)}{x^2 - 2.x.cos(a) + 1} = \sum_{n\geqslant 1} x^n.sin(n.a)$, $\mid x \mid < 1$

38.16 Equivalent de la fonction : $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{n^2}$, en 1^-

Rayon de convergence ? Puis montrer que $f(x).\sqrt{1-x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (On donne : $\int_0^{+\infty} e^{t^2.ln(x)}dt = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{-ln(x)}}$.) (**) **Note** : La limite au point -1 est $\frac{1}{2}$; cf. ici **39.2** fin.

38.17 CNS pour avoir un DSE au voisinage de 0

1. CNS à montrer : $\exists\ M, \rho, h$ strictement positifs tels que $\forall x \in [-h,h], \forall n : \mid f^{(n)}(x) \mid \leqslant M.\rho^n.n!$
2. Corrigé : CN. Fixons $0 < h < r < R$: $f^{(n)}(x) = \sum_{k\geqslant 0}(k+n)...(k+1)a_{k+n}x^k$.

   Or $(r^p.a_p)$ bornée par K (en module) ; d'où :

   $\mid f^{(n)}(x) \mid \leqslant \sum_{k\geqslant 0}(k+n)...(k+1) \mid a_{k+n}r^{k+n} \mid . \mid \frac{x}{r} \mid^k . \frac{1}{r^n} \leqslant \frac{K}{r^n}\sum_{k\geqslant 0}(k+n)...(k+1(\frac{h}{r})^k = \frac{K}{r^n}\frac{n!}{(1-\frac{h}{r})^{n+1}}$.

   Prendre : $M = \frac{K}{1-\frac{h}{r}}$ et $\rho = \frac{1}{r-h}$.

   CS. Avec Taylor avec reste intégral, on obtient : $\mid R_n(x) \mid \leqslant M.\rho^{n+1}. \mid x \mid^{n+1}$.

   Donc f DSE sur $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha = min(1/\rho, h)$.

39 Compléments sur les Séries entières

39.1 Formules de Newton pour somme des puissances de racines

Soit $P(X) = X^p + ... + a_p = 0$, $a_p \neq 0$. On utilise ici un DSE.

1. Montrer que : $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum \dfrac{1}{t - \lambda_j}$ (racines distinctes ou bien non).
2. Déduire que : $\dfrac{P'(1/t)}{P(1/t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n.t^{n+1}$ (DSE pour chaque $\mid \lambda_j.t \mid < 1$.)
3. En déduire : Si $n \geqslant p$: $S_n + a_1 S_{n-1} + ... + a_p.S_{n-p} = 0$
   et si $n < p$: $S_n + a_1 S_{n-1} + ... + a_{n-1}.S_1 + n.a_n = 0$.

39.2 (*) Un théorème sur le bord pour les séries entières (Abel)

1. Enoncé.

> Soit : $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = f(x)$, de rayon $R > 0$. Si $\sum a_n.R^n$ converge, alors
> f est continue sur $[0, R]$ (et donc $f(R) = \lim_{x\to R} \sum_{n\geqslant 0} a_n.x^n$).

2. [Corrigé guidé] . Montrer qu'on peut se ramener à $R = 1$, ce que l'on fera.
   . Soit $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$; et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer sur $[0, 1[$: $f(x) - S = -\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})$.
   (Transformation d'Abel classique, et noter que : $R_{-1} = S$.)
   . Découper $\sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{n=0}^{n_0} + \sum_{n_0+1}^{+\infty}$ etc. **Note** : Si $a_n = (-1)^{n+1}.n$, la suite des sommes partielles S_n diverge $[S_{2n} = -n, S_{2n+1} = n + 1]$, même au sens de Césaro ; mais converge au sens d'Abel vers $1/4$!
3. Deux remarques. Inversement, si $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} L$, L finie, a-t-on $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ convergente ?
   C'est un énoncé "taubérien" : "non" en général $(f(x) = \dfrac{1}{1+x})$ mais "oui" si $a_n = O(\dfrac{1}{n})$: théorème taubérien fort de Hardy-Littlewood. Preuve si $a_n = o(\dfrac{1}{n})$ (Tauber) ; soit $M_n = sup_{k\geqslant n} \mid k.a_k \mid$:
   - Montrer que M_n existe et converge vers 0. Puis que :
   - $u_n = L - \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k = L - f(x) + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k.(x^k - 1) + \sum_{k\geqslant n+1} a_k.x^k$. Et que :
   - $\mid u_n \mid \leqslant \mid L - f(x) \mid + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \mid a_k \mid .(1 - x^k) + \dfrac{M_n}{n.(1-x)}$ et encore que :
   - $\mid u_n \mid \leqslant \mid L - f(x) \mid + (1-x).\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k. \mid a_k \mid + \dfrac{M_n}{n.(1-x)}$.
   - Avec : $1 - x = 1/n$, et la moyenne de Césaro pour le terme central, conclure.

   Théorème (Frobénius, 1880). $\sum a_n$ Césaro-conv. : $\sigma_n = (\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} s_k)/n$ conv. $\Rightarrow$ Abel-conv. de même somme :
   $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n$ [$s_n x^n \to 0$ ou prod. de C.] $= (1-x)^2 \sum_{n\geqslant 0} (s_0 + ... + s_n)x^n = S + \dfrac{\sum (n+1)(\sigma_{n+1} - S)x^n}{\sum (n+1)x^n}$
   et la dernière fraction tend vers 0 vu l'hypothèse $\sigma_{n+1} \to S$ quand $x \to 1$: exercice.

39.3 Un exemple de calcul sur le cercle de convergence (...)

Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} a_n.z^n$ où $a_n = \dfrac{1}{4n+1}$. En déduire : $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$

39.4 Quelques autres développements en série entière (...)

1. DSE de $tan(x)$; R ? (Autre utilisation d'une éq. différentielle). [Solution : suite (a_n) $\neq$ **38.7**.]

   ▪ Sol. de $y' = 1+y^2, y(0)=0$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$: $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_1=1$ et $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k}$.
   Alors forcément : $\mid a_n \mid \leqslant 1$, $R \geqslant 1$. Par unicité de la solution, tan est DSE et $R \geqslant 1$.

   ▪ Par la formule de Leibnitz, $y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.y^{(k)}.y^{(n-k)}$ donc dérivées <u>positives</u> sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

   ▪ D'où $tan(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n(x)$ et sur $[0,\frac{\pi}{2}[$: $0 \leqslant R_n(x)$ ou $S_n(x) \leqslant tan(x)$; croissante majorée, converge : $R \geqslant \frac{\pi}{2}$. <u>Et cette série vérifie l'éq. diff. : c'est tan</u> ! $R \leqslant \frac{\pi}{2}$ car tan non bornée en $\frac{\pi}{2}^-$.

2. Remarque. cot liée aux "nombres de Bernouilli" ; donc tan aussi car $tan(t) = cot(t) - 2.cot(2t)$.

3. Plus généralement, si f $C^\infty]-\alpha,\alpha[$ paire ou impaire, a des dérivées positives sur $[0,\alpha[$, alors f est DSE sur $]-\alpha,\alpha[$. [Si $0 \leqslant x < y$, on montre que : $R_n(x) \leqslant (\frac{x}{y})^n.R_n(y) \leqslant (\frac{x}{y})^n.f(y)$: Comme le cas précédent, <u>sauf</u> qu'il faut montrer que la série converge <u>vers f</u> ou que le reste tend vers 0 sur $(0,\alpha($. Ecrire $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n(y-t)^n}{(y-t)^n.n!} f^{(n+1)}(t)dt$
   $\leqslant (\frac{x}{y})^n.\int_0^x \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \leqslant (\frac{x}{y})^n.R_n(y) \leqslant (\frac{x}{y})^n.f(y)$.]

39.5 (*) Calcul avec la transformation d'Abel **38.15** **54.7**

1. Montrer si $\alpha \in]0,2.\pi[$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i.n.\alpha}}{n} = \frac{-ln(2)}{2} - \frac{ln[1-cos(\alpha)]}{2} + \frac{i.(\pi-\alpha)}{2}$ (et la convergence) !

2. <u>Corrigé</u>. Si $A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}$, $A_n = \frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$ donc $\mid A_n \mid \leqslant \frac{2}{\mid 1-e^{i\alpha} \mid} = M$. Alors, <u>transf. d'Abel</u>
   $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = \sum \frac{A_k - A_{k-1}}{k} = \sum \frac{A_k}{k} - \sum \frac{A_{k-1}}{k} = \frac{A_n}{n} - \frac{A_0}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ avec
   $\frac{A_n}{n}$ tend vers 0 et série abs. conv. <u>Le 1er terme vaut aussi</u> : $-ln(2.sin\frac{\alpha}{2}.)$

   <u>Considérons</u> la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i.n\alpha}}{n} x^n$. $R=1$ et si $x \in]-1,1[$, $f'(x) = ... = \frac{e^{i\alpha}-x}{x^2-2xcos(\alpha)+1}$... :
   $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i.n\alpha}}{n} x^n = -\frac{1}{2} ln(x^2-2xcos(\alpha)+1) + i.Arctan(\frac{x-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}) + cte.$ Puis, si $\alpha \neq \pi$,
   $cte = i.Arctan(cot(\alpha))$. Avec $Arctan(a)+Arctan(b) = Arctan\frac{a+b}{1-ab}$ si $a.b<1$ $[x.cos(\alpha)<1]$:
   $\Im m\ f(x) = Arctan(\frac{x.sin(\alpha)}{1-x.cos(\alpha)})$ ou : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n.sin(n.\alpha)}{n} = Arctan(\frac{x.sin(\alpha)}{1-x.cos(\alpha)})$ pour $x \in]-1,1[$.
   Faire ensuite tendre x vers 1^- selon le <u>théorème d'Abel</u> 39.2. $Arctan(X) = \frac{\pi}{2} - Arccot(X)$ ...

   Quand $\mid x \mid < 1$, α quelc. ! <u>Autre méthode</u> avec les séries de Fourier. **54.7**.

40 Equations différentielles

40.1 (*) Résoudre $(1+x^2)y" + x.y' - 4.y = 0$ avec $x = sh(t)$

Corrigé : $y = f(x) = f[sh(t)] = g(t)$; $\underline{y' \text{ designe } f'(x)}$; $\underline{\dot{Y} \text{ désignera } g'(t)}$; $\boxed{y(x) = Y(t).}$

D'où $\boxed{y' = \dot{Y}.\frac{1}{ch(t)}}$ avec la dérivation des fonctions composées et des fonctions réciproques $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$.

Dérivons à nouveau $\boxed{y" = \ddot{Y}.\frac{1}{ch^2(t)} - \dot{Y}.\frac{sh(t)}{ch^3(t)}.}$ Et, en reportant : $\ddot{Y} - 4.Y = 0$ qui est facile !

D'où $Y = \lambda.e^{2t} + \mu.e^{-2t} = A.ch(2t) + B.sh(2t)$; et $y = A.(2x^2+1) + C.x.\sqrt{x^2+1}$.

40.2 Résoudre $(1-x^2).y" - x.y' + y = 0$ si $\mid x \mid < 1$, $x = sin(t)$

Corrigé : Déjà des problèmes, pour cette éq. diff. <u>linéaire</u>, prévus en $x = \pm 1$ (cf. coeff. de $y"$).

Puis on pose : $x = sin(t)$ $\boxed{\textbf{avec } t \in]-\pi/2, \pi/2[}$ **qui donne** $t = Arcsin(x)$ **si besoin.**

Et **(ci-dessus) :** $dY/dt = dy/dx.dx/dt$ donc $\underline{\dot{Y} = y'.cos(t)}$; puis en re-dérivant / t :

$\ddot{Y} = dy'/dt.cos(t) - y'.sin(t)$, $\ddot{Y} = dy'/dx.\ dx/dt\ .cos(t) - y'.sin(t)$, $\underline{\ddot{Y} = y".cos^2(t) - y'.sin(t)}$.

Peut-être faudrait-il **inverser** les relations soulignées mais tout devrait bien se passer ...

On trouve $\ddot{Y} + Y = 0$! donc : $Y = A.sin(t) + B.cos(t)$ $\boxed{y = A.x + B.\sqrt{1-x^2}.}$

$\boxed{\textbf{Et si } \mid x \mid > 1 \textbf{ ?}}$ Sur $]-1,1[$, on aurait pu poser aussi bien $x = cos(t)$ ... Ici : $x = \epsilon.ch(t)$, $\epsilon = \pm 1$, $t \geqslant 0$, pour $\mid x \mid > 1$ (**qui donne** $t = Argch(\mid x \mid)$ **si besoin), <u>semble bon</u> !**

40.3 (*) Au sujet de l'équation différentielle d'Euler (...)

1. Résoudre $a.x^2.y" + b.x.y' + c.y = 0$ en posant $x = \epsilon.e^t$, $\epsilon = \pm 1$ selon l'intervalle ou $t = ln \mid x \mid$.
2. Cas de : $x^2y" - 3x.y' + 4.y = 0$?

40.4 Diverses résolutions avec diverses indications (...)

1. Résoudre : $y" + y = tan(x)$ (Var. des ctes. $y = a.cos(x) + b.sin(x) - cos(x).ln \mid tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \mid$.
2. Résoudre : $y" + y = 1/sin^3(x)$ (sol. particulière $(2.cos^2(x) - 1)/2.sin(x)$.)
3. Résoudre : $x^2y" + xy' - y = 0$, $z = x.y$.
4. (*) Trouver f $C^0(\mathbb{R})$: $f(x) = 2.\int_0^x \sqrt{f(t)}dt$. (Réponse. $x \leqslant 0$: $f(x) = 0$; pour $x \geqslant 0$: ou bien $f(x) = 0$; ou bien $\exists c \geqslant 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \leqslant c$ et $f(x) = (x-c)^2$ si $x \geqslant c$).
5. Soit l'équation différentielle $y" + p(x)y' + q(x)y = 0$. Montrer qu'on a deux solutions telles que $u.v = cte$ ($u.v = 1$ possible) $\Leftrightarrow 2p.q + q' = 0$ et alors : $\frac{u'^2}{u^2} = -q$. Cas où : $q(x) = -x^2$?
6. Résoudre : $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$ $(x^{(3)} = x(t)$! ... $)$
7. Résoudre : $(1+x^2)y" + 2x(1+x^2)y' + y = 0$, $t = Arctan(x)$.
8. Résoudre : $x.y" - y' - x^3.y = 0$, $t = x^2$. Et enfin :
9. Trouver f dér. sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = f(-x)$. [**<u>Poser</u>** $f(x) = p(x) + i(x)$, $2.p(x) = f(x) + f(-x)$, etc.]

40.5 E.D.Linéaire du deuxième ordre, théorique (...)

Montrer que : $y" + y = f(x)$, $f\ C^0$ a pour solution particulière : $y(x) = \int_0^x f(t).sin(x-t)dt$.

[C'est un "produit de convolution" qui apparait naturellement dans les Séries de Fourier.]

Etudier ensuite le cas où : $y" - y = f(x)$, $f\ C^0$.

40.6 (*) E.D.L. du deuxième ordre, solution périodique (...)

Existence et unicité d'une solution 2π-périodique telle que $y" - y = \frac{2}{2 - e^{i.x}} = f(x)$.

– **Corrigé :** Equation différentielle linéaire à coefficients constants et ici $y = A.ch(x) + B.sh(x) = a.e^x + b.e^{-x}$ au choix, pour ESSM, vue l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$.

– Une idée de solution expliscite (avec variation des constantes) est permise. Mais possible que si c'est facile (exemple : $y" - y = cos(x)$) ; pas ici ce qui rend l'exercice intéressant (et classique) :

– Existence : Si $\varphi_0(x)$ solution de EASM (périodique ? on ne sait !) Sol. $y = \varphi(x) = \varphi_0(x) + a.e^x + b.e^{-x}$. (*) Comment avoir $\forall x : \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$? Notons $d(x) = \varphi(x + 2\pi) - \varphi(x)$ [différence] :

– Il est assez aisé de voir que $d"(x) - d(x) = f(x + 2.\pi) - f(x) = 0$, vue la $2.\pi$-périodicité de f. (Donc $d(x) = \lambda.e^x + \mu.e^{-x}$: ceci ne va pas forcément servir, c'est pour fixer les idées). Comme $d"(x) - d(x) = O$ il faut et il suffit d'exprimer $d(0) = d'(0) = 0$ pour que $d = O$: problème de Cauchy !

On obtient le système de Cramer en a, b (pourquoi ?) : existence et l'unicité sont alors prouvées !

(1) $\varphi_0(0) + a + b = \varphi_0(2\pi) + a.e^{2.\pi} + b.e^{-2.\pi}$, (2) $\varphi_0'(0) + a - b = \varphi_0'(2\pi) + a.e^{2.\pi} - b.e^{-2.\pi}$.

40.7 Solution bornée de $y" - \omega^2 y = f(x)$; $f\ C^0$, bornée sur $\mathbb{R}$, $\omega \neq 0$

(*) Montrer qu'il existe une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

40.8 Erreur dans la méthode de Newton (valeur approchée de racine)

Soit $f\ C^2[a - r, a + r]$, $r > 0$: $f(a) = 0$ et f' ne s'annule pas (donc, de signe constant).

1. Montrer que $|\frac{f}{f'}| \leqslant \frac{e^{M|x-a|} - 1}{M}$, où $M = sup\ |\frac{f"}{f'}|$. [Supposons $f' > 0$; avec $g(x) = \frac{f}{f'}$: $g' = 1 - g\frac{f"}{f'}$. Si $x \geqslant a$: $g' \leqslant 1 + g.M$; finir avec $Y = 1 + g.M$. Si $x \leqslant a$: $g \leqslant 0$, $g' \leqslant 1 - g.M$, ici $Y = 1 - g.M$. Ou avec une éq. différentielle $g' + h.g = 1$ avec $h(x) = \frac{f"(x)}{f'(x)}$...]. Question 2. **indépendante** :
2. Montrer $\exists h > 0$: sur $]a - h, a + h[$, $| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a | \leqslant M(x - a)^2$ ["convergence quadratique".]

40.9 Equations diff. non linéaires mais qui s'y ramènent (...)

1. 1er ordre. Bernoulli : $a(x)y' + b(x).y + c(x).y^n = 0$. (Poser $z = 1/y^{n-1}$.)
   Ricatti : $a(x)y' + b(x).y + c(x).y^2 = d(x)$ (avoir une solution $y_1(x)$, puis $y(x) = y_1(x) + z(x)$.)
   Lagrange $y = A(y').x + B(y')$: isoclines rectilignes I_m : $y = x.A(m) + B(m)$. Si $A(m_0) = m_0$: droite solution. Cas part. Clairaut, $y = x.y' + B(y')$. Après les solutions éventuelles $A(m_0) = m_0$, poser $y' = m$, nouvelle var. : $[m - A(m)].dx/dm - A'(m).x = B'(m)$, $y(m)$ illico. **13.4**. Clairaut : les droites I_m et **leur enveloppe :** $x = -B'(m)$, $y = -m.B'(m) + B(m)$! Ex : $y = x.y' + y'^2$.
2. 2ème ordre. Si $y" = f(y, y')$, incomplète en x, poser $y' = z(y)$ [d'abord $y = cte$?] alors $y" = \dot{z}.z$.
   Exemples. $yy" = (y' - 1).y'$: $(y = \lambda,\ y = x + \mu,\ y = \alpha.e^{\beta.x} - 1/\beta)$.
   $2yy" = y' - y'^3$: $(y = cte,\ x = \mu + y + 2.\lambda.ln\ |\ y - \lambda\ |)$. $2kyy" = (1 + y'^2)$ (Ribaucour, $2k \in \mathbb{N}$.)
   Si on a une homogène en $y, y', y"$, poser $z = y'/y$ et cf. **40.11.** Ex. $y" - 2.x.y' = y(1 - x^2)$ devient $z' + z^2 - 2xz = 1 - x^2$ (Ricatti), $z = x + u(x)$ enfin : $y = k.(x - \lambda).e^{x^2/2}$.)

40.10 Question très classique mais pas très facile (!)

Soit $a > 0$ et $f\ C^1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f'(x) + a.f(x)$ [notée $g(x)$] tende vers 0 en $+\infty$.

Montrer que : $f(x) \longrightarrow 0\ (x \to +\infty)$. (Indication : résoudre $y' + a.y = g(x)$.)

40.11 Sur la Transformation de Liouville (...)

1. Soit $y" + \alpha(x).y' + \beta(x).y = 0$. (1) Montrer qu'on se ramène à $z" + q(x).z = 0$ (I) [équation de Hill si q périod.] avec $y = u.z$: $2u' + \alpha.u = 0$; alors : $q = \beta - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha'}{2}$, $u(x) = exp(\frac{-1}{2}.\int_0^x \alpha(t).dt)$.
2. Autre transformation. Montrer qu'on passe de (1) à une équation de Riccatti réduite :

   $v' + \alpha(x).v + v^2 = -\beta(x)$ avec $y = exp \int v(x)dx$, $y(x)$ supposée positive ; (où $v = \frac{y'}{y}$).

   Et qu'on passe inversement de (2) $v' + a(x).v + b(x).v^2 = c(x)$ à (1) avec $v = \frac{y'}{y.b(x)}$.
3. On passe donc de $y" + q(x).y = 0$ (I) 'Sturm-Liouville réduite' à (II) $v' + v^2 = -q$ et de (II) à (I).

   A toute équation de Ricatti, on peut associer une EDL_2 "sans second membre" et inversement.

   Vu que les solutions de cette EDL_2 sont $y = C_1.y_1 + C_2.y_2$, et $v = \frac{y'}{y}$, les sol. d'une équation différentielle de Ricatti dépendent homographiquement d'une constante arbitraire.

40.12 Diverses utilisations du Wronskien

1. Soit $y" + g(x).y = 0$, g continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer, si φ solution bornée, (avec $\varphi'(x) - \varphi'(0) = -\int_0^x \varphi(t).g(t).dt$) que $\varphi'(x)$ a une limite en $+\infty$; puis que cette limite vaut 0.
   (b) Vérifier que le Wronskien $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \varphi_1(x).\varphi_2'(x) - \varphi_2(x).\varphi_1'(x)$ est constant.

   [Si on avait eu (1) ci-dessus, on aurait eu $W(x) = C.e^{-\int \frac{\alpha(x)}{1}.dx}$.]
   (c) En déduire qu'il y a au moins une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit φ de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\varphi"(x) + \varphi(x) \geqslant O$.

   En considérant les variations de la fonction :

   $g(t) = sin(t - x).\varphi'(t) - cos(t - x).\varphi(t)$ sur $[x, x + \pi]$, montrer que $\varphi(x) + \varphi(x + \pi) \geqslant 0$.

40.13 Equation différentielle et série

1. (a) Rayon de convergence de : $\sum \binom{2n}{n} .x^n$? (Trouver $\frac{1}{4}$.)
   (b) Avec une EDL_1 $[(4x - 1)y' + 2y = 0]$ montrer que $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} .(\frac{x}{4})^n = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

   [On peut aussi voir que $a_n = (4 - 2/n).a_{n-1}$ sur la série initiale.]
2. Résoudre l'éq. diff. linéaire : $xy" + 2y' + xy = O$, **en cherchant une solution D.S.E.**

   Sol. Posons : $y = \sum a_n.x^n, R > 0$; on a $\sum_{n \geqslant 1} n(n-1)a_n.x^{n-1} + 2\sum_{n \geqslant 1} n.a_n.x^{n-1} + \sum_{n \geqslant 0} a_n.x^{n+1} = O$.

   Termes en x^0 : $a_1 = 0$. En x^1 : $6a_2 = -a_0$. En x^k : $(k + 2)(k + 1).a_{k+1} = -a_{k-1}$. Donc $f(x) = \sum a_{2p}x^{2p}$ $(a_{2p+1} = 0)$ et aisément $R = +\infty$. On reconnait $f(x) = a_0.\frac{sin(x)}{x}$. Utilisant la méthode de la variation de la constante, voici toutes les solutions : $y = l.\frac{sin(x)}{x} - k.\frac{cos(x)}{x}$.

41 Calcul d'Intégrales simples

41.1 On montre que $\pi \notin \mathbb{Q}$, résultat d'abord prouvé par Lambert

1. Une conséquence : Soit la suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$; montrer que tous ses éléments sont distincts.
2. Soit $I = \int_0^\pi P(x).sin(x).dx$, P polynôme de degré $2n$.
   (a) Montrer que : $I = P(\pi) + P(0) - \int_0^\pi P"(x).sin(x).dx$. En déduire que :
   (b) $I = P(\pi) + P(0) - P"(\pi) - P"(0) + P^{(4)}(\pi) + P^{(4)}(0) - ... + (-1)^n[P^{(2n)}(\pi) + P^{(2n)}(0)]$.
3. Supposons que $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(x) = \frac{x^n.(a-b.x)^n}{n!}$; $I_n = \int_0^\pi \frac{x^n.(a-b.x)^n}{n!}.sin(x).dx$.
   (a) Montrer que $\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leqslant j < n$, $P^{(j)}(0) = 0$. (Ordre de multiplicité de la racine.)
   (b) Pour : $n \leqslant j \leqslant 2n$, préciser le coefficient de x^{n+j} dans $P(x)$. En déduire que : $P^{(n+j)}(0) = \frac{(n+j)!}{j!(n-j)!}a^{n-j}.(-b)^j \in \mathbb{Z}$ et $A = P(0) - P"(0) + P^{(4)}(0) - ... + (-1)^n.P^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Avec $P(\pi - x) = P(x)$, montrer que $B = P(\pi) - P"(\pi) + P^{(4)}(\pi) - ... + (-1)^n.P^{(2n)}(\pi) = A$.
   (d) . Justifier que $I_n \in \mathbb{N}^*$. (Montrer $I_n > 0$, par le Théorème "aux 4 hypothèses").
   . Puis que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. (Majorer $P(x)$ par $(\pi.a)^n/n!$ sufft.) Conclure.

[En fait e et π sont des nombres "transcendants".]

41.2 (*) Intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ obtenue par décomposition

(*) On montre que $I_{m,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{sin\frac{m.\pi}{n}}$ en décomposant la fraction ; $0 < m < n$.

1. Vérifier que $I_{m,n} = 2.I_{2m,2n}$. On calcule $I_{2p,2q}$ et, pour la suite, notons improprement $m = 2p$:
2. Avec $t_k = \frac{\pi}{2q} + k.\frac{\pi}{q}$, vérifier qu'on doit intégrer $\frac{-1}{2q}.\frac{2.x.cos(m.t_k) - 2.cos(m-1)t_k}{x^2 - 2x.cos(t_k) + 1}$, $k \in [[0, q-1]]$.
3. Et $[m = 2p]$ que $\sum_{0\leqslant k\leqslant q-1} e^{imt_k} = e^{im\frac{\pi}{2q}}.\sum_{0\leqslant k\leqslant q-1} e^{im\frac{\pi.k}{q}} = 0$, $\sum_k cos(mt_k).\int_0^\beta \frac{2(x - cos(t_k))dx}{x^2 - 2xcos(t_k) + 1} \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Que $\frac{1}{q}.\int_0^{+\infty} \frac{sin(m.t_k).sin(t_k).dx}{(x - cos(t_k))^2 + sin^2(t_k)} = \frac{sin(mt_k)(\pi - t_k)}{q}$, car $Arctan(t) = \frac{\pi}{2} - Arccot(t)$, $t \in]0, \pi[$.
5. Avec $\sum k.e^{i.kt}$, $[m = 2p]$ et question 3(a), vérifier que : $\sum sin(m.t_k).t_k = \frac{\pi}{q}.\frac{2q.sin(2p\pi/(2q))}{-4.sin^2(2p\pi/(2q))}$.
6. En déduire, encore avec 3(a), que : $I_{2p,2q} = \frac{\pi/q}{2.sin(2p.\pi/\ 2q)}$; et enfin la valeur de $I_{m,n}$ attendue.

41.3 Des calculs d'intégrales conduisant à des intégrales généralisées

1. Vérifier que $I(\lambda) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + \lambda^2.sin^2(t)} = 2.\int_0^{\pi/2} *$ et, avec $u = tan(t)$, que $I(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.
2. Soit $I_n(\lambda) = \int_0^\pi \frac{cos(n.t).dt}{1 - 2.\lambda.cos(t) + \lambda^2}$, $\lambda \neq \pm 1$. Calculer $I_0(\lambda)$ avec $u = tan\frac{t}{2}$. (cf. **44.7**(b) et après.)
   Vérifier ensuite les égalités suivantes : $I_n(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^2.I_n(\lambda)$, $\lambda.(I_{n+1} + I_{n-1})(\lambda) - (1+\lambda^2).I_n(\lambda) = 0$
   et, avec $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, déduire que : $I_n(\lambda) = \frac{\pi}{(\lambda^2-1).\lambda^n}$ si $|\ \lambda\ | > 1$ ou $I_n(\lambda) = \frac{\pi.\lambda^n}{1-\lambda^2}$ si $|\ \lambda\ | < 1$.

41.4 $fC^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})$**,** σ **subd. :** $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{1}{n}\int_a^b f$. $\frac{1}{n}\sum f(x_k) \to \int_a^b f^2 / \int_a^b f$

Ind. : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ bijective (sur son image) ; $x_k = F^{-1}(\frac{k.I}{n})$ où $I = \int_a^b f(t).dt$; et calcul.

41.5 (*) Quelques questions théoriques sur l'intégrale de Riemann

1. On suppose que $s_{\Delta 1} \leqslant I^- \leqslant I^+ \leqslant S_{\Delta 2}$. (Notations des sommes de Darboux, par ex.) Alors :
   Quand (le module de Δ) $= \delta$ $(max \mid x_j - x_{j-1} \mid)$ tend vers 0, s_Δ tend vers I^-. Idem l'autre.
   Lemme pour preuve. Soit $\epsilon > 0$ et choix : $I^- - s_{\Delta'} < \epsilon$; soit n le nombre de points de Δ'.
   Alors : $s_{\Delta\cup\Delta'} - s_\Delta \leqslant n.\delta.(M-m)$ où, $\delta = \mid \Delta \mid$ et M, m bornes de f. [à voir.]
   [Ajouter 1 pt : $(x^* - x_{i-1}).m_1' + (x_i - x^*).m_2' - (x_i - x_{i-1}).m_0 \leqslant (x_i - x_{i-1}).(M-m) \leqslant \delta.(M-m)$.]
   Puis : Avec δ tel que $n.\delta.(M-m) < \epsilon$, on aura : $I^- - s_\Delta < 2.\epsilon$, ce qui termine.
2. D'où le Théorème : Si f R-int ($I^- = I^+ = I$), alors les sommes de Darboux, donc de Rieman, tendent vers I quand le module de la subdivision tend vers 0. Réciproque vraie et assez facile.
3. De la définition, les fonction R-int sont exactement celles qu'ont peut encadrer par 2 fonctions en escalier $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec $0 \leqslant \int_a^b (\psi - \varphi)dx < \epsilon$: en fait, il est suffisant que φ et ψ soient R-int.
   Donc une limite uniforme de fonctions R-int. (pour $n \geqslant N$: $f_n - \epsilon \leqslant f \leqslant f_n + \epsilon$) est R-int. !
4. Les fonctions en escalier sont R-intégr. (facile). Les limites uniformes des fonctions en escalier sont donc R-int. On dit fonctions réglées. Comme la limite uniforme d'une suite de f. continues en x_0 est continue en x_0 et qu'une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est dénombrable, les points de discontinuïté des fonctions réglées forment un ensemble fini ou dénombrable.
   Théorème : f réglée sur $[a,b] \Leftrightarrow f$ a une limite à droite et à gauche en chaque point ("étagée").
   Preuve . ($\Rightarrow$) Limite à droite en $x_0 \in [a,b[$: $f = Lim - unif(f_n)$ et chaque f_n admet une limite à droite en x_0 car en escalier. Par la convergence uniforme de fonct. ayant une telle limite, f aussi.
   . ($\Leftarrow$) Soit $\epsilon > 0$: Pour $x \in [a,b]$ on trouve α_x tel que sur $]x-\alpha_x, x[$ et $]x, x+\alpha_x[$ on ait $\mid f(t) - f(t') \mid < \epsilon$, grâce à l'hypothèse. Comme $[a,b]$ est compact, on extrait un sous recouvrement fini de $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[$ ($\cap [a,b]$!) De là, on a assez aisément un nombre fini de points de subdivision de $[a,b]$ ($x-\alpha_x, x, x+\alpha_x$ rangés par ex.) et une fonction en escalier φ : $\mid f - \varphi \mid < \epsilon$. Avec des $\epsilon = 1/n$, on obtient alors une suite de fonct. en escalier convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f.
5. On montre enfin (**) que les fonctions R-int sur $[a,b]$ sont **les** fonctions bornées dont les points de discontinuïté est une partie de mesure nulle. Or on a des parties de mesure nulle non dénombrables : l'intégrale de Riemann est donc plus générale que celle des fonctions réglées (celle de Cauchy).
6. Développements asymptotiques des sommes de Riemann. Les fonctions sont partout C^2.
   (a) Montrer (1) $\int_0^1 g(t)dt = \frac{g(1)+g(0)}{2} - \int_0^1 \frac{t-t^2}{2} g"(t)dt$. Ind. : Partir du membre de droite ; ou du membre de gauche par parties avec $v' = 1$, $v = t - 1/2$. (Début de la formule d'Euler-Mac Laurin.)
   (b) Interpréter : $\frac{g(1)+g(0)}{2}$ comme aire de trapèze ; et, si $g" \geqslant O$, le signe : $\int_0^1 \frac{t-t^2}{2}.\, g"(t)dt \geqslant 0$.
   (c) Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$. On admet les égalités suivantes faciles, la dernière en posant $x = \frac{k-1+t}{n}$:
   $I = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_0^1 f(\frac{k-1+t}{n})\, dt$. Avec (1) appliquées aux dernières, montrer :
   (2) $I = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) - \frac{f(1)-f(0)}{2n} - r_n$, où : $r_n = \frac{1}{n^2}.(\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^n J_k)$, $J_k = \int_0^1 \frac{t-t^2}{2} f"(\frac{k-1+t}{n})\, .dt$.
   (d) Si $m_2 = \inf f"$, $M_2 = \sup f"$ sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, montrer que $J_k \in [\frac{m_2}{12}, \frac{M_2}{12}]$; $J_k = \frac{f"(\xi_k)}{12}$, $\xi_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ [on rappelle que l'image d'un segment est un segment par $f"$ qui est C^0]. Enfin, avec une somme de Rieman, montrer que $r_n = \frac{f'(1)-f'(0)}{12n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}$. Exemple : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = ln(2) - \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}$.

42 Intégrales généralisées

42.1 Le cours : à ne pas confondre (...)

1. L'existence des intégrales généralisées = intégrales (semi-)convergentes. Avec :
2. Fonctions intégrables sur I= absolument intégrables ou : $\exists M>0 : \forall J \subset I, \int_J \mid f \mid \leqslant M$.
   On peut avoir $I=[a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[$. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tan(x)}dx$ existe et vaut $\frac{\pi.\sqrt{2}}{2}$.

42.2 (*) Au sujet de la période du pendule simple

Soit θ l'angle fait par le fil (sans pesanteur attaché à une masse m) avec la verticale descendante Oz.
La conservation de l'énergie fournit l'équation classique : $\frac{1}{2}m.l^2.\dot{\theta}^2 - m.g.l.cos(\theta) = -m.g.l.cos(\theta_0)$;
ce qui donne la période $T = 4.\sqrt{\frac{l}{2g}}.\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos(\theta)-cos(\theta_0)}}$ (et $\int_0^{\pi/2} sin^{2n}u.du = \frac{\pi}{2}.\frac{1.3...(2n-1)}{2.4. \ ... \ .2n}$, Wallis).

1. En posant $sin(u) = \frac{sin(\theta/2)}{sin(\theta_0/2)}$, montrer que : $T = 4.\sqrt{\frac{l}{g}}.\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2.sin^2(u)}}$, $k = sin\frac{\theta_0}{2}$, (Jacobi).
2. Avec $I(k)$ cette dernière, trouver : $I(k) = \frac{\pi}{2}[1+\frac{k^2}{4}+O(k^4)]$ donc : $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}.[1+\frac{\theta_0^2}{16}+O(\theta_0^4)]$.
   (D'où : Isochronisme des oscillations à $\frac{1}{100}$ près : pour $\theta_0 \leqslant 0,4$ radians, soit $\theta_0 \leqslant 23$ degrés).

42.3 (*) Période indépendante de l'amplitude (isochronisme)

1. Construire la courbe d'équation : $x = R.[\theta - sin(\theta)]$; $y = -R[1-cos(\theta)]$ (pendule cycloïdal).
2. La conservation de l'énergie donne : $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgy = mgy_0$. ($E_p$ énergie potentielle). Déduire que $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}.\frac{cos(\theta_0)-cos(\theta)}{1-cos(\theta)}$; $T = 4.\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}.\sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{cos(\theta_0)-cos(\theta)}}d\theta$. [$\theta=\pi$, bas de la cycloïde inversée].
3. On pose : $u^2 = cos(\theta_0)-cos(\theta)$, d'où : $2u.du = sin(\theta).d\theta$. Vérifier qu'on a aussi $T = 4.\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\sqrt{1+cos(\theta_0)}} \frac{\sqrt{1-cos(\theta_0)+u^2}\ .2.u.du}{u.\sqrt{1-cos(\theta_0)+u^2}.\sqrt{1+cos(\theta_0)-u^2}} = 4.\pi.\sqrt{\frac{R}{g}}$. Conforme avec $2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$ car au bas de la cycloïde le rayon de courbure vaut $\mathcal{R} = 4R$. Comme la développée d'une cycloïde est aussi une cycloïde, on a une réalisation de ce pendule cycloïdal due à Huyghens.
4. Réciproque. (*) Soit Oy tourné vers le haut. Pour avoir un "oscillateur harmonique" : $\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega_0^2 s$, $\frac{1}{2}m.(\frac{ds}{dt})^2 + E_p = E_0$, $m.\frac{ds}{dt}.\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dE_p}{dt} = 0, \frac{dE_p}{ds} = k.s$, $k = m.\omega_0^2$, on doit avoir $E_p = \frac{1}{2}k.s^2$, si choisie nulle au fond de la courbe ; aussi origine des abscisses curvilignes (et des y). Donc $\frac{1}{2}k.s^2 = m.g.y$. D'où $\frac{ds}{dy} = \frac{g}{\omega_0^2.s}$. Avec $ds^2 = dx^2+dy^2$: $dx = \sqrt{\frac{g}{2.\omega_0^2.y}-1}.dy$, donc : $y \leqslant \frac{g}{2.\omega_0^2} = y_{max}$. Posant alors $y = y_{max}.\frac{1-cos(u)}{2} = \frac{g}{4.\omega_0^2}.(1-cos(u))$! trouver $x = x_0 + \frac{g}{4.\omega_0^2}.(u+sin(u))$: la cycloïde !!
5. Cycloïde : courbe "isochrone" = la période est indépendante de l'amplitude. Ceci provient qu'elle est aussi : "tautochrone" [tautologie] = on arrive en A, bas de la cycloïde, partant de D sans vitesse initiale, avec un temps égal quel que soit départ D, sur une arche renversée. Car $s^2 = 8.R.y$, si origine de s au point A le plus bas. Alors : $\frac{1}{2}.m.(\frac{ds}{dt})^2 + m.g.y = cte$ qui donne $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4.R}s = 0$.

42.4 Existences et divers calculs d'intégrales généralisées (...)

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi\,; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^{2t}}} = ln(1+\sqrt{2})\,; \quad (*)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(Arctan(x+1) - Arctan(x)\big).dx = ? \quad \text{(Aucun calcul ne primitive n'est indispensable !)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln(x)}{1+x^2}dx\ ?\ \text{(Fin : } \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{ln(x)}{1+x^2}dx \text{ et poser } t=\frac{1}{x}.) \quad \int_0^{+\infty} \frac{sin(x).dt}{ch(t)+cos(x)} = x,\ \ x \in [0,\pi[.$$

42.5 Intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ avec les intégrales de Wallis

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n.dt \leqslant \int_0^1 e^{-n.t^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$
2. Avec les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^n(x).dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, trouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

42.6 Une intégrale classique avec un D.S.E. : $\int_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt$

$\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt$: existence et calcul. ($\frac{ln(t)}{1-t}$ non bornée en 0).

– Solution. On sait que $\dfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+...+t^{n-1}+\dfrac{t^n}{1-t}$ sur [0,1[. Et $I_k(x) = \displaystyle\int_x^1 t^k.ln(t).dt$ vaut : $I_k(x) = [\frac{t^{k+1}.ln(t)}{k+1}]_x^1 - \displaystyle\int_x^1 \frac{t^k}{k+1}dt$. On a donc, en faisant tendre x vers 0 :

$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} I_k(x) = \dfrac{-1}{(k+1)^2}$, vu que $x.ln(x) \to 0\ (x \to 0)$.

– Reste $J_n(x) = \displaystyle\int_x^1 t^{n-1}.\frac{t.ln(t)}{1-t}dt$, n étant choisi $n \geqslant 1$; aucun problème en 1.

$g(t) = \dfrac{t.ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuïté sur le segment [0,1] ; ainsi bornée : $|\ g(t)\ | \leqslant M$;

donc sans aucun problème : $\lim\limits_{x\to 0} J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}.\frac{t.ln(t)}{1-t}dt$ noté J_n. Puis :

$|\ J_n\ | = |\ \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}.\frac{t.ln(t)}{1-t}dt\ | \leqslant \int_0^1 |\ t^{n-1}.\frac{t.ln(t)}{1-t}\ |\ dt \leqslant \int_0^1 M.t^{n-1}dt \leqslant M.\frac{1}{n}$ $\boxed{\Rightarrow\ J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

- Fixons $n \geqslant 1$; faisons $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt = -(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}) + J_n = L\,;\quad \forall n \geqslant 1.$
- Faisons ensuite $n \to +\infty$; sachant que $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$ [difficile mais connu]

et $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $L = \dfrac{-\pi^2}{6}$. $\boxed{\text{Ce qui donne : } \displaystyle\int_x^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt = \frac{-\pi^2}{6}.}$

42.7 Une autre intégrale classique $\int_0^{\pi/2} ln(sin(t)).dt$ (...)

1. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} ln(sin(t)).dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} ln(cos(t)).dt$. Existence et $I = J$?
2. Monter que $\displaystyle\int_0^{\pi} ln(sin(t)).dt = 2.I$. Calculer $I+J$. En déduire que $I = J = \dfrac{-\pi}{2}.ln(2)$.
3. Déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x.dx}{tan(x)} = \frac{\pi}{2}.ln(2)$ (par parties) ; $\displaystyle\int_0^{\pi} x.ln(sin(x)).dx = -\pi^2.\frac{ln(2)}{2}$, $(t = \pi - x)$.

42.8 Limite de série en lien avec une intégrale généralisée

Soit f $C^0 : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, décroissante, intégrable. Vérifier que $\lim\limits_{h\to 0^+} h.\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n.h) = \int_0^{+\infty} f(x).dx.$

42.9 Existence et calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$

1. On considère $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{sin(n.x)}{sin(x)}dx$. Montrer que $(I_{2n+1})_n$ est constante.
2. On pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2(nx)}{sin^2(x)}dx$. Vérifier que $J_{n+1} - J_n = I_{2n+1}$ et que $J_n = \frac{n.\pi}{2}$.
3. Montrer que : $K_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2(nx)}{x^2}dx \leqslant J_n$ où $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2(nx)}{tan^2(x)}dx = J_n - \frac{\pi}{4}$.
4. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$. Et que : $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

42.10 Avec une fonction intégrable (intégrale absolument convergente)

1. Soit f $C([0,+\infty[,R)$ positive, intégrable. Montrer que f décroissante $\Rightarrow x.f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   [**On peut utiliser** $\int_x^{2x} f(t)dt$ tend vers 0. Note : ceci entraine aussi 3.(a).]
2. Soit f $C([0,+\infty[,R)$ positive, intégrable. Montrer que f uniformément continue $\Rightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. (a) Soit f $C([0,+\infty[,R)$ positive, intégrable. Montrer : $\frac{1}{x}\int_1^x t.f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. [Parties + Césaro.]
   (b) Soit $g(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x t.f(t).dt$. Montrer que g est intégrable et que $\int_1^{+\infty} g(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t).dt$.
   [Ceci aussi avec les séries mais prendre $v_n = \frac{1}{n.(n+1)}\sum\limits_{p=1}^{n} p.u_p$.]

42.11 Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec f^2 et $f"^2$ intégrables (...)

1. Montrer que $f.f"$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. (Cauchy-Schwartz).
2. Puis que : f'^2 est intégrable (parties et si $f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $f^2(x) \geqslant 2x + c$ vers $+\infty$;
   et si $f(x)f'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $f^2(x) \geqslant -2x + d$ vers $-\infty$.)
3. Montrer que $(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2.\int_{-\infty}^{+\infty} f"^2$. (Avec finalement : $f(x)f'(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$!)
4. Que f est uniformément continue ($f(y) - f(x) = \int_x^y 1.f'(t).dt$ et (CS)) et que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

42.12 Avec $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$: $\int_0^{+\infty} \frac{x}{sh(x)}.dx = \frac{\pi^2}{4}$ (D.S.E.)

42.13 (*) Montrer que l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ de $f(x) = e^{-x.|sin(x)|}$ diverge

43 Théorème de la "convergence dominée"

43.1 Des exemples pour retenir ce théorème

1. Importance de l'hypothèse de domination : $f_n(t) = n.t^{n-1}$ sur $[0,1[$, $f_n(1) = 0$.

2. Ex. $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n.dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et $I_n = \sqrt{n}.W_{2n+1}$ (Wallis) donne $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   [Prendre $f_n(t) = (1 - \dfrac{t^2}{n})^n.1_{[0,\sqrt{n}]}$ (fonction caractéristique).]

3. Applications aux intégrales à paramètre.

43.2 Des limites et des équivalents d'intégrales (...)

Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^n}.dx$ $(n \to +\infty)$? On suppose $f(1) \neq 0$. Equivalent de $I_n - L$?

43.3 Existence et Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n.sin(t).dt}{t(1+n^2t^2)}$, $n \to +\infty$

Existence ? Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

43.4 Equivalent de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a.t}.dt}{\sqrt{t^2+1}}$, quand $a \to 0$ [réponse]

Montrer que $I(a) \underset{a\to0}{\sim} -ln(a)$.

43.5 Etude et équivalent de fonction. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ (...)

Domaine de définition ? Variations ? Equivalents simples en $+\infty$ et en 0.

43.6 (*) Equivalent de fonction définie par une intégrale [réponse]

Soit : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t.[exp(\sqrt{t}) - 1]}$

1. Justifier son existence pour $x > 0$.

2. Equivalent en 0^+ ? en $+\infty$? $(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\,;\quad \dfrac{2.exp(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.)$

44 Intégrales à paramètres

44.1 Des résultats : rappelés et illustrés

1. Un cas facile. Montrer que : $f(x)=\int_0^{2.\pi}\frac{dt}{1-cos(x).cos(t)}=\frac{2\pi}{sin(x)}$ pour $x\in]0,\pi[$.

   Ind. $\int_0^{2.\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}=2.\int_0^{\pi}*$ Puis :

   $u=tan\frac{t}{2}\ \Rightarrow f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{4.du}{(1+u^2)-(1-u^2).cos(x)}=\frac{4}{(1+cos(x)}.\sqrt{\frac{1+cos(x)}{1-cos(x)}}.\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{sin(x)}$

2. Continuité de f : $x\in J\longmapsto\int_I g(x,t).dt$; $x\in J$. f C^0 sur J si on a :

   (1) continuité de g par rapport à x sur J

   (2) continuité par morceaux (CM) par rapport à t sur I ($\cap\mathbb{R}$)

   (3) $\forall$ $[\alpha,\beta]\subset J$, $\exists\varphi$ CM, intégrable sur I, $\mid g(x,t)\mid\leqslant\varphi(t)$ (domination sur tout segment).

   Exemples [(*) Démonstration avec les suites (x_n) et Théorème de la convergence dominée].

   (a) $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$ avec $J=[0,+\infty[$, $I=]0,+\infty[$!

   (b) $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}dt$ f C^0 sur $]0,+\infty[$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1/x$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\sqrt{\pi/x}$.

3. Dérivabilité de f. Formule de Leibnitz : f C^1 sur J et $f'(x)=\int_I\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ si (de plus) :

   (1) existence et continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ par rapport à x sur J

   (2) aussi sa continuité par morceaux (CM) par rapport à t sur I ($\cap\mathbb{R}$)

   (3) $\forall[\alpha,\beta]\subset J,\exists\varphi$ CM, intégrable sur I, $\mid\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mid\leqslant\varphi(t)$ (mais une domination "locale" suffit).

   Ex.2.(a). Trouver $f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2.x.dt}{(x^2+t^2)(1+t^2)}=\frac{\pi}{1+x}$ même si $x=1$; $f(x)=\pi.ln(1+x)$.

   Pour $x>-1$, montrer que : $f(x)=\int_0^1\frac{t-1}{ln(t)}.t^x.dt=ln(\frac{x+2}{x+1})$. [cf. **44.7**.]

44.2 Pour $x>1$, soit $f(x)=\int_0^{\pi}ln(x+cos(t)).dt$ (...)

1. Montrer que f est C^1 et que $f'(x)=\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$; en déduire : $f(x)=\pi.ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$.
2. Montrer que $f(x)-\pi.ln(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Conclure que $C=-\pi.ln(2)$.

44.3 (*) Si f $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0)=0$: $U(x)=f(x)/x$, $U(0)=f'(0)$ C^∞

(Ind. $U(x)=\int_0^1 f'(t.x).dt$ et donner $U^{(n)}(0)$ en fonction de $f^{(n+1)}(0)$. Si f D.S.E., résultat connu !)

44.4 (*) Au sujet de la fonction : $x\mapsto f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}.ch(2.x.t).dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $f'(x)=2.x.f(x)$.
2. Déduire que $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{x^2}$. [(*) $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x.t^2}.dt}{1+t^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ permet de calculer l'intégrale de Gauss.]

44.5 Etudier $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{Arctan(x.t).dt}{t.(1+t^2)}$, définie sur $\mathbb{R}$, impaire (...)

1. Montrer que f est définie, impaire et C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=\frac{\pi}{2}.\frac{|\,x\,|-1}{x^2-1}$.
2. D'où pour $x\geqslant 0$, $f(x)=\frac{\pi}{2}.ln(1+x)$ $\quad(-\frac{\pi}{2}.ln(1-x)$ si $x\leqslant 0)$
3. En déduire que $K=\int_0^{+\infty}\left(\frac{Arctan(x)}{x}\right)^2.dx=\pi.ln(2)$.

44.6 (*) Avec $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x.t}.sin(t)}{t}.dt$, calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{sin(t)}{t}.dt$

1. Montrer que $x\mapsto\int_0^{\pi}\frac{e^{-x.t}.sin(t)}{t}dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (Primitive de $sin(t).e^{-xt}$ facile).
2. Et $x\mapsto\int_{\pi}^{+\infty}\frac{e^{-x.t}.sin(t)}{t}dt=\frac{-e^{-x\pi}}{\pi(1+x^2)}-\frac{1}{1+x^2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{cos(t)+x.sin(t)}{t^2}e^{-xt}dt$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Puis que f est C^1 si $x>0$; $f'(x)=-1/(1+x^2)$, $f(x)=Arctan(1/x)$. Préciser I. **44.9**.

44.7 $f(x)=\int_0^{\pi}ln(x^2-2x.cos(t)+1).dt$, intégrale de Poisson 39.5

1. Montrer que f est définie si $x\neq\pm1$; et sur $]-1,1[$ $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{x^2-2x.cos(t)+1}.dt=\frac{\pi}{1-x^2}$.
2. On pose sur $]-1,1[$, $J=\int_0^{\pi}\frac{cos(t)}{x^2-2x.cos(t)+1}.dt$. Vérifier que $-2xJ+(x^2+1)I=\pi$.
   Déduire sur $]-1,1[$, que $J=\frac{\pi.x}{1-x^2}$; enfin que $f'=O$ sur $]-1,1[$ et $f=O$ sur $]-1,1[$.
3. Vérifier enfin, pour $|\,x\,|>1$, que : $f(x)=f(1/x)+\pi.ln(x^2)$. (*) Cas $x=\pm1$? **42.7**.
   Autres façons : $\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1-2x.cos(k\pi/n)+x^2)=(x+1).\frac{x^{2n}-1}{x-1}$ et sommes de R. Ou bien
   $\sum_{n\geqslant 1}e^{i.n.t}.\frac{x^n}{n}=-\frac{1}{2}.ln[x^2-2x.cos(t)+1]+i.Arctan\frac{x.sin(t)}{1-x.cos(t)}$ si $|\,x\,|<1$ ... (S.E. ou S.F.)

44.8 Etudier : $g(x)=\int_0^1\frac{t^x-1}{ln(t)}.dt$ et $h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{ln(t)}{x^2+t^2}.dt$

1. On prend aussi $f(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}-1}{ln(t)}.dt$: $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=ln(x)$ (domination pour $0<a<x<b$).
2. Voir aussi $h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{ln(t)}{x^2+t^2}dt$, $x>0$ ($t=x.u$, $h(1)=0$, $h(x)=\frac{\pi.ln(x)}{2.x}$. Sur $\mathbb{R}^*$, h paire.)

44.9 (*) Intégrale généralisée calculée avec une série entière

1. Soit $\varphi(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n.x^n}{n!}$ et $\psi(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_n.x^n$ de rayon $R>0$. Montrer que φ a un rayon $R'=+\infty$.
2. On veut montrer que $\int_0^{\infty}e^{-t}.\varphi(x.t).dt=\psi(x)$ si $|\,x\,|<R$. Vérifier que $\int_0^{+\infty}e^{-t}.t^n.dt=n!$
   Déduire, si $|\,x\,|<R$, que : $\sum_{n\geqslant N}|\,a_n.x^n\,|.\int_0^{+\infty}\frac{t^n.e^{-t}}{n!}dt=\sum_{n\geqslant N}|\,a_n.x^n\,|\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
   Conclure par (**) le théorème de convergence croissante. En déduire, si $|\,x\,|<1$:
3. $I(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}.sin(x.t).dt=\frac{x}{1+x^2}$; $J(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}.\frac{sin(x.t)}{t}.dt=Arctan(x)$; cas $x=1$?
   $K(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-cos(xt)}{t^2}.e^{-t}dt=x.Arctan(x)-\frac{1}{2}.ln(1+x^2)$ avec $K"(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

45 Compléments sur Espaces vectoriels ; Applications linéaires

45.1 En dimension finie, des projecteurs associés (...)

Si f et g endomorphismes en dimension finie tels que $rg(f)+rg(g)=n$ et $f+g=Id$. Montrer que $E=Im(f)\oplus Im(g)$ et $gof=fog=O$. Et que f et g sont des projecteurs associés.

45.2 Endomorphismes qui commutent et sous e.v. stables

1. Si $gof=fog$, $Ker(f)$ stable par g ou : $g(Ker(f))\subset Ker(f)$ ou : $\overrightarrow{u}\in Ker(f)\Rightarrow g(\overrightarrow{u})\in Ker(f)$.
(En effet : $\overrightarrow{u}\in Ker(f)$ signifie $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$; donc $f[g[\overrightarrow{u}\,)]=fog(\overrightarrow{u})=gof(\overrightarrow{u})=g(\overrightarrow{0}\,)=\overrightarrow{0}$).
2. Et : $Im(f)$ stable par g ou : $g(Im(f))\subset Im(f)$ ou encore : $\overrightarrow{v}\in Im(f)\Rightarrow g(\overrightarrow{v})\in Im(f)$.
(Car : $\overrightarrow{v}\in Im(f)$ signifie $\exists\overrightarrow{u}\in E:\overrightarrow{v}=f(\overrightarrow{u})$. D'où $g(\overrightarrow{v})=g[f(\overrightarrow{u})]=fog(\overrightarrow{u})=f[g(\overrightarrow{u})]$).
3. En particulier : $Ker(P(f))$, $Im(P(f))$ sont stables par f.

45.3 Commutant d'un endomorphisme (cyclique) 48.3, 49.1

1. Soit A, $A^p=O$ en dim. n. Vérifier si $f^{p-1}(\overrightarrow{u})\neq\overrightarrow{0}$ que $(\overrightarrow{u},f(\overrightarrow{u}),...f^{p-1}(\overrightarrow{u})$ libre) donc $p\leqslant n$.
2. Cas d'un endomorphisme nilpotent d'indice n ($f^n=O$, $f^{n-1}\neq O$) et $dim(E)=n$.
   (a) Soit $\overrightarrow{u}$ tel que $f^{n-1}(\overrightarrow{u})\neq\overrightarrow{0}$. Montrer que $(\overrightarrow{u},...,f^{n-1}(\overrightarrow{u}))$ est une base de E. Matrice ? Inversement, vérifier que cette matrice donne un exemple de tel endomorphisme.
   (b) Soit g un endomorphisme ; notons $g(\overrightarrow{u})=\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}a_k.f^k(\overrightarrow{u})$ (sur la base) et $P=\sum_{0ek\leqslant n-1}a_k.X^k$. Si $gof=fog$, montrer que $g=P(f)$. Soit $C(f)=\{g:gof=fog\}$.
   (c) Vérifier que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.
3. Cas d'un endomorphisme avec valeurs propres distinctes. Soit $A=diag(\alpha_1,...,\alpha_n)$ avec valeurs propres distinctes. Montrer que dans ce cas (aussi) : $(I,A,...A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(A)$.

45.4 Endomorphisme nilpotent d'indice n en dim. n ; 45.3

Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice n ($f^n=O$, $f^{n-1}\neq O$) avec $dim(E)=n$.

1. Vérifier que : $F_k=Ker(f^k)=Im(f^{n-k})$, qui est de dimension k, $0\leqslant k\leqslant n$; et F_k stable par f.
(La suite $Ker(f^k)$ est croissante ; possède un plus petit indice pour laquelle elle stationne -à voir, assez facile-, valant n. Et à chaque pas, la dim. doit augmenter que de 1. Idem pour $Im(f^{n-k})$ décroissante et Th. du rang ; enfin $Im(f^{n-k})\subset Ker(f^k)$ et même dimension. $f(F_k)\subset F_k$: aisé)
2. En sens inverse si F est un sous e.v. stable par f, soit p le plus petit entier tel que $F\subset F_p$.
Avec $\overrightarrow{a}\in F$ tel que $f^p(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$, $f^{p-1}(\overrightarrow{a})\neq\overrightarrow{0}$, vérifier que $dim(F)=p$ et enfin que $F=F_p$.
3. Soit l'équation en g : $g^2=f$. Montrer que forcément $g\in C(f)$ puis qu'elle est ici impossible.

45.5 Composition d'Applications Linéaires et étude du rang

1. Avec $f_{/Ker(gof)}$, montrer que : $dim\ Ker(gof)\leqslant dim\ Ker(g)+dim\ Ker(f)$. [Pareil que :]
2. Montrer que : $rg(f)\leqslant rg(gof)+dim\ Ker(g)$ ou : $rg(gof)\geqslant rg(f)+rg(g)-dim(F)$.

45.6 Les idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ sont $\{O\}$ et $\mathcal{L}(E)$, si $dimE$ finie

(Bien que $\mathcal{L}(E)$ non corps. Alors que si vrai pour idéaux à gauche et à droite, c'est un corps).
Si $u\neq O$, D droite et H hyperplan, montrer $\exists\ v,w:Ker(vuw)=H$, $Im(vuw)=D$. Conclure.

46 Exercices sur les Matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

46.1 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A+B=AB \Rightarrow AB=BA$

Vérifier que $(I-A)(I-B)=I$. En déduire que $I-A$ est inversible et que $AB=BA$.

46.2 Inverse de matrices par blocs inversibles !

Soit A_n. On note $B=\begin{pmatrix} A & 2A \\ A & A \end{pmatrix}$. Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est. Et calculer B^{-1} en fonction de A^{-1}.

46.3 Un célèbre Théorème d'Hadamard [corrigé]

1. Introduction : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comment voir si A **est inversible** sans dét(A) ?
   - Voir Im(A) : On sait que les vecteurs colonnes forment une famille **génératrice** de Im(A).
     [Non pas une base ! ex : les vecteurs colonnes de $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ sont évidemment **liés** $\overrightarrow{v}_2=2\overrightarrow{v}_1$].
     Im$(A)=Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix})$: Ici vecteurs **non** colinéaires, Im(A) de dim. 2, dans $\mathbb{R}^2$: Im$(A)=\mathbb{R}^2$.
   - ou voir $Ker(A)=\{\overrightarrow{0}\}$: Résoudre $A.X=O$. Ici comme les 2 vecteurs colonnes de A sont non colinéaires (**libres : la raison est donc la même**) on trouve $X=O$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
     [Ne pas faire les deux par le Théorème du rang : $dim(Im(A))+dim(Ker(A))=2$].
2. Soit $A=(a_{ij})$ une matrice telle que : $\forall i,\ |\ a_{ii}\ | > \sum_{j\neq i,\ j=1}^{n} |\ a_{ij}\ |$. Montrer que A est inversible.
   (a) On dit que A est à diagonale strictement dominante. Pour une matrice 3x3, cela veut dire :
   $|\ a_{11}\ |>|\ a_{12}\ |+|\ a_{13}\ |$ **et** $|\ a_{22}\ |>|\ a_{21}\ |+|\ a_{23}\ |$ **et** $|\ a_{33}\ |>|\ a_{31}\ |+|\ a_{32}\ |$.
   $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ non dans cette hypothèse $1 \not> 2$ mais inversible ! $A_2=\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 1 \\ 2 & 8i & 5 \\ 1 & 2i & 4 \end{pmatrix}$ oui !
   (b) Vrai aussi pour matrices 4x4 ... On le fait sans déterminant ! **Cas des matrices 3x3 :**
   (c) Contraposée. Si A non inversible, $\exists \alpha,\beta,\gamma$ non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{v}_1+\beta\overrightarrow{v}_2+\gamma\overrightarrow{v}_3=\overrightarrow{0}$.
   (Les vecteurs colonnes sont liés). Supposons que $|\ \beta\ |$ est celui de plus grand module :
   $|\ \beta\ |=max(|\ \alpha\ |,|\ \beta\ |,|\ \gamma\ |)>0$. **Alors** on va voir que la contradiction vient de **Ligne 2 :**
   On a ainsi $\alpha a_{21}+\beta a_{22}+\gamma a_{23}=0$ donc $-a_{22}=\frac{\alpha}{\beta}a_{21}+\frac{\gamma}{\beta}a_{23}$. D'où la contradiction :
   $|\ a_{22}\ |=|\ \frac{\alpha}{\beta}a_{21}+\frac{\gamma}{\beta}a_{23}\ |\leqslant|\ \frac{\alpha}{\beta}a_{21}\ |+|\ \frac{\gamma}{\beta}a_{23}\ |\leqslant|\ \frac{\alpha}{\beta}\ |.|\ a_{21}\ |+|\ \frac{\gamma}{\beta}\ |.|\ a_{23}\ |\leqslant|\ a_{21}\ |+|\ a_{23}\ |$.

46.4 (*) Projecteurs f, g non nuls : $fog-gof=\lambda.f+\mu.g$

1. Si $\lambda \neq 1,0$ Avec $fg-gfg=\lambda fg+\mu g$, vérifier que $(1-\lambda)fg(\overrightarrow{x})\in Im(g)$, d'où $fg(\overrightarrow{x})\in Im(g)$; puis $Im(f)\subset Im(g)$ donc $gf=f$. Ainsi $fg=(\lambda+1)f+\mu g$ (1). De plus : $fgf=(\lambda+1)f+\mu gf$ ou $f=f+(\lambda+\mu)f$ donc $\lambda+\mu=0$; et $fg=(\lambda+1)f+\mu fg$ (2) : comme $\mu\neq 0$, $fg=g$; ainsi : Si $\lambda=-1$, rien d'autre : proj. de même image $gf=f, fg=g$. Et si $\lambda\neq -1,0,1$: $f=g$.
2. Si $\lambda=0$ $gfg-gf=\mu g, fg-gfg=\mu g$: $fg-gf=2.\mu.g$ donc $\mu=0$: proj. qui commutent.
3. Si $\lambda=1$ $fg-gfg=fg+\mu g\Rightarrow gfg=-\mu.g$; $gfg-gf=gf+\mu.g$ donne alors $gf=-\mu.g$, d'où $fg=f$. Puis $f=fgf=-\mu.fg=-\mu.f$ donc $\mu=-1$. $fg=f, gf=g$: proj. de même noyau.

47 Déterminants n x n (et Trace)

47.1 Divers déterminants par blocs

1. Calculer : $\begin{pmatrix} I_n & X_{np} \\ O & B \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & Y \\ O_{pn} & I_p \end{pmatrix}$. Que conclure ? (déterminants par blocs).
2. Montrer que $d = det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = det(A+iB).det(A-iB)$ par opérations élémentaires.
   Et en particulier, si A, B réelles : $d \geqslant 0$. Et si A, B commutent : $d = det(A^2+B^2)$.
3. Si D inv., $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}$ et $CD = DC \Rightarrow det(M) = det(AD-BC)$.
   Résultat encore vrai si D non inv. par densité ; faux si $CD \neq DC$. (Contre-ex. avec $B = I_2$...)
4. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ inv., $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$; avec $M.\begin{pmatrix} I_p & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$, vérifier que $det(M).det(D') = det(A)$.
   D'où $M \in \mathbb{O}_n \Rightarrow det(A) = \pm det(D)$. [Si D inv., $M.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E.X = Z - BD^{-1}.T\ ,\ \ D.Y = T - C.X \\ E = A - BD^{-1}C : \text{complement de Schur} \end{pmatrix}$.]

47.2 (*) Autres calculs de déterminants (C :Hurwitz)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & u \\ -y & -t & 0 & v \\ -z & -u & -v & 0 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} c_1 & b & b... & \\ a & c_2 & b... & \\ a & a & c_3 & b... \\ ... & & & \\ a & a... & a & c_n \end{vmatrix},\ a \neq b,\ D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0... & & \\ 2 & 5 & 3 & 0... & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0... \\ ... & & & & \\ 0 & 0... & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix},\ E_n.$$

$A = (vx - uy + tz)^2$; $B = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, [${}^tB.B$!] ; $C : \varphi(x) = det(C_{i,j} + x.E_{i,j}) = \alpha.x + \beta$! $\varphi(-a)$, $\varphi(-b)$ connus : $(a-b).C = a.\Pi(c_k - b) - b.\Pi(c_k - a)$. Rem. Si $\forall k, c_k = c$: v.p. de C alignées ou cocycliques ; avec le polynôme caractéristique : $a(X+b-c)^n = b(X+a-c)^n$ et $\{M : MU/MV = cte\}$: médiatrice de $[U,V]$ ou cercle ... $D_n = 5.D_{n-1} - 6.D_{n-2}...$; $E_n = det(v + x_1e_1, ..., v + x_ne_n)$: $E_n = x_1...x_n + v_1.x_2...x_n + x_1.v_2.x_3... + ...$ (*) : Et voir aussi les dét. "**circulants**" ...

47.3 Trouver les matrices A, 3x3 : $\forall M,\ det(M+A) = det(M)$

(Ind. Avec $M = xI$, A admet 0 comme seule v.p. donc semblable à une matrice triang. sup. stricte ; puis avec des matrices de permutation, ex : $E_{21} + E_{32} + x_1E_{13}$ (...) trouver $A = O$.)

47.4 Comparer les polynômes caractéristiques de AB_n et BA_p (...)

1. Polynôme caractéristique de $A_{n1}B_{1n}$? (Indication : $rg(...) \leqslant 1$ et Trace.)
2. Qu'obtient-on avec les déterminants pour : $\begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -B & I_p \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & \lambda.I_p \end{pmatrix}$ et l'autre produit ? Conclure.
   [Si $n \geqslant p$: $det(\lambda.I_n - AB) = \lambda^{n-p}det(\lambda.I_p - BA)$; voir le cas : $\lambda = 0$, BA_p, AB_n.] **Note**. Si A ou B carrée, est inversible, AB et BA semblables : $AB = A.BA.A^{-1}$; faux si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   D'où $det(I_p + BA) = det(I_n + AB)$. Si $U = (x_i.y_j) = X.{}^tY$: $det(I+U) = 1 + \sum x_i.y_i = 1 + {}^tX.Y$ et si ce déterminant est non nul, $(I_n + X.{}^tY)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + {}^tX.Y}.X.{}^tY$ [obtenue formellement].

47.5 Résultant de deux polynômes P et Q, $p = degr(P)$, $q = degr(Q)$

1. Si les polynômes P et Q ont un facteur commun D, de degré $\geqslant 1$, montrer :
   $\exists A \neq O,\ B \neq 0 :\ AP = BQ,\ degre(A) < degre(Q),\ degre(B) < degre(P)$.
2. En cas contraire, si P et Q sont sans facteur commun ($\text{pgcd}(P,Q) = 1$, avec le Théorème de Gauss pour la divisibilité, montrer que l'égalité précédente est impossible.
3. Déduire : $\text{pgcd}(P,Q) \neq 1 \Leftrightarrow (P, XP, ...X^{q-1}P, Q, XQ, ..., X^{p-1}Q)$ liée, dét. (de Sylvester) nul.
4. CNS pour que $X^3 + pX + q$ ait une racine au moins double ? [Réponse classique connue].

47.6 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si B de rang 1 : $det((A+B)(A-B)) \leqslant det^2(A)$

[Se placer en base judicieuse et calculer : $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n + \vec{v}).det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n - \vec{v})$ ...]

47.7 Déterminant et rang de la comatrice et ${}^t com[{}^t com(A)]$?

1. Soit A carrée inversible. Montrer que le déterminant de la comatrice vaut : $[det(A)]^{n-1}$.
   Montrer, toujours si A inversible, que $c(A)$ inversible et $c[c(A)] = [det(A)]^{n-2}.A$. Puis
2. (a) Si A non inversible, cas : $rg(A) \leqslant n-2$? ($\Rightarrow c(A) = O$).
   (b) Puis voir l'autre cas : $rg(A) = n-1$? ($\Rightarrow rg[c(A)] = 1$).
3. Enfin : Tout vecteur propre de A l'est aussi pour ${}^t com(A)$; et si A diagonalisable, celle-ci aussi.
   Et si $rg(A) = n-1$, $\lambda_1 = 0$, $Tr[{}^t com(A)] = \lambda_2 \times ... \times \lambda_n$. ($\lambda_2$ peut être nul ...)

1. **Corrigé**. La comatrice est la matrice dont le terme général a'_{ij} est le cofacteur Δ_{ij}.
   Rappelons que le Mineur D_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant Ligne i et Colonne j et que $\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}.}$ On a la formule fondamentale $\boxed{A.{}^t com(A) = det(A).I_n}$ et commutativité !
   $A_{n,n}$ inv. $\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow Ker(A) = O \Leftrightarrow det(A) \neq 0$: $det[{}^t com(A)] = det[com(A)] = [det(A)]^{n-1}$.
   Si $det(A) \neq 0$, $c(A).{}^t c[c(A)] = det(A)^{n-1}.I_n$; or $c(A).{}^t A = det({}^t A).I_n$: $c[c(A)] = [det(A)]^{n-2}.A$.
   On va voir que les cas où $det(A) = 0$, les relations soulignées subsistent (en lisant $0^0 = 1$) :
2. (a) Si $rg(A) \leqslant n-2$, $n \geqslant 2$: $n-1$ vecteurs colonnes quelconques extraits sont liés ; en tronquant ces vecteurs d'une ligne, ils restent liés ; donc tout mineur D_{ij} vaut 0. D'où $com(A) = O$.
   La 1ère relation soulignée reste vraie ; la 2è aussi : $A = O$ si $n = 2$, $det(A) = 0$ si $n \geqslant 3$.
   (b) Si $rg(A) = n-1$, $n \geqslant 2$: $dim(Ker(A)) = 1$ et $det(A) = 0$. La 2è formule encadrée donne $Im[{}^t com(A)] \subset Ker(A)$: $rg[{}^t com(A)] = rg[com(A)] \leqslant 1$. En fait, $rg[com(A)] = 1$, car :
   On peut supposer, dans A que les $n-1$ premières colonnes sont libres par exemple. Soit A' cette matrice n lignes, $n-1$ colonnes extraite de A. On a $rg(A') = rg({}^t A')$; donc dans ${}^t A'$ $n-1$ lignes, n colonnes, on peut extraire $n-1$ colonnes libres ; on a donc trouvé un mineur (un déterminant $n-1$ lignes, $n-1$ colonnes) non nul ; d'où $com(A) \neq O$, donc de rang 1.
   Voyons que les relations soulignées sont encore vraies (la 1ère : facile) ; pour la 2è :
   - Cas $n = 2$, en lisant ici $0^0 = 1$! A la main : $com(com(A)) = A$, **si** $n = 2$ **toujours.**
   - Cas $n \geqslant 3$: avec $rg(A) = n-1$, on a vu que $rg[{}^t com(A)] = 1$, donc $rg[{}^t com(A)] \leqslant n-2$, $rg[com(A)] \leqslant n-2$; et avec (a) : $com[com(A)] = O$. Donc 2è relation vraie aussi.
3. Cas A inversible ou $rg(A) \leqslant n-2$, aisé : ${}^t c(A) = cte.A^{-1}$ ou O. Cas $rg(A) = n-1$, $rg[{}^t c(A)] = 1$:
   Si $A.X = \lambda.X \neq 0$, $\lambda.{}^t c(A)X = 0$ (car $det(A) = 0$) $\Rightarrow X \in Ker[{}^t c(A)]$; si $X \neq 0$, $AX = 0$: $A.{}^t c(A).X = 0$ donc ${}^t c(A)X \in Ker(A)$ de dim 1, ${}^t c(A).X = \mu.X$. Et : (sur $\mathbb{C}$) avec $A = P.T.P^{-1}$, T triang. sup. et $\lambda_1 = 0$, posons $A_t = P.T_t.P^{-1}$, $T_t = T + t.I_n$ inv. : $Tr[{}^t c(A_t)] = t.[un\ terme\ borné] + (\lambda_2 + t)...(\lambda_n + t)$; faire alors $t \to 0$ avec la continuité des déterminants et de la Trace.
   Note. On peut approcher une matrice quelconque par des matrices inversibles : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est un e.v. de dim. finie normé avec n'importe quelle norme (elles sont "équivalentes" par Th.) par ex. $\|A - B\| = max(|\ a_{ij} - b_{ij}\ |)$: cela revient à étudier n^2 suites. Dans la suite $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$, il y a au plus n valeurs de p, pour lesquelles ces matrices sont non inversibles ($1/p$ valeur propre). Une fois exclues ces valeurs, reste une suite de matrices convergeant vers A !

47.8 Avec E_{ij} base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une forme linéaire

1. Calculer $E_{ij}.E_{kl}$. (Trouver $\delta_{jk}E_{il}$) [Note : $E_i.{}^t E_j = E_{ij}$, $Tr(A.E_{ij} = Tr(E_{ij}.A) = a_{j,i}$.]
2. Soit ϕ une forme linéaire telle que $\phi(AB) = \phi(BA)$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.
   (Exprimer $\phi(E_{ij}.E_{kl})$. cf. **25.9**.)
3. Variante : Si φ est une forme linéaire : $\varphi(A) = \varphi(B)$, si A semblable à B (noté $A\ s\ B$), idem.
   (Voir que : $E_{ii}\ s\ E_{jj}$, $E_{ij}\ s\ E_{kl}$ pour $i \neq j$, $k \neq l$. Puis $U = (1)\ \ s\ \ n.E_{11}$.)

48 Réduction des endomorphismes

48.1 Des questions sur les matrices diagonalisables (dim. finie)

1. Valeurs propres : racines du polynôme caractéristique. Et : $dim(E_\lambda) \leqslant \omega_\lambda$ (ordre de multiplicité).
2. Racines carrées d'une Matrice diagonalisable A : matrices M telles que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable de suite. [Si matrice triang. les v.p. se lisent sur la diagonale ; (dét. d'une matr. triang.) Et une matrice ayant des vp distinctes est diag. (cond. suffisante).
   (b) Puis que $AM = MA$; puis en base nouvelle, que M' est diagonale ; nombre de solutions ? [4 solutions avec $M' = diag(0, \pm 1, \pm\sqrt{2})$]
3. (a) Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **non** diagonalisable même sur $\mathbb{C}$. [Corrigé. Plusieurs façons :
   . Le SEP(1) est de dimension 1, non 2, sinon on aurait $f(\overrightarrow{\jmath}) = \overrightarrow{\jmath}$! $[f(\overrightarrow{\jmath}) = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}]$
   . Ou sans calcul : Si diagonalisable, $P^{-1}AP = diag(1,1) = I_2$ donnerait $A = I_2$.]
   (b) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix}$ est **non diag. sur** $\mathbb{R}$. [les vp sont : $\pm\, i$!]
4. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ diag. $\Leftrightarrow A$ diag. Ind : $P = \begin{pmatrix} -2I & -I \\ 3I & I \end{pmatrix}$; $C = P^{-1}B.P = \begin{pmatrix} A & O \\ O & 2A \end{pmatrix}$.
5. Soit $B = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A_n & O \end{pmatrix}$; montrer que $det(B - \lambda.I_{2n}) = (-1)^n.det(A - \lambda^2.I_n)$. Si $AV = \lambda.V$, $W = \begin{pmatrix} V \\ \mu.V \end{pmatrix}$ $\mu^2 = \lambda$, vérifier que $BW = \mu.W$. En déduire sur $\mathbb{C}$: (A diag., inversible) $\Rightarrow B$ diagonalisable. Inversement si B diagonalisable, avec $rg(B) = rg(B^2)$, montrer que (A est diag. et aussi inv.) !
6. (*) Sur $\mathbb{C}$, montrer que : A et B ont une v.p. commune $\Leftrightarrow \exists U_{n,n} \neq O : A.U = U.B$.
   [**Corrigé :** $A.X = \lambda.X$; ${}^tB.Y = \lambda.Y \Rightarrow U = (X.{}^tY)_{n,n}$ de rang 1 convient. Inversement : $AU = UB \Rightarrow A^k.U = U.B^k$; d'où $P(A).U = U.P(B)$. Avec le polynôme caractéristique de B factorisé (Cayley-Hamilton), on a : $(A - \lambda_1 I_n)(...)(A - \lambda_n I_n).U = O$; et donc forcément un facteur non inversible ; par suite, une valeur propre (v.p.) de B est aussi v.p. de A.]
7. Soit des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $gof = \alpha.f$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. [Si f n'a que des v.p. nulles, f est nilpotent ; prendre $\overrightarrow{u}$: $f^{p-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$, $f^p = O$.]
8. Soit des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $fog - gof = \alpha.f$, $\alpha \neq 0$. Montrer que f est nilpotent. [$f^k og - gof^k = k\alpha.f^k$ et des sous esp. propres asociés à des v.p. distinctes sont en somme directe.]

48.2 $f : M = (C_1, ..., C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M' = (C'_1, ..., C'_n)$, $C'_i = \sum C_k - C_i$

Calculer $det(M')$. f est-elle diagonalisable ? ($n = 3$ pour commencer).

48.3 Au sujet des endomorphismes cycliques ; les cas diagonalisables

1. Si $dim(E) = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si $\exists \overrightarrow{u} : f^k(\overrightarrow{u})_{k \geqslant 0}$ soit génératrice. Exemples ?
2. Montrer que : $\overrightarrow{u}, ...f^{n-1}(\overrightarrow{u})$ est une base de E ; quelle est dans cette base, la matrice dite "compagnon (du po-ca)" ? vérifier : po-min=poca. Cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?
3. Soit f diagonalisable. En déduire f cyclique $\Leftrightarrow$ les v.p. sont distinctes.

48.4 Endomorphisme nilpotent (d'indice quelconque) en dim. finie (...)

1. Montrer qu'un end. est nilpotent $\Leftrightarrow$ 0 seule valeur propre **dans** $\mathbb{C}$. (po-ca scindé $\Rightarrow$ trigonalisable)
2. Trois $\Leftrightarrow$: f nilpotent $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base, avec matrice triangulaire supérieure stricte (ou po-ca X^n) $\Leftrightarrow$ (*) $Tr(f^p)=0$, $p=1...n$ ($\Leftarrow$ formules de N. **49.2**, $\sum \lambda_k^p = 0...$) $\Leftrightarrow$ (**) $\exists B : A = B.A - A.B$.

   [($\Rightarrow$) On a : $M \in Ker(\gamma_A : M \mapsto AM - MA) \Rightarrow AM$ nilp. $\Rightarrow M \in Ker[t_A : M \mapsto Tr(AM)]$; donc ($Ker\ \gamma_A \subset Ker\ t_A$) $\exists \phi : t_A = \phi o \gamma_A$; or toute f.l. est un p.s. $\exists B : \phi = t_B$; d'où $t_A = t_{BA-AB}$!

   ($\Leftarrow$) On a : $BA^k - A^kB = k.A^k$; mais γ_B n'a pas une inf. de v.p. distintes, c'est que A est nilp. !]

48.5 Dans $E = C^0(\mathbb{R})$, éléments propres de la Transformation de Hardy

Eléments propres de l'end. $f \mapsto Tf(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)dt$, si $x \neq 0$ et $Tf(0) = f(0)$. [Indications : Continuité de Tf en $x=0$: $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$. Avec une primitive F de f C^0 : $\frac{F(x)-F(0)}{x}$ ...
Linéarité : voir si $x=0$. Puis Tf dérivable si $x \neq 0$. $Tf = \lambda.f$: E.D.Lin. Et réciproque ...]

48.6 $P \in E = \mathbb{R}_n[x] \mapsto u(P) = x(1-x)P' + n.x.P$: end. ? Eléments propres ?

1. Corrigé. E e.v. de dim. : $n+1$. Endo : le risque $d^o(u(P)) = n+1$ ne se produit pas (...)
2. Puis : $u(P) = \lambda.P$, $P \neq O$ conduit à une E.D. Linéaire du 1er ordre. [Cas $\lambda = 0$: $Ker(u)$ ...]
   (a) Pour cette E.D.Lin. une fraction rationnelle à décomposer et intégrer ! (3 intervalles ...)
   (b) Trouver $P = \mu.\mid x \mid^{\lambda}.\mid 1-x \mid^{n-\lambda}$. Or au plus $n+1$ valeurs propres ! mais P : polynôme, de degré $\leqslant n$! D'où $\lambda = k \in \{0, ..., n\}$: $n+1$ valeur propres distinctes ; ainsi l'end. est diagonalisable ! (P_k base de vecteurs propres.) D'où $Ker(u)$, ... Rang, etc.

48.7 Polynôme annulateur, par ex. po-ca : Th. de Cayley-Hamilton 48.12

1. Vérifier que : λ v.p. de $f \Rightarrow P(\lambda)$ v.p. de $P(f)$; et $E_\lambda(f) \subset E_{P(\lambda)}(P(f))$. Cas $P(f) = O$?
   Puis que : f diag. $\Leftrightarrow \sum E_\lambda = E \Leftrightarrow$ (en dim finie) $\sum dim(E_\lambda) = dim(E) \Leftrightarrow$ le poca est scindé et $dim(E_\lambda) = \omega_\lambda$ pour chaque v.p. $\Leftrightarrow$ Il existe un polyn. annul. scindé, simple, non nul : Théorème.
   Alors les projecteurs spectraux sont : $p_i = L_i(f)$, L_i polynômes de Lagrange ; $f^j = \sum \lambda_k^j.p_k$.
2. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ diag. $\Leftrightarrow A$ diag. Ind. $P = \begin{pmatrix} -2I & -I \\ 3I & I \end{pmatrix}$; $C = P^{-1}B.P = \begin{pmatrix} A & O \\ O & 2A \end{pmatrix}$.
3. **Utilisations** (a) Si u diagonalisable et E_1 stable par u, alors : $u_{/E_1}$ est diagonalisable.
   (b) Si u est diagonalisable : E_1 est stable par $u \Leftrightarrow$ il est engendré par des Vecteurs propres.
   (c) Soit E un $\mathbb{C}$ e.v. de dim. n. Montrer que : u diag. $\Leftrightarrow [u^2$ diag. et $Ker(u) = Ker(u^2)]$.
4. (a) Exemples : Soit $M = \begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}$ A, B inversibles complexes. Et $N = \begin{pmatrix} C & I_n \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
   . Alors : M diag si et seulement si AB diagonalisable. ($AB = A.BA.A^{-1}$.)
   . Puis : $P(N) = 0 \Leftrightarrow P(C) = P'(C) = 0$. N peut-elle être diagonalisable ?
   (b) (Ex. bizarre). Soit $u,\ v \in \mathcal{L}(E) : f_u(v) = uov$. Alors f_u endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$;
   $Sp(u) = Sp(f_u)$; $SEP(f_u, \lambda) = \{v :\ Im(v) \subset SEP(u, \lambda)\}$; $P(f_u) = f_{P(u)}$.
   Et, en en dimension finie : f_u diagonalisable $\Leftrightarrow u$ diagonalisable.
   [En effet : Voir que $P(f_u)(v) = P(u)ov$. Puis : $\Rightarrow$ Prendre P annulateur de f, $v = Id$.
   $\Leftarrow$ Prendre P annulateur de u (avec le Théorème).]
   (c) Si u diagonalisable : v commute avec $u \Leftrightarrow v$ laisse stable chaque sous espace propre de u.
   (d) Si v commute avec u et ($u,\ v$) diagonalisables, il y a une base commune de Vecteurs propres. Généraliser. (Des endomorphismes diagonalisables qui commutent sont simultanément diag.)
   (e) Si $f \in \mathcal{L}(E)$: $f + a_2f^2 + ... + a_p.f^p = O \Rightarrow E = Ker(f) \oplus Im(f)$. Et $\Leftarrow$ en dim. finie.

48.8 Soit f, g, h tels que : $f^p = \alpha^p.g + \beta^p.h$, $p = 0, 1, 2$; $\alpha \neq \beta$ $(f^0 = Id)$

1. Pour $d^0(P) \leqslant 2$, vérifier que : $P(f) = P(\alpha).g + P(\beta).h$.
2. Avec $\Pi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, montrer que f est diagonalisable de valeurs propres $\in \{\alpha, \beta\}$.
3. Avec $\Pi_1 = x - \alpha$, vérifier que $h = \Pi_1(f)$ / $\Pi_1(\beta)$, g analogue, sont tels que : $hog = goh = O$.
4. Reste de la division euclidienne de Π_1^2 par $\Pi = \Pi_1.\Pi_2$? Déduire que $hoh = h$ et conclure.

48.9 Comment calculer $P(A)$, quand A est une matrice diagonalisable

1. Pour A^n, soit on diagonalise : long car matrice de passage à inverser ...
2. Soit avec un polynôme annulateur : reste de X^n dans la division par $\prod (X - \lambda_i)$
3. Soit : avec les polynômes de Lagrange $L_i(u)$ projecteur d'image E_{λ_i} de noyau $\oplus E_{\lambda_j}$, $j \neq i$.
   $P(u) = \sum P(\lambda_i) L_i(u)$, par exemple $P(u) = u^n$. $(L_i(u)$ base de $\mathbb{K}[u].)$
   Ex. : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $Lim\ A^n$? vp $1, \frac{-1 \pm i}{2}$; $lim\ A^n = L_1(A) = ... \frac{1}{5}(2A^2 + 2A + I)$.

48.10 Si $a \neq b$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^2 - (a+b)f + ab.Id = O$ est diagonalisable

1. Solution. $X^2 - (a+b)X + ab = 0$ a pour racines a et b. Et λ valeur propre $\Rightarrow \lambda = a$ ou b.
2. Et comme $a \neq b$, $Ker(f - aId)$ et $Ker(f - b.Id)$ sont en somme directe ! De plus ici : $f^2 - (a+b)f + ab.Id = O$ ou $(f - aId)o(f - b.Id) = O$ ou bien $E = Ker(f - aId)o(f - b.Id)$, les 2 sous ev précédents sont supplémentaires : (*) Par analyse-synthèse, on voit que forcément $\overrightarrow{u} = \frac{1}{b-a}\,[(f(\overrightarrow{u}) - a\overrightarrow{u}) - (f(\overrightarrow{u}) - b\overrightarrow{u})] = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$. Aisément (alors) : $\overrightarrow{u}_1 \in Ker(f - bId)$ ...

48.11 Sous espaces caractéristiques pour f "singulier" (non injectif)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $dim(E)$ finie. On pose $N = \cup Ker(f^k)$, $I = \cap Im(f^k)$, $k \geqslant 0$. Montrer que :

1. $Ker(f^k)$ est croissante ; puis que si $Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})$ alors elle stationne. Déduire avec p_{min} $\exists p \in \mathbb{N} : N = N_p = Ker(f^p)$, $I = I_p = Im(f^p)$, $p \leqslant dim(E)$ $(n_p = dimN = dim(Ker(f^p)) \geqslant p)$.)
   (Les suites stationnent à partir du même indice par le Théorème du rang ...)
2. N,I stables par f ; $f_{/N}$ nilpotent d'indice p, $f_{/I}$ bijectif ; $E = N \oplus I$ donc $\begin{pmatrix} n_p = ordre\ de\ mult.\ de \\ la\ vp\ 0\ dans\ le\ po.ca \end{pmatrix}$.
3. Il y a un seul couple N, I vérifiant ces 3 propriétés. (Si F, G conviennent : $f^q(F) = \{0\}$, donc $F \subset N$; $f(G) = G$ ($f_{/G}$ bij.) donc $G \subset I$; inclusion stricte impossible sinon $F \oplus G \subsetneq N \oplus I$.)
4. Avec $f_{/I_k}$ déduire que $d_k = rg(f^k) - rg(f^{k+1})$ (*diminution des $rg(f^k)$ = augm. des n_k*) est décroissante.
5. Cas $f^n = O$ $(n_p = n)$. $[k \leqslant p \Rightarrow n_1 + k - 1 \leqslant n_k \leqslant k.n_1]$. $n_1 = 1$ $(n_1 - n_0 = 1) \Rightarrow p = n \Rightarrow n_1 = 1$!

48.12 (*) Quelques résultats divers en compléments (parfois)

1. Montrer que des sous espaces propres sont en somme directe ($\Rightarrow$ vecteurs propres libres) [Cours].
2. Montrer le "Lemme des Noyaux" : P, Q premiers entre eux $\Rightarrow KerPQ(f) = KerP(f) \oplus KerQ(f)$.
   $[PQ(f) = P(f)oQ(f)$ ... Une preuve utilise une "relation de Bezout". (*)]
3. En dim. finie, notion de Polynôme minimal et Thèorème de Cayley-Hamilton ? (*)
   Preuve avec $\overrightarrow{v}, A\overrightarrow{v}, ..., A^{m-1}\overrightarrow{v}$, base de $Vect(A^k\overrightarrow{v})$ de dim. $m \leqslant n$ et "matrice compagnon" ?
   [Note. Bien sûr, les vp. sont racines de tout polynôme annulateur.]
4. Sous e. caractéristiques : $K_i = Ker(f - \lambda_i.I_n)^{m_i}$, m_i ordre de mult. de λ_i dans le polynôme caractéristique P_A. Si P_A scindé, K_i stable par f, $dim(K_i) = m_i$ et $E = \oplus K_i$. D'où : "la décomposition de Dunford" $A = \Delta + N$, $\Delta.N = N.\Delta$, Δ diagonalisable, N nilpotente.

49 Commutant, polyn. caractéristique, systèmes différentiels

49.1 Dimension du commutant $\mathcal{C}(A)$ d'une matrice carrée A

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un anneau contenant $\mathbb{C}[A]$ (polynômes en A).
2. Si A est diagonalisable avec λ_1 de multiplicité ω_1 ; ... λ_k, ω_k montrer que $dim\ \mathcal{C}(A) = \sum \omega_i^2$. $(\geqslant \sum \omega_i = n)$ Tandis que $dim\ \mathbb{K}[A] = k$ avec $(X-\lambda_1)...(X-\lambda_k)$ comme polynôme minimal.
   Et donc : $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A] \Leftrightarrow \forall i,\ \omega_i = 1 \Leftrightarrow Sp(A)$ de cardinal n.
3. On va montrer qu'on a toujours : $dim\ \mathcal{C}(A) \geqslant n$. Soit $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : card(Sp(M)) = n\}$.
   (a) Déjà, montrer que toute $A \in \mathcal{M}_c(\mathbb{C})$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}$.
   (Avec $A = PTP^{-1}$, prendre $T_p = T + diag(1/p, 2/p, ..., n/p)$ car $t_{ii} + i/p = t_{jj} + j/p$ a lieu pour au plus un p ; donc pour p assez grand, $A_p \in \mathcal{D}$ et $A_p \to A$).
   (b) Soit $\varphi_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$ de matrice Φ (de taille $n^2 x n^2$ avec un choix de base). Et $r = rg(\Phi)$, donc un (déterminant) mineur d'ordre r de Φ est non nul ; or c'est un polynôme en les coeff. de A, donc $C^0 : D_{ij}(\Phi_p) \to D_{ij}(\Phi) \neq 0$, d'où pour p assez grand, $rg(\Phi_p) \geqslant r$.
   En déduire que : $n = dim[Ker(\Phi_p)] \leqslant dim[Ker(\Phi)] = dim[\mathcal{C}(A)]$.

49.2 Formules de Newton et application au polyn. caractéristique

1. Avec : $\chi_A(\lambda) = \chi(\lambda) = det(A - \lambda.I_n) = a_0.\lambda^n + ... + a_n = a_0(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n)$, montrer que
   $$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = \frac{1}{\lambda} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{p \geqslant 0} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^p = \frac{1}{\lambda} \sum_{p \geqslant 0} \frac{Tr(A^p)}{\lambda^p} \quad \text{pour} \quad |\ \lambda\ | > max(|\ \lambda_k\ |).$$
   Puis $(x = 1/\lambda)$ que : $n.a_0 + (n-1)a_1.x + ... + 1.a_{n-1}.x^{n-1} = (a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n).\sum_{p \geqslant 0} Tr(A^p).x^p$.
2. En déduire (méthode des Traces) que les coefficients du polyn. caractérisque vérifient :
   $-k.a_k = a_0.Tr(A^k) + a_1.Tr(A^{k-1}) + ... + a_{k-1}.Tr(A) \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$ $\quad [Tr(A^p) = \sum \lambda_k^p.]$
3. Et donc que : $(A$ nilpotente$) \Leftrightarrow (Tr(A^k) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$.

49.3 Résoudre les divers systèmes différentiels suivants (...)

1. Résoudre le système : $X'(t) = A.X(t)$
   (a) Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$. $[A$ semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$ et $X' = U \wedge X$.
   Puis X_1, X_2 solutions $\Rightarrow < X_1, X_2 > = cte$ donc $\|X\| = cte$, si X solution. Puis $< U.X > = cte$; déduire que les trajectoires des solutions non constantes sont des cercles.
   (b) Avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$? Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$? [diagonalisables.]
   (c) – En général, montrer que $det(e^A) = e^{tr(A)}$; donc e^A inversible. (Triang. dans $\mathbb{C}$).
   – Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que $e^A = \begin{pmatrix} cos(a) & -sin(a) \\ sin(a) & cos(a) \end{pmatrix}$ et enfin
   – Que : $X' = AX,\ X(t_0) = X_0$ a pour solution : $X = e^{(t-t_0)A}X_0$.
2. **Simple remarque** sur un système différentiel autonome (NON Lin.). Courbes intégrales de : $x'(t) = x^2 - y^2, y'(t) = 2xy$. [Plusieurs sol. Avec $z(t) = x(t) + i.y(t)$: $z'(t) = z^2(t)$; ou bien $(x^2 - y^2).y'_{/x} = 2xy$ homogène en x, y : $y = u.x$, $x = \frac{k.u}{1+u^2}$. En polaires aussi : $\rho = k.sin(\theta)$.]

50 Dualité -formes linéaires- en dimension finie -en général-

50.1 Espace dual en dim. finie (sans flèche parfois sur les vecteurs)

Soit $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$: c'est un e.v. sur $\mathbb{K}$. Si $\overrightarrow{x} \in E$, $\varphi \in E^*$, on note : $< \varphi, \overrightarrow{x} > = \varphi(\overrightarrow{x})$.

1. Si E de base $(e_1, ...e_n)$, soit e_i^* : $\boxed{e_i^*(e_j) = \delta_{ij}}$ (symbole de Kronecker). Montrer que c'est une base (dite base duale) de E^* et donc $dim(E^*) = dim(E)$. Note : e_i^* dépend de **tous** les e_j ! Puis que : $< \sum \mu_i.e_i^*, \sum \lambda_j.e_j > = \sum \lambda_k.\mu_k$ [crochets de dualité]. Egalement montrer que :
2. E^{**} est naturellement (canoniquement) isomorphe à E, en dim. finie. $[x = \sum e_j^*(x)e_j,\ \varphi = \sum \varphi(e_j)e_j^*]$.

50.2 Avec : $\varphi_1, ...\varphi_p$, $p \leqslant n$ formes linéaires en dimension n

Montrer $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ libres $\Leftrightarrow dim\left(Ker(\varphi_1) \cap ... \cap Ker(\varphi_p)\right) = n - p$. $[(\cap H_i)^\perp = \sum H_i^\perp, \perp_{dualite}$ 51.13$]$.

50.3 Changement de bases dans E^*. Un exemple en dim. 2

Sur $\mathbb{R}^2$, soit 2 bases (e_1, e_2); (u, v) ; de bases duales (e_1^*, e_2^*); (u^*, v^*). Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, vérifier que $e_2 = q.u + s.v$, et : $u^*(e_2) = q$. Déduire que la matrice de changement de bases dans E^*, avec les vecteurs en colonnes vaut $\boxed{{}^tP^{-1}.}$ Exemple. Si $u^*(\overrightarrow{x}) = x - y$, $v^*(\overrightarrow{x}) = x + y$ et si en lignes $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $L.P = I_2$ $\begin{pmatrix} car\ col.\ de \\ P :\ u,\ v \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} Donc\ chang.\ de \\ base\ dans\ E^*, bis \end{pmatrix}$: $\boxed{{}^tL = {}^tP^{-1}.}$ $\begin{pmatrix} Base\ anté-duale : u,\ v \\ Vecteurs\ colonnes\ de\ P \end{pmatrix}$.

50.4 En dim. finies, transposée d'une A.L. et dualité ; rang

1. Transposée d'une matrice. Soit E et F, 2 e.v. de bases $e_1, ...e_p$ et $f_1, ..., f_n$; (e_i^*, f_j^* bases duales). Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice A ; l'appl. linéaire ${}^tf : F^* \to E^*$, $\psi \in F^* \mapsto \psi of = {}^tf(\psi) \in E^*$ vérifie $\forall x \in E$, $\psi \in F^*$ $\boxed{< \psi, f(x) > = <{}^tf(\psi), x >}$ et s'appelle : transposée de f. Montrer que sa matrice en bases duales f_j^*, e_i^*, est : ${}^tA$. [Car $\alpha_{ji} =< f_j^*, f(e_i) >$; $\beta_{ij} =<{}^tf(f_j^*), e_i >$; donc $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$.]
2. Montrer $rg(f) = rg({}^tf)$ [nombre max. de col. ou lignes indép.] ; $Ker({}^tf) = Im(f)^\perp$; $Im({}^tf) = Ker(f)^\perp$.

50.5 Plan vectoriel invariant par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, avec ${}^tf$

Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Et f de matrice $A_{3,3}$. Montrer que :

Le plan vectoriel $\Pi : ax + by + cz = 0$ est invariant par f $\Leftrightarrow$ ${}^t(a, b, c)$ vecteur propre de ${}^tA$.

Solution. Soit $\varphi \neq O$ de matrice $L = (a\ b\ c)$ ou ${}^tL$ en base duale ! On veut : $\varphi(\overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \varphi(f(\overrightarrow{x})) = 0$; or φ base de la droite vect. des formes lin. nulles sur Π, d'où $\exists\ \lambda :\ \varphi of = \lambda.\varphi$ ou ${}^tf[\varphi] = \lambda.\varphi$ par équiv.

50.6 Forme bilinéaire non dégénérée b, en dimensions finies $(E \equiv E^*)$

1. Vérifier que $(X, Y) \in \mathbb{R}^p x \mathbb{R}^n \longmapsto {}^tY.M.X$ [de façon à avoir $M_{n,p}$] est bilinéaire.
2. Soit b bilinéaire sur ExF de matrice M. Vérifier qu'on a 2 applications $u : E \to F^*$ et $v : F \to E^*$: $b(x, y) = <u(x), y>_F = <v(y), x>_E$ de matrices M et ${}^tM$. Et [b non dégénérée $(b(x, y) = 0, \forall y \in F) \Rightarrow x = \overrightarrow{0}_E$, $(b(x, y) = 0\ \forall x \in E) \Rightarrow y = \overrightarrow{0}_F$] $\Leftrightarrow$ u, v injectifs. (Avoir $M.X = O_{n,1} \Rightarrow X = O_{p,1}$...) Donc : $dim(E) = n$ et b non dég. $\Rightarrow dim(F) = n$; u, v isomorph. On identifie F^* à E et E^* à F.
3. Et, si forme bilinéaire canonique sur $E^* x E$, $dim(E)$ finie : $(\varphi, x) \in E^* x E \mapsto <\varphi, x> = \varphi(x)$, alors $u = Id_{E^*}$; $v : E \to E^{**}$ est l'identification naturelle (canonique déjà vue) de E^{**} et E. (Non dég.)
4. Cas $E = F$, b dég. ou non. [b sym.] $\Leftrightarrow b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$ ou M sym. Ici $q(x) = b(x, x)$ f. quadr. : polyn. homogène de degré 2 ($\Rightarrow$ rel. d'Euler) et $b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$. b définit l'orthogonalité ; $E^\perp = Ker(b) = Ker(q)$: $det(M)$ (discriminant) $\neq 0 \Leftrightarrow b$ non dégénérée.

50.7 Formes b. symétriques sur E, $dim(E)$ finie (ex : relativité et 51.13)

1. Pour une f.b.s. on **définit** : x isotrope si $x \perp x$; $E^\perp \subset I(q) = \{x \in E : q(x) = 0\}$ cône isotrope. E_1 isotrope si $E_1 \cap E_1^\perp \neq \{\overrightarrow{0}\}$; et totalement isotrope si $b_{/E_1} = O$ ou $E_1 \subset E_1^\perp$ ou $E_1 \subset I(q)$.
2. **Cas b non dégénérée.** Rappel : $e_1, ...e_n$ base ; $e_1^*, ..., e_n^*$ base duale. Ne pas parler de x^* seul !
   (a) Si $\varphi_x : y \mapsto b(x,y) = <\varphi_x, y>$ $\in E^*$, $x \in E \mapsto \varphi_x \in E^*$ est un isomorphisme $X \mapsto M.X$. **Exercice**. Dans $\mathbb{R}^2$, si $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ et (u,v) autre base de matrice P en base $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}$ et $u^* = \varphi_{a_1}$, trouver a_1. [Col.1 de $M^{-1}.{}^tP^{-1}$ en base $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}$! ici, $M = M^{-1} = diag(1,-1)$.]
   (b) Si E_1 sous e.v. de dim. r, $dim(E_1^\perp) \geqslant n - r$. [$E_1^\perp$ noyau de r formes lin. $b(e_i, .)$ pas forc. ind. ! Mieux $\theta : x \in E_1 \mapsto \varphi_x \in E^*$, $Ker(\theta) = E_1 \cap Ker(q)$, $(Im(\theta))^o = E_1^\perp$, $(Im(\theta))^o$ orthog.$E.E^*$ $\Rightarrow dimE_1 = dim(E_1 \cap Ker(q)) + dimE - dimE_1^\perp$]. $b_{/E_1}$ non dég. $(E_1 \cap E_1^\perp = \{\overrightarrow{0}\}) \Rightarrow E = E_1 \oplus E_1^\perp$. **D'où** si b non dég., $dim(E_1^\perp) = n - dimE_1$ et $E_1^{\perp\perp} = E_1$. **Mais** E_1, $E_1^\perp$ pas forc. suppl. Ex : $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$, $E_1 = \mathbb{R}\binom{1}{1} = E_1^\perp$. [$E = E_1 \oplus E_1^\perp$, $E_1^{\perp\perp} \neq E_1 = \mathbb{R}\overrightarrow{\imath}$ si $b(x,y) = x_1y_1$!]
   (c) F.b.s. $\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{B}$ orthogonale. Si $\exists x \neq \overrightarrow{0}, q(x) \neq 0$: prendre $x^\perp$... Si tout $x \in E$ isotrope : ici $q = O$, $b = O$ ... $\Rightarrow b(x,y) = \sum \alpha_i.\lambda_i.\mu_i$. **Ex**. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décomp. en carrés, méthode de Gauss : $q(x) = \frac{(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2}{2}$; si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ${}^tPMP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et M 'congruentes' 52.3.
   (d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exists \mathcal{B}$ o.n. e_k : une seule f.b.s. non dég. sur $\mathbb{C}^n$. ($\Rightarrow M = {}^tQ.Q$; $e_1 + i.e_2$ isotrope.)
   (e) Cas où : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour une f.b.s. positive (pas forcément définie), on a les inégalités de C-S et de Minkowski. La première entraine que $Ker(b)$ = ensemble des vecteurs isotropes ! Déduire que pour une f.b.s. positive : "définie" $\Leftrightarrow$ non dégénérée (et alors Base o.n.).
   Cas général. $\exists \mathcal{B}_{orthogonale}$: $b(e_1,e_1) = 1 = ... = b(e_r,e_r)$; $b(e_{r+1},e_{r+1}) = ... = b(e_s,e_s) = -1$; $b(e_{s+1},e_{s+1}) = ... = b(e_n,e_n) = 0$. (r,s) indép. de $\mathcal{B}$, "signature de b" : Th. d'inertie de Sylvester.

50.8 Formes b. sym. non dégénérées en dimension finie, $car(\mathbb{K}) \neq 2$: adjoint

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer : $\exists !\ f^* \in \mathcal{L}(E)$ [rien à voir avec base duale ici], $b(f(x),y) = b(x, f^*(y))$ dit "adjoint" de f. Et, si $b(x,y) = {}^tY.M.X = {}^tX.M.Y$; f de matrice A ; $f^* : A'$, alors : $A' = M^{-1}.{}^tA.M$ [ou idem avec la transposée de F^* dans E^* : $\varphi = {}^tA.\psi$ d'où, avec E^* identifié à F, etc : ${}^tM.Y = {}^tA.M.X$ ou $Y = {}^tM^{-1}.{}^tA.M.X$, donc $Y = M^{-1}.{}^tA.M.X$.]
   Ainsi, dans le cas de base orthonormée pour b, la matrice de f^* est donc $A' = {}^tA$. [Mais si on reprend $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $A^* = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$! Cas $q(x) = 2x_1x_2$?]
2. On déduit : $(f+g)^* = ...$, $(\lambda.f)^* = ...$, $(gf)^* = f^*og^*$, $(f^*)^* = f$, et aussi : $det(f^*) = det(f)$, $rg(f^*) = rg(f)$, $Tr(f^*) = Tr(f)$. Et si f inversible, f^* aussi avec : $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
   Enfin, si F est un sous e.v. (ici !) stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.
3. Groupe orthogonal $b(u(x),u(y)) = b(x,y)$ ou $b(u(x),u(x)) = b(x,x)$ ou $f^*f = Id$ ou $f^{-1} = f^*$; alors $det(f) = \pm 1$. (Si une base orthonormée, c'est comme vu avec un produit scalaire.)
4. Application linéaire symétrique relativement à b : $f^* = f$. Cas où $\mathcal{B}$ orthonormée : la matrice est symétrique. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cf. Th. de réduction avec le produit scalaire hermitien ou autrement !

50.9 Réduction d'une 2è f.b.s. b_2 ayant une f.b.s.d.p. b : p.s. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 52.3

1. En base orthonormée $\mathcal{B}$ pour b (il y en a ! Une autre possibilité est le "procédé de Gram-Schmidt") soit A =matrice de q_2 ; $\mathcal{B}'$ une autre base o.n. pour b : $q_2(x) = {}^tXAX = {}^tX'.{}^tPAP.X'$ donc $A' = {}^tPAP = P^{-1}AP$: ainsi A et A' sont semblables ; même "poca" de racines forcément réelles β_k ; appelées suite des invariants de q_2 relativement à b. [**50.7.**(c) : $1, -1$, avec autre matrice $P \in \mathbb{O}$.]
2. Il existe aussi une A.L. $f : E \to E$ telle que dans $\mathcal{B}$, $b_2(x,y) = b(x, f(y)) = b(f(x), y)$ (de matrice sym. réelle A) qui est par Théorème fondamental diagonalisable en base $\mathcal{B}'$ o. n. pour la forme bilinéaire b : $\mathcal{B}'$ est donc aussi orthogonale pour b_2 ; ici : $b_2(x,y) = \sum \beta_i.\lambda_i'.\mu_i'$. **Ex.** : coniques.

51 E.v. préhilbertien réel (f.b.s.d.p.) E.v. euclidien (dim. finie)

51.1 (*) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ e.v.e. orienté

$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. (Ind. un syst. lin. $A.X = B$ dépend du fait A inversible ou non ; sol :)

– Si on fait des calculs, on prend une base o.n.d. judicieuse telle que : $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{\imath} + b_2\overrightarrow{\jmath}$.
Alors $\begin{cases} x = b_1 \\ y - az = b_2 \\ ay + z = 0 \end{cases}$ est de déterminant principal $1 + a^2 = 1 + \|\overrightarrow{a}\|^2 \neq 0$. Solution unique.
Mieux : $Ker(\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}) = \{\overrightarrow{0}\}$: end. inj. donc bij. en dim. finie : solution unique, bis.

– Essayons une solution géométrique avec : $\overrightarrow{x} = \alpha.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y}$: dans $\overrightarrow{a}^\perp$! idem $\overrightarrow{b} = \beta.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$.
Alors : $\alpha = \beta$ (Même composante sur $\overrightarrow{a}$) (1) et $\overrightarrow{y} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{y} = \overrightarrow{c}$ (dans $\overrightarrow{a}^\perp$) (2).
On sait qu'il y a une et une seule solution ! Faire $\overrightarrow{a} \wedge ... = \overrightarrow{a} \wedge ...$ dans la dernière : (3) ...
et avec (2) (3) : $[1 + \|\overrightarrow{a}\|^2]\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{b}).\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$.

– Cas $\|\overrightarrow{a}\| = 1$. Si $f_t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + t.\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}$, vérifier que $f_t^{-1} = \frac{1}{1+t^2}(f_{-t} + t^2.p_{\overrightarrow{a}})$ et que $f_t o (f_{-t})^{-1}$ est un paramétrage des rotations d'axe $Vect(\overrightarrow{a})$ sauf des 1/2 tours (où il faudrait $t = \infty = tan\frac{\theta}{2}$.)
[Et $\varphi : \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ vérifie $\varphi^3 = -\varphi$. En déduire un polynôme annulateur de f_t de degré 3 et f_t^{-1}.]

51.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.euclidien (orienté)

1. Montrer que les réflexions engendrent $\mathbb{O}_3(\mathbb{R})$. Et que les demi-tours engendrent $\mathbb{O}_3^+(\mathbb{R})$.
2. Identité de Jacobi : Vérifier que $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$.

51.3 Au sujet des similitudes vectorielles (...)

1. Montrer que, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ unitaires : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.
2. Soit f un endomorphisme en e.v. préhilbertien tel que : $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) \perp f(\overrightarrow{y})$.
   (a) Montrer que, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ unitaires : $\|f(\overrightarrow{u})\| = \|f(\overrightarrow{v})\|$.
   (b) En déduire $\exists k \in \mathbb{R}^+$ avec $\|f(\overrightarrow{x})\| = k.\|\overrightarrow{x}\|$. (Cas $k \neq 0$? cas $k = 0$?)

51.4 Proj. orthogonal en dim. finie, norme de Frobénius 55.7

Soit E euclidien de base o.n. $\mathcal{B}$; p un projecteur ($pop = p$) de rang r. (p proj$_\perp \Leftrightarrow p^* = p$ cf. 50.8)

1. (a) Montrer que : p est orthogonal $\Rightarrow \sum\|p(e_k)\|^2 = \sum(e_k \,.\, p(e_k)) = Tr(p) = r$. $(1 \leqslant k \leqslant n.)$
   (b) Inversement si $\sum\|p(e_k)\|^2 = r$, $M = Matr(p, \mathcal{B})$, voir que $\|{}^tM\|_F^2 = \|M\|^2 = \sum\|p(e_j)\|^2 = r$
   puis : $<{}^tM, M> = Tr(M^2) = Tr(M) = r$ et enfin que : $\|{}^tM - M\|^2 = 0$. Conclure.
2. Inégalités avec une matrice de projecteur orthogonal en base on.
   Soit $A : A^2 = A$, ${}^tA = A$. Montrer que $0 \leqslant \sum a_{ij} \leqslant n$ et $\sum \mid a_{ij} \mid \leqslant n.\sqrt{rg(A)}$.
   – Corrigé. Si ${}^tV = (1, ...1)$, ${}^tVAV = \|AV\|^2$ et vaut aussi $\sum a_{ij} \geqslant 0$; puis $B = I - A$.
   – Et : Si $A' = (\mid a_{ij} \mid)$, $U = (1)_{n^2}$, ! dans $\mathbb{R}^{n^2}$: $(A' \,.\, U)^2 \leqslant \|A'\|^2.\|U\|^2 = n^2.\sum a_{ij}^2$.
   On conclut avec : $\sum a_{ij}^2 = tr({}^tA.A) = tr(A) = rg(A)$.
   – Remarques. . Pour $p_\perp$ sur V de base o.n. $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_r$, sa matrice vaut : $\sum U_i.{}^tU_i$, $i \leqslant r$.
   . Pour un automorphisme orthogonal, arriver de même à $n = \sum a_{ij}^2 \leqslant \sum \mid a_{ij} \mid \leqslant n.\sqrt{n}$.
3. Matrice de la symétrie orthogonale / $H : x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Et base orthonormée de H ?

51.5 Droite des moindres carrés, minimiser $\sum(y_i - a.x_i - b)^2$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$: Montrer que le minimum existe et vaut : $dist^2(Y,\ Vect(X,V))$ obtenu pour un seul couple. Si $U = aX+bV$, $Y-U \perp X, V$ équivaut à : $< aX+bV, X > = < Y, X >$, ... $a. < X, V > +b.\|V\|^2 = < Y, V >$, $a.\|X\|^2 + b < V, X > = < Y, X >$: $\boxed{\begin{pmatrix} \|X\|^2 & < V, X > \\ < V, X > & \|V\|^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y, X > \\ < Y, V > \end{pmatrix}.}$

Puis que : $a.\overline{X} + b = \overline{Y}$ (la droite passe par G) et $a = \sigma_{XY} \ / \ \sigma_{X^2}$ (avec la covariance).

51.6 (**) Orthogonalité de polynômes et racines réelles (...)

1. $t \mapsto \omega(t), C^0([a,b], \mathbb{R}^{*+})$ donnant le p.s. $<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ sur $\mathbb{R}[x]$, soit P_n o.n. : $d^0 P_k = k$, coeff. dom. $a_k > 0$. Si $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $P_{n+1} = \alpha_n.x.P_n + \beta_n.P_n - \gamma_n.P_{n-1}$, $\gamma_n > 0$. $[x.P_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}.P_n + \sum \mu_k.P_k.]$
2. Soit $x_1 < ... < x_p$ les racines sur $]a,b[$ où P_n change de signe. Avec $P_n \perp Q(x) = (x-x_1)...(x-x_p)$ si $p < n$, montrer que $p = n$; et par récurrence avec q.1) que les racines de P_{n-1} séparent celles de P_n.
3. Et $\exists!\ \lambda_k : \int_a^b Q(t)\omega(t)dt = \sum \lambda_k.Q(x_k)$, $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$; puis par div. par P_n, $\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$! intégration de Gauss, $\lambda_k = \|L_k\|^2 > 0$, L_k polyn. de Lagrange, degré $n-1$. $[i \neq j : < L_i, L_j > = < P_n, Q > = 0$ car $deg(Q) = n-2 \geqslant 0$; $\|L_k\|^2 = < L_k, \sum L_k > = < L_k, 1 >$; (vrai si $n = 1$)] Si f C^{2n}, $\exists! H \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$: $H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i)$. $f(x) = H(x) + \frac{P_n^2(x).f^{(2n)}(c)}{a_n^2.(2n)!}$, $\left| \int_a^b f(x).\omega(x)dx - \sum \lambda_k.f(x_k) \right| \leqslant \frac{\|P_n\|^2.M_{2n}}{a_n^2.(2n)!}$.

51.7 Cardinal d'une famille obtusangle, en dimension n (...)

C'est une famille de vecteurs : $\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j < 0$ si $i \neq j$, avec $dim(E) = n$. Montrer que :

1. Une famille obtusangle de cardinal p est telle que $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_{p-1}$ est libre. Et donc : $p \leqslant n+1$.
   (Par récurrence sur $n \geqslant 1$: Si on a $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_{p+1}$ obtusangle en e.v.e. de dimension $n+1$, on prend $\overrightarrow{u}_{p+1}$ et $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{u}_1 - \alpha_1.\overrightarrow{u}_{p+1}$, ... $\overrightarrow{u}_p - \alpha_p.\overrightarrow{u}_{p+1}$ de façon à être dans $\overrightarrow{u}_{p+1}^{\perp}$; alors observer que $\overrightarrow{v}_1, ... \overrightarrow{v}_p$ est obtusangle en dim. n ; puis $\overrightarrow{v}_1, ... \overrightarrow{v}_{p-1}$, $\overrightarrow{u}_{p+1}$ libre et aussi $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_{p-1}$, $\overrightarrow{u}_{p+1}$.)
2. Montrer l'existence d'une famille obtusangle de cardinal $n+1$ en dimension n. (Récurrence)
3. Si les angles sont égaux pour une telle famille, quelle est sa valeur ? (Prendre les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j = cos(\theta)$, $\overrightarrow{u}_1 + ... + \overrightarrow{u}_{n+1} = \overrightarrow{0}$; alors $cos(\theta) = \frac{-1}{n}$.)
   (Note. Avec $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} a_i \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0}$, certains introduisent l'astucieux $\overrightarrow{v} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} |\ a_i\ | \ \overrightarrow{u}_i$: $\|\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant 0$!)

51.8 Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})_{n \geqslant 3}$ contient N nilpotente, M inv.

Ind. $\exists A : M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow Tr(A.M) = 0$, toute forme lin. étant un p.s. ; puis $A = PBP^{-1}$ avec $b_{i,1} = 0, i \geqslant 3$. Si $N = E_{1,n} : N \neq O$, $N^2 = O$, $Tr(BN) = 0$; $M = P.N.P^{-1}$ convient. $\begin{pmatrix} Si\ n = 2,\ \mathcal{S}_2\ de\ dim\ 3\ ne\ contient \\ aucune\ matr.\ nilpotente\ non\ nulle \end{pmatrix}$.
M inversible : $A = QJ_rP^{-1}, M = PNQ^{-1}$, $Tr(AM) = Tr(JN)$, $N = E_{21} + E_{32} + ... + E_{n1}$ convient.

51.9 En utilisant f^* en question 1, et f^*of en question 2 (...)

1. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (e.v.e.) laisse un plan P stable, montrer que $P^{\perp}$ est stable par f^*. cf. 50.5, 50.8
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (e.v.e.), montrer $\exists\ (\overrightarrow{u}_k)$ b.o.n. : $(f(\overrightarrow{u}_k))$ orthogonale $[\overrightarrow{u}_k$ o.n. diagonalisant $f^*f.]$

51.10 Calcul d'adjointe (existence non assurée en dim. infinie)

1. Dans l'e.v. euclidien E, montrer que $f(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b}$ a pour adjoint $f^*(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{a}$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. orienté, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u}$ a pour adjoint $f^*(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u}$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. orienté, $f(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{b}$ a pour adjoint $f^*(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{a}$.
4. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec p.s. usuel, montrer que $M \mapsto A.M - M.A$ a pour adjoint $N \mapsto {}^tAN - N{}^tA$.

51.11 Liens entre f et f^* dans E, e.v.euclidien (ou e.v.h. ...)

1. Vérifier : $Ker(f^*) = Im(f)^\perp$, $Im(f^*) = Ker(f)^\perp$, $dim\ Ker(f-\lambda.Id) = dim\ Ker(f^*-\overline{\lambda}.Id)$.
2. Montrer : $Ker(f^*of) = Ker(f)$, $rg(f^*of) = rg(f)$. [Dessus les *dim* ; cas $\lambda = 0$ puis $(f-\lambda.Id)^*$]
3. Déduire que : $Im(f^*of) = Ker(f^*of)^\perp = Ker(f)^\perp = Im(f^*)$. Et donc que :
4. $Ker(fof^*) = Im(f)^\perp$; $Im(fof^*) = Im(f)$. [**Note**. Ligne 1 vraie pour une f.b.s. non dég.]
5. Vérifier que $fof^* = f^*of \Leftrightarrow f(x)/f(y) = f^*(x)/f^*(y) \Leftrightarrow \|f(x)\| = \|f^*(x)\|, \forall x,y \in E$. $\left(\begin{smallmatrix} ici\ meme \\ noyau\ ! \end{smallmatrix}\right)$
6. Autre exercice (*) Montrer que $fof^*of = f \Longleftrightarrow fof^*$ proj. orthogonal.
   Corrigé. $\Leftarrow$: fof^*of et f égaux sur $Ker(f)$ et sur $Ker(f)^\perp = Im(f^*)$ car fof^* proj.
   $\Rightarrow$: proj. facile, orthogonal car fof^* de plus sym. ; et si on veut sur $Im(fof^*) = Im(f)$// $Im(f)^\perp$.

51.12 Inégalité d'Hadamard et conséquences (cf. 52.2 pour fin)

1. Soit E un e.v. euclidien. [...] le produit mixte (déterminant en base o.n. directe quelconque).
   Montrer que : $|\,[u_1,...,u_n]\,| \leqslant \|u_1\|.....\|u_n\|$. ($u_j$ supposés libres ! Avec le procédé de Schmidt.)

   - Sol. Si matr. de chang. de bases $P_{e_j\to u_j} = P_{e_j\to a_j}.P_{a_j\to u_j}$; $a_1 = u_1$, $a_2 = u_2 + \alpha_{21}a_1$ ... avec (a_j) orthogonale, $det(P_{a_j\to u_j}) = 1 \Rightarrow det(u_1,u_2,...) = det(a_j) = \pm\prod\|a_k\|$ et $\prod\|a_k\| \leqslant \prod\|u_k\|$.
   - 2ème point de vue, simple changement de présentation : $M = O.T_s$ (on a pris une base o.n. cette fois, $\epsilon_i = a_i/\|a_i\|$, $t_{ii} > 0$). $|\,det(M)\,| = det(T) = \prod t_{ii}$ enfin $0 \leqslant t_{ii} = < u_i.\epsilon_i > \leqslant \|u_i\|$.
2. Soit A symétrique et positive. Montrer que : $a_{ii} \geqslant 0$ et que $0 \leqslant det(A) \leqslant \prod\ a_{ii}$.

   - $a_{ii} = (e_i, Ae_i) \geqslant 0$. Puis : $A = {}^tM.M$ (connu **52**.2) $det(A) = det(M)^2 \leqslant \|m_1\|^2....\|m_n\|^2 = \prod a_{ii}$.
   - Ou si $A > O$! Multipliant Ligne i et Colonne j de A par γ_i, γ_j on a encore une matrice symétrique positive ; on choisit $\gamma_1^2.a_{11} = \gamma_2^2.a_{22} = ... = 1$; $[det(A')]^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}.Tr(A')$ (cf. **52.1**) termine ...
   - Ou toujours si $A > O$ ou $det(A) > 0$, avec $D = diag(1/\sqrt{a_{kk}})$, $det(DAD), Tr(DAD) = n$, conclure.

   Remarque $A = {}^tM.M > 0 \Rightarrow A = {}^tT.T$ dite décomposition de **Cholesky** $t_{ii}^2 \leqslant a_{ii}$ $\left(\begin{smallmatrix} \text{et : } A = {}^tT\Delta T, \\ \text{"1" sur diag de } T \end{smallmatrix}\right)$.
3. $\Rightarrow$ Si $A_{n,n}$ réelle, avec ${}^tA.A$, montrer : $det(A)^2 \leqslant \prod_i (\sum_k a_{ki}^2)$. Décomposition **"Q.R" ou d'Iwasawa ?** :
4. Si $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$: $A = O.T$ de façon unique, $O \in \mathbb{O}$, $T_{triang.sup, coeff.>0}$. [${}^tAA = {}^tTT$; $O = A.T^{-1}$...]

51.13 (*) Propriétés de l'orthogonal. Quelques contre-exemples

1. Montrer que (dim. quelc., f.b.s. dég. ou non) : $F \subset F^{\perp\perp}$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$; ici F, G sous e.v.
2. Et en dim. finie, si b **non dég.** : montrer, avec le résultat précédent, que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
   [Solution : $(F\cap G)^\perp = (F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp})^\perp = (F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp} = F^\perp + G^\perp$.] **Mais attention :**
   Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(Vect(\overrightarrow{\imath}) \cap Vect(\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}))^\perp = \mathbb{R}^2$; $Vect(\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath})^\perp = Vect(\overrightarrow{\imath})^\perp = \mathbb{R}.\overrightarrow{\jmath}$: $\supset$ stricte.
3. Même avec un produit scalaire, un cas où $E \neq F \oplus F^\perp$ et $F \neq F^{\perp\perp}$: (en dim. infinie !)
   (a) Si $E = \mathbb{R}[X]$, $F = X.\mathbb{R}[X]$, $< P,Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, montrer que $F^\perp = \{O\}$. Donc : $F \neq F^{\perp\perp}$.
   (b) Montrer que $E = \{$suites réelles, $\sum u_n^2$ converge$\}$ est un e.v. ($2\,|\,u_k.v_k\,| \leqslant u_k^2 + v_k^2$) avec $\sum u_k.v_k$ p.s. ; si F sous. e.v. des suites nulles à partir d'un certain rang, vérifier que $F^\perp = \{O\}$.
4. Un cas où $E \neq F \oplus F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$: Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, F=l'e.v. des f. dont la restriction à $[0,1]$ est nulle, G celles dont la restriction à $[-1,0]$ est nulle. Même p.s. Montrer $F^\perp = G$, $G^\perp = F$, et $E \neq F \oplus F^\perp$. (Exemple de 2 sous e.v. fermés de somme non fermée : son adhérence vaut E).
5. Si $(f/g) = f(0).g(0) + \int_{-1}^{1} f(t).g(t)dt$ F, G idem, montrer ici que $F \oplus F^\perp$ est fermé ; donc non dense.

52 Endomorphismes symétriques. Formes quadratiques.

52.1 Si A symétrique, positive, montrer : $det(A)^{1/n} \leqslant 1/n.Tr(A)$

Pour f endomorphisme symétrique, f est positif (défini positif) si $(f(\vec{u})\,.\,\vec{u}) \geqslant 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$ (ou $>$).
Ceci équivaut à valeurs propres $\geqslant 0$ ou strictement > 0. Pour A en b.o.n., $a_{k,k} = f(\vec{e_k})\,.\,\vec{e_k}$.

1. Ci-dessus : Comparaison moyenne arithmétique-moyenne géométrique des valeurs propres ($\geqslant 0$ ici).
2. Si A sym. réelle, montrer : $inf\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = inf(\lambda_k) \leqslant a_{k,k} \leqslant sup\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = sup\ \frac{f(x)\,.\,x}{x\,.\,x} = sup(\lambda_k)$.
3. (*) Soit A symétrique réelle avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$. Montrer $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$ que $\sum_{i\leqslant k} a_{ii} \leqslant \sum_{i\leqslant k}\lambda_i$.
   [$\mathcal{B}$ o.n., $\mathcal{B}'$ o.n. diag. A. $e_j = \sum_i (e_j.e'_i).e'_i \Rightarrow a_{jj} = u(e_j).e_j = \sum_i \lambda_i (e_j.e'_i)^2 \leqslant \sum_{i\leqslant k} ... + \lambda_k(1 - \sum_{i\leqslant k} ...)$.
   D'où $a_{jj} \leqslant \lambda_k + \sum_{i\leqslant k}(\lambda_i - \lambda_k)(e'_i.e_j)^2$; avec $\sum_{j\leqslant k}(e'_j.e_i)^2 \leqslant 1$, conclure.]
4. Soit A, B symétriques, $C = AB + BA$ (symétrique) et A définie positive.
   Si $A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sont positives, vérifier que C n'est pas forcément positive !
   Si C est définie positive, avec ${}^tXCX = 2.{}^tXABX$, X vect. propre de B, vérifier que B aussi.
5. A sym. réelle, $\lambda_k > 0 \Leftrightarrow det(A_k) > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$ (**critère de Sylvester**). [$\Leftarrow$ ($\mathbf{51.12}$: $\exists$T triang. sup. inv. et réc. sur n. $A = {}^tTT$;)]

52.2 (*) Diverses inégalités avec les matrices symétriques réelles

1. Si A, B sym. réelles, montrer que : 2. $|\,Tr(AB)\,| \leqslant Tr(A^2) + Tr(B^2)$. [ind. : $\|A - B\|^2 \geqslant 0$.]
2. A, B sym. positives : $0 \leqslant Tr(AB) \leqslant Tr(A).Tr(B)$. [$B = D \Rightarrow Tr(AB) = Tr(\sqrt{D}A\sqrt{D}) \geqslant 0$ avec ${}^tX.MX$, etc. Et $Tr(AB) = Tr({}^tAB) \leqslant \|A\|.\|B\|$; $\|A\|^2 = Tr({}^tA.A) = Tr(A^2) = \sum\lambda_i^2 \leqslant (\sum\lambda_i)^2$.]
3. Si A symétrique réelle, $\lambda_k \geqslant 0$: $\exists$! matrice C symétrique réelle, $A = C^2$, $\mu_k \geqslant 0$. $A = {}^tC.C$!
   [Unicité (*) : Si $A = C_1^2$: C_1 commute avec A donc sous e.p. de A stables par C_1 ($P^{-1} = {}^tP$)
   $A = P.\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 & ...\\ ... & & \\ ... & ... & \lambda_q I_{n_q}\end{pmatrix}.P^{-1}$, $C_1 = P.\begin{pmatrix}M_1 & 0 & ...\\ ... & & \\ ... & ... & M_q\end{pmatrix}.P^{-1}$. Puis $M_i^2 = \lambda_i.I_{n_i}$ donc vp de M_i : $+\sqrt{\lambda_i}$ seulement. Enfin ${}^tC_1 = C_1 \Rightarrow M_i$ diagonalisable. Donc $M_i = +\sqrt{\lambda_i}.I_{n_i}$ obligé.] D'où la
   Décomposition polaire de Cartan : Si f automorphisme, avec $g = f^*of$ sym., défini, positif et h l'unique racine symétrique définie positive de g : $f = roh$ [$r = foh^{-1}$] où r orthogonal, uniques.
   Rem. Idem $f = h'r'$, $h'^2 = ff^*$; $r = r' \Leftrightarrow f^{-1}h'f = h$; or vrai : carrées égaux et h, h' positifs !
4. (*) $A_n = A, B$ sym. positives : $det(A+B) \geqslant det(A) + det(B)$, $det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqslant det(A)^{\frac{1}{n}} + det(B)^{\frac{1}{n}}$.
   (a) Si vp. strictement positives pour A, soit $A = C^2$, C sym. réelle, à vp. strict. positives. Alors $M = C^{-1}BC^{-1}$ est sym., positive. $A+B = C(I+C^{-1}BC^{-1})C \Rightarrow det(A+B) = det(A).P(-1)$, $P(\lambda)$ polynôme caractéristique de M, de vp $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$. Voir que $\prod(1+\gamma_i) \geqslant 1 + \prod\gamma_i$ termine.
   Et si $det(A) = det(B) = 0$ avec ${}^tX(A+B)X \geqslant 0$, vérifier que le résultat subsiste.
   (b) Montrer : $\prod(1+\gamma_i)^{1/n} \geqslant 1 + \prod\gamma_i^{1/n}$ [$ln(1+e^x)$ convexe] et la 2è inégalité.
5. (*) A_n, B_n symétriques, positives. $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$: $(det(A))^\alpha.(det(B))^\beta \leqslant det(\alpha A + \beta B)$.
   Si $n = 1$, inégalité de convexité. Pour $n \geqslant 1$: si $A = a.I$, $a \geqslant 0$, diagonaliser B et cas $n = 1$.
   cas A inversible : $A = H^2$, H symétrique ; $\alpha.A + \beta.B = H(\alpha I + \beta H^{-1}BH^{-1})H$ et $< X, B'X > = {}^tYBY \geqslant 0$, $Y = H^{-1}X$ ... cas A non inversible : $\alpha.A + \beta.B$ positive !
   Autre solution. Si e_k base o.n. diagonalisant $\alpha.A + \beta.B$ de v.p. $\mu_k = \alpha.a(e_k)\,.\,e_k + \beta.b(e_k)\,.\,e_k$, alors $\mu_k \geqslant (a(e_k)\,.\,e_k)^\alpha.(b(e_k)\,.\,e_k)^\beta$; l'inégalité d'Hadamard $\prod a'_{ii} \geqslant det(A)$ termine (51.12).

52.3 Réduction, en simultané, d'une f.b.s.d.p. b et d'une f.b.s. b_2

Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Montrer $\exists\ P : {}^tP.A.P = I_n$. [$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, décomp. de Gauss de ${}^tXAX$. Attention : **non** semblables mais **"congruentes"**]. Et en b.o.n. pour b, **réduire** b_2 de matrice $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$. [$M=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}={}^tPBP$ [$= P^{-1}(A^{-1}B).P$!] $s.$ $diag(2,-2)$, $\Pi^{-1}={}^t\Pi$: $\exists Q\ {}^tQAQ=I_n$, ${}^tQBQ=D$.]

52.4 (*) A, B sym., cas AB diag. sur $\mathbb{R}$ (en plus de $AB=BA \Leftrightarrow AB$ sym)

1. A est à vp.>0 : Ex.**52.3** avec A^{-1}, ${}^tQA^{-1}Q=I_n$, ${}^tQBQ=D$ ... [$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ non diag. !] ou : AB autoadjoint pour le p.s. ${}^tX.A^{-1}Y$! ou encore : $AB=\sqrt{A}.[\sqrt{A}.B\sqrt{A}].(\sqrt{A})^{-1}$, [...] sym.
2. A, B sym. positives : si $\lambda\neq 0$ de $C=\sqrt{A}B\sqrt{A}$, vérifier : $X\in E_\lambda(C)\mapsto \sqrt{A}X\in E_\lambda(AB)$ inj. si $\lambda=0$, vérifier : ${}^tYBY=0\Rightarrow BY=0$ et avec $X\in Ker(C), Y=\sqrt{A}X$, $Ker(C)=Ker(B\sqrt{A})$; puis $Im(BA)\subset Im(B\sqrt{A}), rg(AB)=rg^t(AB)\leqslant rg(B\sqrt{A})$, $dimKer(AB)\geqslant dimKer(C)$ et finir.

52.5 Valeurs propres et vecteurs propres de $X{}^tX$ (sym., sous e.p.$\perp$)

1. Soit $X\neq O$; observer que $rg(X.{}^tX)_{n,n}=1$, $tr(X.{}^tX)={}^tX.X=x^2$ et $Im(X.{}^tX)=Vect(X)$.
2. Si $A\in\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$: $det(A+X.{}^tX)=det(A).(1+{}^tX.A^{-1}X)$. [Si $P\in\mathbb{O}: C_1=\frac{X}{x}=P.U$, ${}^tU=(1,0,...0)$ $A=PBP^{-1}$: $det(A+X.{}^tX)=det(B+x^2U.{}^tU)=det(A).det(I+x^2.B^{-1}U.{}^tU)$; ce dernier dét. valant aussi $\Delta=1+k.x^2=1+x^2.{}^tU.B^{-1}U$, ($k$: 1er terme de B^{-1}). Enfin $\Delta=1+{}^tX.A^{-1}X$.]

52.6 Quand a-t-on deux projecteurs orthogonaux qui commutent ?

1. Si $f=p_Gop_F=p_Fop_G$, montrer que f est un projecteur, puis autoadjoint : $f=p_H$.
   En utilisant que $F=\{\vec{u}:\ \|p_F(\vec{u})\|=\|\vec{u}\|\}$, montrer que $H=F\cap G$.
2. En considérant $F=(F\cap G)\oplus_\perp F_1$, $G=(F\cap G)\oplus_\perp G_1$, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (C.N.S.) est : $F=(F\cap G)\oplus(F\cap G^\perp)$ (et par symétrie $G=(G\cap F)\oplus(G\cap F^\perp)$).
   [Cond. Suffisante. Nécessaire aussi. $\vec{u}\in F$, $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\in F\cap G\oplus_\perp G_1\oplus_\perp G^\perp$, donne $\vec{a}+\vec{b}=p_G(\vec{u})=p_Gop_F(\vec{u})\in F\cap G\ \Rightarrow\ \vec{b}\in F\cap G$ (par diff.), $\vec{b}=\vec{0}$ et $\vec{c}\in F\cap G^\perp$. Fini.]

52.7 (*) Question intéressante partant d'une base quelconque (...)

Soit $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ une base quelconque et $f(\vec{u})=(\vec{e}_1\,.\,\vec{u})\vec{e}_1+(\vec{e}_2\,.\,\vec{u})\vec{e}_2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme, symétrique, défini, positif. Matrice A ?
2. Par diagonalisation en base o.n. de f, montrer que : $\exists\ g\in\mathcal{S}^+$: $g^2=f^{-1}$.
3. Montrer que $g(\vec{e}_1)$, $g(\vec{e}_2)$ est orthonormée [mais $\neq\vec{\imath},\vec{\jmath}$ ou $\vec{I},\vec{J}$].

   [Corrigé. Soit une base initiale $\mathcal{B}_0$: $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ o.n. Si P est la matrice de changement de bases : $A={}^tP.P$ (matr. de Gramm), $A_0=P.A.P^{-1}=P.{}^tP$ en base o.n. : d'où end. sym. positif défini. En diagonalisant f en base o.n. $\vec{I},\vec{J}$: g existe, est unique, de matrice B_0 en base $\vec{\imath},\vec{\jmath}$: $B_0^2=A_0^{-1}$ et ${}^tB_0=B_0$. $g(\vec{e}_1)$, $g(\vec{e}_2)$ ont pour matrice en base $\vec{\imath},\vec{\jmath}$: $B_0.P=U$; alors ${}^tU.U=I_2$ est aisé. Sans matrice : $g(\vec{e_i})\,.\,g(\vec{e_j})=\vec{e_i}\,.\,f^{-1}(\vec{e_j})$ et $f^{-1}(\vec{e_j})=\vec{u}$ tel que $\vec{u}\,.\,\vec{e_j}=1$, $\vec{u}\,.\,\vec{e_i}=0$ si $i\neq j$.]

52.8 Matrice et déterminant de Gram. Des calculs de distance (...)

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire (préhilbertien). $G=Matr(\vec{u}_i\,.\,\vec{u}_j)$, $g=det(G)$ $i,j\leqslant p$.

1. Montrer que : $\vec{u}_1,...\vec{u}_p$ libre $\Leftrightarrow g\neq 0$. Même : $rg(\vec{u}_k)=rg(G)$.
2. On suppose $\vec{u}_1,...\vec{u}_p$ libre ; $V=Vect(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$. Pour $\vec{v}\in E$, montrer que :
   $\boxed{\delta^2(\vec{v},V)=\dfrac{g(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p,\vec{v})}{g(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)}}$ δ désignant la distance (avec la $proj_\perp$). [Ind. prendre une base o.n. $\vec{e_1},...,\vec{e_p}$ de $V'\supset V$, alors $G={}^tP.P$. Idem avec $\vec{e_1},...,\vec{e_p},\vec{e}$ de $Vect(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p,\vec{v})$ si $\vec{v}\notin V$.]

52.9 **Avec ${}^tA$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $Ker({}^tA.A) = Ker(A)$, 51.11, 53.4, 55.7**

1. Montrer que ${}^tA.AX = O \Rightarrow {}^tX{}^tA.AX = \|AX\| = 0$ et donc $A.X = O$. Déduire que : $Ker({}^tA.A) = Ker(A)$ et $Tr({}^tA.A) = \sum a_{ij}^2$, norme de Frobénius : **cf. 55**
   Note. (${}^tA.A = A.{}^tA$ et A nilpotente) $\Rightarrow A = O$. [${}^tA.A$ diag., nilp. donc nulle ; $Tr(...) = 0$ ...]
2. Déduire que : $Im(A^tA) = Im(A)$. (Avec $rg(A) = rg({}^tA) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$.)
3. Maintenant $n = p$; et donc ${}^tA$ est la matrice de l'adjointe f^* de f. cf. 51.10 s.
   Avec $E = Ker(f) \oplus^{\perp} Im(f^*)$ (rappelé, mais à voir) montrer que : $f^2 = fof^* \Rightarrow f = f^*$.
   [$\overrightarrow{u} \in Ker(f) \Rightarrow f^2(\overrightarrow{u}) = fof^*(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ donc $f^*(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ avec 1). Puis : $(f^*)^2 = fof^*$; donc $\overrightarrow{v} \in Im(f^*) \Rightarrow f^*(\overrightarrow{v}) = f^*(f^*(\overrightarrow{u})) = f(f^*(\overrightarrow{u})) = f(\overrightarrow{v})$. Avec sous e.v. suppl. $\perp$ laissé : fini.]
4. Toujours avec $n = p$. Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont orthogonalement semblables.
   (En général : $AB_{n,n}$ et $BA_{n,n}$ ont même polynôme caractéristique : cf. 47.6. Et ici - matr. sym- etc.)

52.10 **Produit d'Hadamard. On pose ici $A * B = C$ où $c_{ij} = a_{ij}.b_{ij}$ (...)**

1. Vérifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ainsi une algèbre commutative, associative et unitaire.
2. Que A, B symétriques positives $\Rightarrow C$ aussi. (**Théorème de Schur**).
3. Idem avec strictement positives. [Voir aussi Wikipedia.]
4. Déduire : $O \leqslant A \leqslant B$, $O \leqslant A' \leqslant B' \Rightarrow A * A' \leqslant B * B'$. (i.e. $B - A$ sym. positive ...)

   Corrigé de 2) 3) : Posons $A = U^2$, U symétrique positive, $B = V^2$, idem. On a ici :
   $c_{ij} = (\sum_k u_{ki}.u_{kj})\ .\ (\sum_l v_{li}.v_{lj})$. D'où ${}^tX.(A*B).X = \sum_{k,l}(\sum_i u_{ki}v_{li}x_i)^2) \geqslant 0$, etc*. **Autre** sol. :
   2) : $A = P.\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & 0 & ... \\ 0 & ... & \\ ... & ... & \end{pmatrix}.{}^tP = P.\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ 0 \\ ...\end{pmatrix}(\alpha_1 \quad 0 \quad ...).{}^tP + ... = \alpha_1^2.U_1.{}^tU_1 + ...$ (U_1, 1ère col. de P.)
   $A = \alpha_1^2.U_1.{}^tU_1 + ...$ $B = \beta_1^2.V_1.{}^tV_1 + ...$ $A*B = \sum_{i,j}\alpha_i^2\beta_j^2(U_i.{}^tU_i)*(V_j.{}^tV_j) = \sum_{i,j}\alpha_i^2\beta_j^2(U_i*V_j).{}^t(U_i*V_j)$
   [$U.{}^tU = ({}^tU.U).\Pi$, $\Pi\, proj_{\perp}$.] 3) : Si $A, B > 0$, ${}^tXCX = 0 \Rightarrow (U_i*V_j)\centerdot X = 0 = U_i\centerdot(V_j*X), X = O$.

52.11 **En e.v.e., si $f \in \mathcal{L}(E)$, $|||\ f\ |||_2 \leqslant 1$: $Ker(f - Id) = Ker(f^* - Id)$ $\neq$ 53.4**

1. Montrer que $\|f^*(\overrightarrow{u})\|^2 = (\overrightarrow{u}\centerdot fof^*(\overrightarrow{u})) \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|f^*(\overrightarrow{u})\|$ ($\|f(\overrightarrow{v})\| \leqslant \|\overrightarrow{v}\|$). D'où $|||\ f^*\ |||_2 \leqslant 1$.
2. Puis que $Ker(f - Id) = Ker(f^* - Id)$ $(= Im(f - Id)^{\perp})$. [Ind. Si $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, $\|f^*(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}\|^2 = \|f^*(\overrightarrow{u})\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2.\overrightarrow{u}\centerdot f^*(\overrightarrow{u}) \leqslant 2.\|\overrightarrow{u}\|^2 - 2.f(\overrightarrow{u})\centerdot\overrightarrow{u} = 0$; donc $f^*(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$; réciproque, idem.]
3. Avec $E = Ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} Im(f - Id)$, déduire que $\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{0\leqslant k\leqslant p-1} f^k(x) = p_{\perp}(x)$ sur $Ker(f - Id)$.

52.12 **Paramétrisation de Cayley, exponentielle d'une matrice antisymétrique**

1. Si A antis. ($\Leftrightarrow \overrightarrow{x} \perp f(\overrightarrow{x}), \forall\overrightarrow{x}$; $\Rightarrow$ seule v.p. réelle 0, $I + A$ inv.) montrer que $R = (I-A)(I+A)^{-1}$ est orthogonale directe et -1 non vp. ($I - A, I + A$ et inverses commutent, ${}^t(I + A) = I - A$: même dét.) ; [$RX = X \Leftrightarrow AX = 0$; et si $A = \begin{pmatrix}0 & -t \\ t & 0\end{pmatrix}$, $R = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2\end{pmatrix}$ ($t = tan(\varphi), |\ \varphi\ | < \frac{\pi}{2}$...]
   Inv. : Ω étant orthogonale, avec -1 non vp. (donc $\in \mathbb{O}^+$) : $I + \Omega$ inversible et $(I - \Omega).(I + \Omega)^{-1}$ est antisymétrique (c'est A). [Noter que $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ est involutive et transforme $\mathbb{U} - \{-1\}$ en $\mathbb{R}.i$.]
2. On pose $\|M\| = n.sup\ |\ m_{ij}\ |$ (pour que $\|MN\| \leqslant \|M\|.\|N\|$) et on prend $exp(A)$ avec la série.
   Si ${}^tA = -A$, vérifier que : ${}^texp(A) = exp({}^tA) = exp(-A) = exp(A)^{-1}$ donc orthogonale et même directe (avec une forme triangulaire sur $\mathbb{C}$). Et, si $AX = O$, alors $exp(A).X = X$.
   Enfin, de l'égalité $exp\begin{pmatrix}0 & -t \\ t & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t)\end{pmatrix}$, déduire que exp n'est pas injective.
   Mais exp bij. $S_n \to S_n^{++}$. [$e^A = e^B$: F ss e.p de A stable par e^B et B ($e^B.B = B.e^B$) ; mêmes V.pr.]

53 E.v. préhilbertien complexe

53.1 Forme sesquilinéaire ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Forme sesquil. hermitienne

1. On garde la notation $b(.,.)$ pour les formes sesquilinéaires, sesqui=1 et $\frac{1}{2}$ contraction de semisque.
   Une forme sesquilinéaire est linéaire/1er vecteur et semi-linéaire/au 2ème : $b(x,\lambda.y)=\overline{\lambda}b(x,y)$ (par ex.). Elle est dite hermitienne si : $b(y,x)=\overline{b(x,y)}$; il suffit que ce soit vrai sur une base.
   Exemples. Sur C^n : ${}^t\overline{Y}.M.X$, ${}^t\overline{Y}.X$; Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $Tr({}^t\overline{B}.A)$; Sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$: $\int_I f(t).\overline{g}(t).w(t)dt$.
   (Première notation : cf. 50.6, $M'={}^t\overline{P}MP$. Hermitiennes $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{M}=M$, $t\mapsto w(t)$ à valeurs réelles.)
2. Montrer que : Une forme sesquilinéaire $\boxed{\text{est hermitienne } \iff b(x,x) \text{ est réel tout le temps.}}$
   (avec $4.b(x,y)=b(x+y,x+y)-b(x-y,x-y)-i.b(x+iy,x+iy)+i.b(x-iy,x-iy)$.
   Donc au passage $\boxed{\text{si } b \text{ sesquilinéaire : } b(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0,\ \forall\overrightarrow{u}\in E\Rightarrow b=O \ \ (\neq \text{ cas des f.bilinéaires}).}$
3. Orthog. pour b s.h., vecteurs isotropes, $Ker(b)=E^{\perp}$; Si $E^{\perp}=\{\overrightarrow{0}\}$, on dit b "non dégénérée" ; $det(M)$ appelé discriminant, en dim. finie : cf. forme bilinéaire symétrique en dim. finie.
4. Existence de base orthogonale : $b(e_1,e_1)=1=...=b(e_r,e_r)$, $b(e_{r+1},e_{r+1})=-1=...$, $b(e_{s+1},e_{s+1})=0=...=b(e_n,e_n)$. (r,s) indépendant de la base. Par contre : $x\longmapsto\varphi_x=b(x,.)$ lin. de E dans $\overline{E}^*$ $[(\lambda,\varphi)\to\overline{\lambda}.\varphi)]$; isomorphisme en dim. finie si b non dégénérée. Dans ce cas : pour F sous e.v. de E (encore !) $dim(F^{\perp})=dim(E)-dim(F)$ et $(F^{\perp})^{\perp}=F$
   (En général, $dim(F^{\perp})\geqslant dim(E)-dim(F)$; et égalité des dim. $\not\Rightarrow$ Suppl. ! cf. 50.7.4)
5. Que f soit dégénérée ou non, si F sous e.v. de E ici : $f_{/F}$ non dégénérée (qui est $F^{\perp}\cap F=\{\overrightarrow{0}\}$) $\Leftrightarrow$ F non isotrope (pas de vecteur $\neq\overrightarrow{0}$ de F orthogonal à F) $\Leftrightarrow$ en dim. finie $F\oplus F^{\perp}=E$.
6. Adjoint en dim. finie si b sesquilinéaire hermitienne non dégénérée. L'isomorphisme entre E et $\overline{E}^*$ permet de définir l'adjoint de $f\in\mathcal{L}(E)$ (noté f^* s'identifiant à un élément de $\mathcal{L}(E)$).
   Si f de matrice A, la matrice A^* de f^* est telle que $A^*=M^{-1}.{}^t\overline{A}.M$ (car $M={}^t\overline{M}$) ; et si on a une base orthonormée, $A^*={}^t\overline{A}$, trans-conjuguée. Note : $(\lambda.f)^*=\overline{\lambda}.f^*$, $det(A^*)=\overline{det(A)}$.

53.2 Cas particulier essentiel de produit scalaire hermitien. Ex.

1. Quand la forme hermitienne est positive, on dit e.v. préhilbertien. Montrer les inégalités de (C-S) et de (Minkowski). En déduire dans ce cas que $Ker(b)=\{\text{Vecteurs isotropes}\}$. Et : "définie" $\Leftrightarrow$ non dégénérée : "e.v.p. séparé". Si $dim(E)$ finie (e.v. hermitien), on a une base o.n.
2. Calcul en base o.n. : $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2={}^t\overline{(U+V)}.(U+V)=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|v\|^2+\ \overrightarrow{u}/\overrightarrow{v}\ +\ \overrightarrow{v}/\overrightarrow{u}$.
3. Identités à voir $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2Re(x/y)$ $\|x+iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2Im(x/y)$
   $4.(x/y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\|x+iy\|^2+i\|x-iy\|^2$ et Théorème du parallélogramme.
4. Groupe unitaire si b non dégénérée en dim. finie : $b(u(x),u(y))=b(x,y)$ ou $b(u(x),u(x))=b(x,x)$ ou $u^*u=Id$ ou ... $u^{-1}=u^*$ et alors $|\ det(u)\ |=1$. Si base o.n. (p.s.h.), $A^*={}^t\overline{A}$, et : ${}^t\overline{A}.A=I_n$. Montrer que toutes les v.p. complexes sont de module 1. (En particulier avec coefficients réels).
5. Application linéaire hermitienne relativement à b p.s.h. : $f^*=f$; cas f sym. réelle ?
   (a) Cas d'une base orthonormée : la matrice A de f dans une telle base est "hermitienne" : ${}^t\overline{A}=A$.
   (b) Avec le produit scalaire hermitien, montrer pour un endomorphisme hermitien de valeur propre λ_k, vérifie : $\lambda_i(x/y)=\overline{\lambda_j}(x/y)$; d'où vp réelle ; et sous espaces propres orthogonaux.
   (c) Même hyp. : Montrer que si F sous e. stable, alors $F^{\perp}$ aussi ; en déduire l'existence :
   (d) D'une base o.n. et d'une matrice diagonale réelle telles que $U^{-1}AU=D$ avec $U^{-1}={}^t\overline{U}$.

53.3 Au sujet des projections et des symétries orthogonales (...)

1. Vérifier que l'hyperplan $(\sum a_i.x_i = 0)$ est $\perp$ à $Vect(\sum \overline{a_i}e_i)$. Et $p_F(x) = \sum (x/e_k)e_k = \sum \overline{(e_k/x)}e_k$.
2. Si E e.v.h. (dim finie et p.s.h.) et si $x \neq y$ vérifient $\|x\| = \|y\|$, montrer que [il existe une réflexion s : $s(x) = y] \Leftrightarrow (x/y) \in \mathbb{R}$ (ou $Im(x/y) = 0$). Dans ce cas s est unique : sym. / $Vect(y-x)^{\perp}$.

53.4 Si f normal $(fof^* = f^*of)$ en e.v.h. $Ker(f - \lambda.Id) = Ker(f^* - \overline{\lambda}Id)$ ...

1. (a) Avec $\|f^*(u) - \overline{\lambda}.u\|^2 = \|f^*(u)\|^2 + |\lambda|^2.\|u\|^2 - \lambda.f^*(u)/u - \overline{\lambda}.u/f^*(u) = \|f(u) - \lambda.u\|^2$ conclure.
   (b) Mieux. f normal $\Rightarrow Ker(f) = Ker(f^*)$ **51.11** et $f - \lambda.Id$ est normal. [M. vect. propres.]
   (c) En déduire que deux Sous espaces propres associés à deux vp. distinctes sont orthogonaux.
2. (a) De E_λ stable par f et f^*, déduire que $E_\lambda^{\perp}$ est stable par f^* et stable par $f^{**} = f$. Puis que :
   (b) f normal $\Leftrightarrow$ diag. unitairement. Et $A = H + i.H'$ (hermitiennes) : A normale $\Leftrightarrow HH' = H'H$.
   (c) Sur $\mathbb{C}$: f normal $\overset{matr.}{\Leftrightarrow}$ $\forall F$ stable, $F^{\perp}$ stable $\Leftrightarrow \exists P : f^* = P(f) \Leftrightarrow tr(fof^*) = \sum |\lambda_k|^2$.

53.5 Décomposition de Schur : trigonalisation unitaire. Conséquence

1. Soit A une matrice complexe. Montrer que A est trigonalisable par une matrice unitaire.
2. Solution et remarques : On trigonalise A : $T = P^{-1}A.P$. Puis : par le procédé de Schmidt, on orthonormalise les colonnes de P : $\exists\, S$ triangulaire supérieure : $P.S = \Pi$ soit unitaire : $\Pi^* = \Pi^{-1}$. Alors : $S^{-1}.T.S = \Pi^{-1}.A.\Pi$ est triangulaire supérieure et elle est unitairement semblable à A. Si A réelle scindée ou non, A semblable orthogonalement à $A' = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots \\ 0 & R_{22} & \cdots \\ \cdots & & \end{pmatrix}$, R_{ii} bloc 1,1 ou 2,2 avec deux $vp \notin \mathbb{R}$ conjuguées. Et sur $\mathbb{C}$: A normale $AA^* = A^*A \Leftrightarrow A$ unitairement diagonalisable.

53.6 Décomposition en Valeurs singulières sur un exemple ($^tA.A$ ...)

1. Si $A = \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -\sqrt{3} \\ 1 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vérifier : $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 9 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} = PD^2P^*$, $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = diag(0,2,3)$.
2. Si $M = A.P.\Delta$, $\Delta = diag(0, 1/2, 1/3)$, vérifier que $M^*M = diag(0,1,1)$; déduire que les 2 derniers vecteurs colonnes de AP s'écrivent $(2q_2, 3q_3)$, q_2, q_3 orthonormés de $\mathbb{C}^4$. On complète en une base o.n. : q_1, q_2, q_3, q_4 de $\mathbb{C}^4$, de matrice $Q \in \mathbb{U}_4$; (alors que : $P \in \mathbb{U}_3$ et $0^2, 2^2, 3^2$: les vp de A^*A).
3. En déduire que $Q^*.A.P = \begin{pmatrix} diag(0,2,3) \\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}_{4,3} = A_s$ dite SVD pour "singular values decomposition".
4. Avec AA^*, que A et A^* ont même valeurs singulières, cf. 47.4 et $A_{n,n}$ inv. $\Leftrightarrow$ valeurs sing. $\neq 0$.

53.7 Pseudo inverse A^+ de $A_{n,p}$, en e.v.e. : éq. de Penrose (et autre ps-i)

1. X est dit "pseudo solution" de $A.X = B$ si $AX = p_{\perp}(B)$ sur $Im(A)$ [$*$]. Montrer que [$*$] $\Leftrightarrow$ $(B - AX)\,.\,AY = 0$, $\forall Y \Leftrightarrow {}^tA.A.X = {}^tA.B$, possible ! Si X_1 sol., les autres : $X = X_1 + Ker(A)$.
2. Parmi les X sol, montrer $\exists\,!\ S$ de norme minimum (sol. normale). [Avec les suppl. orthogonaux : $Im({}^tAA)$ et $Ker({}^tAA)$] ; et que cette solution est exactement de plus orthogonale à $Ker({}^tAA)$.
3. (a) Vérifier avec q.2 que $B \mapsto S$ est linéaire. $S = A^+(B)$, A^+ ps.-inv. au sens des moindres carrés.
   (b) Avec ${}^tA.A = \sum \rho_i.\Pi_i$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 ...$, Π_i matrices des $proj_{\perp}$ associées, vérifier que $A^+ = \sum_{\rho>0} \frac{1}{\rho_j}\Pi_j.{}^tA$.
   (c) Exemple : si $A_{1,p} \neq O$, vérifier que $A^+ = 1/a^2.\,{}^tA$ où $a^2 = A.{}^tA$. En général, vérifier que :
   (d) $A^+A = \sum_{\rho>0} \Pi_j$, A^+A, AA^+ sym., $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$. [A^+A, AA^+ $proj._{\perp}$ sur $Im({}^tA), Im(A)$.]
   (e) Unicité si MA, AM sym et $AMA = A, MAM = M$: ${}^tAAM = ({}^tA{}^tM{}^tA)^tM{}^tA = {}^tA{}^tM{}^tA = {}^tA$: MB p-sol. et $M = MAM = {}^tA{}^tMM$: $MB \in Im({}^tA)$. Donc $M = A^+$. Et $(A^+)^+ = A, ({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$.

Notes. ▪ Si $\overrightarrow{u}_i$ V.p. de ${}^tA.A$ pour $\rho_i = \sigma_i^2$, $A = \sum_{\rho>0} A.U_i.{}^tU_i = \sum_{\rho>0} \sigma_i.V_i.{}^tU_i$, $A^+ = \sum_{\rho>0} \frac{1}{\sigma_i}U_i.{}^tV_i$; SVD.

▪ Si $f \in \mathcal{L}(E,F), gfg = g, fgf = f$: gf proj., $Ker(gf) = Ker(f), Im(gf) = Im(g)$, $\widehat{g}^{-1} = \widehat{f}$; où $\widehat{g} = g_{/Im(f)}$. Et si $A_{n,n}$:

▪ $MAM = M, AMA = A$, $AM = MA$: autre ps-i. $AM = M'AMA = M'A \Rightarrow M = MAM' = M'$; ... $\Leftrightarrow Ker(A) \cap Im(A) = \{\overrightarrow{0}\}$!

54 Séries de Fourier

54.1 Notations. Divers résultats généraux rappelés

1. On prend $(f/g) = \int_a^{a+2\pi} \overline{f}(t)g(t)dt$: p.s. sur $C_{2\pi}$ e.v. des f. 2π-périod., continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   Mais on prendra aussi $CM_{2\pi}$.

   Soit : $P_n = Vect(e^{ikt}, -n \leqslant k \leqslant n) = Vect(1, cos(t), sin(t), ..., sin(nt))$, $\mathbb{C}$-e.v. Pour $f \in P_n$:

   On a : $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k.cos(kx) + b_k.sin(kx))$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$

   et $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i.(c_k - c_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$ $(b_0 = 0)$

   Aussi : $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi \mid f(t) \mid^2 dt = \sum_{-n}^{n} \mid c_k \mid^2 = \frac{\mid a_0 \mid^2}{4} + \frac{1}{2}\sum(\mid a_k \mid^2 + \mid b_k \mid^2)$. $(*)$

2. En général, notons $u_0 = c_0 = \frac{a_0}{2}$, $u_n = c_{-n}e^{-inx} + c_n e^{inx} = a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$. Alors

   $\sum u_n$ normalement conv. $\Leftrightarrow \sum \mid a_n \mid, \sum \mid b_n \mid$ conv. $\Leftrightarrow \sum \mid c_n \mid, \sum \mid c_{-n} \mid$ conv. Et :

   si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ $\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t).e^{-int}dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t).cos(nt)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t).sin(nt)dt.}$

3. Inversemment, partant de f, 2π-périod., on pose a_n, b_n, c_n comme ci-dessus : série de Fourier.

   - (On a : $c_{-n}(f) = \overline{c_n(\overline{f})}$; donc) f réelle $\Rightarrow a_n, b_n$ réels.
   - (Si : $g(x) = f(-x)$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$; donc) f paire $\Rightarrow b_n = 0$; f impaire $\Rightarrow a_n = 0$.
   - $f(x + \pi) = f(x)$ entraine $a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$; $f(x + \pi) = -f(x)$ entraine $a_{2p} = b_{2p} = 0$.
   - Pour f CM^1, on note Df la fonction dérivée, là où elle existe et sinon : 0. Alors

     Si f est 2π-périod., continue et C^1 par morceaux : $c_n(Df) = i.n.c_n(f)$. Surtout :

     (a) On a donc vu que si la série converge normalement, c'est la série de Fourier de sa somme.

     (b) La proj$_\perp$ de f sur P_n est égale à $S_n(f)$, somme partielle d'ordre n : $\|f\|_2^2 = \|S_n\|_2^2 + \|f - S_n\|_2^2$.

54.2 Théorème de convergence en moyenne quadratique

1. On a : Pour f $CM_{2\pi}$, la suite S_n converge en moyenne quadratique vers f.

   Corollaire : Formule de Bessel-Parseval. C'est $(*)$ avec $n = +\infty$.

2. Notes : a) Soit $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, appelée régularisée de f. Ceci va servir ensuite.

   b) On déduit que f continue, 2π-périod. est nulle si et seulement si ses coeff. de Fourier sont nuls.

   Analogue : Egalité de deux fonctions continues si et seulement même coeff. de Fourier.

54.3 Les Théorèmes de convergence ponctuelle (...)

1. Convergence normale. Si f **est continue,** 2π-périod., C^1 par morceaux, la SF converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. $\mid c_n(f) \mid = \mid \frac{1}{i.n}.c_n(f') \mid \leqslant \frac{1}{2}.(\frac{1}{n^2} + c_n(f')^2)$ et Th. de Parseval pour f'.

2. Théorème de Dirichlet. Si f est 2π-périod., C^1 par morceaux, alors la SF converge sur $\mathbb{R}$ et a pour somme $\tilde{f}(x)$: la régularisée !

(Démonstration (*) : On arrive à $S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du$ où $D_n = \sum_{-n}^{n} e^{ikt} = \frac{sin(n+1/2)u}{sin(u/2)}$ est appelé noyau de Dirichlet. Une telle intégrale est appelée produit de convolution.)

54.4 Exemple avec $f(x)=x$ sur $[0,\pi[$, f impaire 54.7

Trouver : $b_n = 2.\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}=\frac{\pi}{4}$; $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{n+1}sin(n)}{n}$? et (Parseval) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

54.5 Exemple avec $f(x)=x$ sur $[0,\pi[$, mais ici, f paire

Trouver : $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}.\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{cos(2p+1).x}{(2p+1)^2}$. Retrouver : $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ et trouver : $\displaystyle\sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

54.6 Autres ex. et développement de $\dfrac{sin(\pi.t)}{\pi.t}$ en produit infini

1. (a) Soit $f(x)=ch(\lambda.x)$ sur $[-\pi,\pi]$ et $2.\pi$-périodique. Montrer que :
$$f(x)=ch(\lambda.x)=\frac{sh(\lambda.\pi)}{\lambda.\pi}+\frac{2.\lambda.sh(\lambda.\pi)}{\pi}.\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n.cos(n.x)}{n^2+\lambda^2}\ \text{ sur }\ [-\pi,\pi].$$ En déduire

   (b) que : $\displaystyle 2.\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2}=\frac{\lambda.\pi.ch(\lambda.\pi)-sh(\lambda.\pi)}{sh(\lambda.\pi)}$. $\boxed{\lambda=i.\alpha:}$ $\pi.\alpha.cot(\pi.\alpha)=1+2.\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha^2}{\alpha^2-n^2}$.

   (Avec $g'(t)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2t}{t^2-n^2}$, $t\in]-1,1[$ et une Conv. Unif., on déduit $\underline{\dfrac{sin(\pi.t)}{\pi.t}=\prod_{n\geqslant 1}(1-\frac{t^2}{n^2}).)}$

   et : $\displaystyle 2.\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n.\lambda^2}{n^2+\lambda^2}=\frac{\lambda.\pi-sh(\lambda.\pi)}{sh(\lambda.\pi)}$. (On peut aussi prendre $f(x)=e^{\lambda.x}$ sur $[-\pi,\pi[$).

2. Avec $f(x)=e^{\alpha.x}$ sur $[-\pi,\pi[$, $\alpha\notin\mathbb{Z}.i$, en déduire : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{cos(n.x)}{\alpha^2+n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{sin(n.x)}{\alpha^2+n^2}$.

3. Avec $f(x)=sup(sin(x),O)$, déduire : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{4.n^2-1}$. Et $\mid sin(x)\mid=\dfrac{2}{\pi}(1+\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{2.cos(2kx)}{1-4.k^2})$.

   (Dans cette dernière relation, on ne peut certainement pas dériver terme à terme 2 fois ...)

54.7 Quelques autres relations bien remarquables (...)

Soit $\underline{\underline{a\in]0,\pi[}}$. Et f 2π périodique, paire : $f(x)=1$ sur $[0,a]$ et 0 sur $]a,\pi]$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{sin(n.a)}{n}cos(n.x)=\frac{\pi-a}{2}$ pour $\underline{\underline{x\in[0,a[}}$. Cas $x=0$? $a=1$?

Et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{sin^2(na)}{n^2}=\frac{(\pi-a).a}{2}$ (Ici $f(x)=1$ sur $[0,a[$; 0 sur $[a,2\pi[$ ou Th. de Parseval.)

Déduire $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n.sin(na)}{n}=\frac{-a}{2}$ et $\displaystyle\sum\frac{sin(2na)}{n}=\frac{\pi}{2}-a$ (Ligne 1 avec $x=a$, $x=\pi$).

54.8 Comment avoir f $\pi-$périodique ? cf. 54.1.3 (...)

Soit f C^0, 2π-périodique telle que $\forall k\in\mathbb{N}: a_{2k+1}=b_{2k+1}=0$. Montrer que f est $\pi-$périodique.

[Ind : Les coefficients de Fourier de $g(x)=f(x+\pi)-f(x)$ sont nuls et Th. de Parseval.]

54.9 Pour une certaine série entière, on montre que $a_n\to 0$ ...

Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n.z^n$ avec $R=1$. $\underline{\text{Si }\mid\sum a_n.z^n\mid\leqslant M,\ \forall z:\mid z\mid<1,\ \text{ montrer que }\ a_n\to 0.}$

Pour $0\leqslant r<1$, $f(z)=\displaystyle\sum a_n.z^n=\sum a_n.r^n.e^{i.n.\theta}$ est convergente ; $a_n.r^n$ sont les coefficients de Fourier.

<u>Par le théorème de Parseval</u>, $\displaystyle\sum\mid a_n\mid^2.r^{2n}=\frac{1}{2.\pi}\int_0^{2.\pi}\mid f(r.e^{i\theta})\mid^2.d\theta\leqslant M^2$. On fait tendre r vers 1 (*) par Théorème de convergence croissante : $\displaystyle\sum\mid a_n\mid^2$ convergente ; donc $a_n\to 0$ $(n\to+\infty)$.

54.10 Développement en série de Fourier sans intégrales (série entière)

1. 1er exemple. (a) Décomposer en éléments simples : $\frac{2.X}{X^2+2.Xch(a)+1}$, $a>0$. Puis :
   (b) Déterminer la SF de $f(x)=\frac{1}{cos(x)+ch(a)}$, avec $X=e^{ix}$. $[\frac{1}{sh(a)}.(1+\frac{\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k 2.cos(k.x)}{e^{k.a}}).]$
   (c) Déduire pour $n\in\mathbb{N}$: $\int_0^\pi \frac{cos(nt)}{cos(t)+ch(a)}dt=\frac{(-1)^n.\pi.e^{-na}}{sh(a)}$.

2. Autre exemple. Développer en 'S.E.' : $x\mapsto \frac{1-x^2}{1-2.x.cos(\theta)+x^2}$ $[=1+2.\sum_{k=1}^{+\infty}x^k.cos(k.\theta),\ |\ x\ |<1.]$

3. Si on développe en 'S.F.' : $\theta\mapsto\frac{1-x^2}{1-2.x.cos(\theta)+x^2}$, on se sait pas calculer les a_n ; mais avec ce qui précède ((*) à voir permutation de symboles...) : $a_0=1$, $a_n=2.x^n$, pour $x\in]-1,1[$.)

4. DSF de $\theta\mapsto\frac{1}{5-4.cos(\theta)}$? $[\frac{sin(\theta)}{1-2.x.cos(\theta)+x^2}=\frac{1}{2i}(\frac{e^{i.\theta}}{1-x.e^{i.\theta}}-\overline{(...)})=\sum_{n\geqslant 0}x^n.sin(n+1).\theta.$
   on peut faire 2) et 4)fin ensemble avec $\frac{1-x.e^{-i.\theta}}{(1-x.e^{i.\theta}).(1-x.e^{-i.\theta})}=...$]

5. Montrer par une transformation d'Abel que $\sum\frac{sin(n.x)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$ (conv. Unif. sur tout segment de $]0,2.\pi[$, donc somme $g(x)$, C^0 sur $\mathbb{R}\backslash 2.\pi.\mathbb{Z}$). Existe-t-il f C.p.m., $2.\pi$ period., de S.F. $\sum\frac{sin(n.x)}{\sqrt{n}}$? [Rép. Non, avec le th. de Parseval $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ne peuvent être des coeff. de F.]

6. Si f $C^0(\mathbb{R})$ $2.\pi$-period. avec $c_n\geqslant 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, alors f est la somme de sa S.F. :
   . Si $0\leqslant r<1$, vérifier que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{-n\leqslant k\leqslant n}c_k.r^{|k|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2.\pi}\frac{(1-r^2).f(t).dt}{1-2r.cos(t)+r^2}$.
   . Avec $f=cte$, en déduire la valeur de l'intégrale ! et avec $|\ f\ |\leqslant M$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{-n\leqslant k\leqslant n}c_k.r^{|k|}\leqslant M$;
   et que la série de terme c_n+c_{-n}, $n\in\mathbb{N}^*$ converge. Conclure.
   (La SF est normalement Cv et a même coeff. de Fourier que f, donc sont égales).

7. Remarque. Si f $C^0(\mathbb{R})$ $2.\pi$-period. : (f est C^∞) $\Leftrightarrow$ ($n^p.c_n$ et $n^p.c_{-n}$ tendent vers 0, $\forall p\in\mathbb{N}$).

54.11 Au sujet de l'inégalité de Wirtinger $\int_0^{2\pi}|\ f\ |^2\ (t).dt\leqslant\int_0^{2\pi}|\ f'\ |^2\ (t).dt$

Soit f C^1 2π périodique, telle que $\int_0^{2\pi}f(t)dt=0$.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f')=i.n.c_n(f)$; et $c_0(f')=c_0(f)=0$.
2. Avec la formule de Parseval, en déduire que : $\int_0^{2\pi}|\ f\ |^2\ (t).dt\leqslant\int_0^{2\pi}|\ f'\ |^2\ (t).dt$.
3. Variante. Pour f $C^1([0,1],\mathbb{R})$, $f(0)=f(1)=0$, on va trouver : $\int_0^1 f'^2\geqslant\pi^2\int_0^1 f^2$.
   (a) Vérifier que : $\int_0^1 f'(t).f(t).cot(\pi.t)dt=-\int_0^1 f'(t).f(t).cot(\pi.t)dt+\pi.\int_0^1 f^2(t).(1+cot^2(\pi.t)).dt$.
   (b) Et donc que : $-2\int_0^1 f'(t).f(t).\pi.cot(\pi.t)dt+\pi^2.\int_0^1 f^2(t).cot^2(\pi.t).dt=-\pi^2.\int_0^1 f^2(t).dt$.
   (c) Puis que : $\int_0^1\left(f'^2(t)-\pi^2.f^2(t)\right).dt=\int_0^1\left(f'-\pi.cot(\pi.t).f(t)\right)^2.dt$. Conclure et cas d'égalité ?

On peut aussi déduire q.3 de q.2 en posant : g impaire, 2π-period. et sur $]0,\pi]$ $g(t)=f(t/\pi)$.

55 Espace vectoriel normé (réel, de dimension finie souvent)

55.1 Topologie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et obtention de Théorèmes (connus)

1. Soit f injective, C^0, d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Sur $A=\{(x,y) : x>y\}$ convexe, donc connexe par arcs, $\phi : (x,y) \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ne s'annule pas : $Im(\phi) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ et f strictement monotone.
2. $\Rightarrow$ Preuve du Th. de Rolle gén. : Si f a même limite aux bords de I, f non monotone si non *cte* ...
3. $\Rightarrow$ Preuve du Th. de Darboux : Si $f'(x_1)<0$, $f'(x_2)>0$, f non monotone ; donc non injective ...
4. D'Alembert-Gauss. $d^0(P) \geqslant 1$, $\mid P \mid$ a un minimum en z_0 ($\mid P \mid \to +\infty$ en ∞, $\{z, \mid z \mid \leqslant r\}$ compact). $Q(z)=P(z_0+z)=c_0+c_m.z^m+z^{m+1}.R(z)$, $c_0, c_m \neq 0$; 0 min. : avec $\lambda.d$: $d^m=-c_0/c_m$, finir.

55.2 Topologie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, etc. Intérieur, Adhérence, Frontière (...)

1. ▪ (E,d) est un "espace métrique " ou encore d est une distance si : d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $d(P,Q)=0 \Leftrightarrow P=Q$; $d(Q,P)=d(P,Q)$; $d(P,R) \leqslant d(P,Q)+d(Q,R)$. d permet de définir les
   ▪ 'Voisinages' de $M_0 \in E$: toute partie contenant une boule ouverte$(M_0, r>0)$; 'ouverts' : voisinages de chacun de ses point ; 'fermés' : complémentaires. d dist. $\Rightarrow Arctan(d); inf(1,d); d/(1+d)$ aussi.
   ▪ Plus généralement une topologie est définie en donnant les ouverts ($\emptyset, E$ aussi). Cas 'métrisable' ?
2. ▪ L'intérieur d'une partie A noté $\overset{0}{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de A : un point est dit "intérieur" si A voisinage de ce point. Montrer que $\overset{0}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
   ▪ L'adhérence d'une partie A noté $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A : un point est dit "adhérent" à A si tout voisinage de ce point rencontre A.
   Montrer que : $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A ; que $\complement\overset{0}{A}=\overline{\complement A}$ et $\complement\bar{B}=\overset{0}{\complement B}$; que : $\overset{0}{\widehat{A\cap B}}=\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}$, $\overset{0}{\widehat{A\cup B}} \supset \overset{0}{A}\cup\overset{0}{B}$. Si $A=[-1,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,\{2,3\}$, préciser : $\overset{0}{A}$, $\bar{A}$, $\overline{\overset{0}{A}}$, $\overset{0}{\bar{A}}$.
   ▪ Frontière : $Fr(A)=\bar{A}\cap\overline{\complement A}=Fr(\complement A)$ donc fermé ; $Fr(\mathbb{Q})=\mathbb{R}=Fr(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, $\overset{0}{\mathbb{Q}}=\emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.
   Ex. $\complement Fr(A)=\overset{0}{A}\cup\overset{0}{\complement A}$; $Fr(A)=\bar{A}\backslash\overset{0}{A}$; $Fr(\overset{0}{A}), Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$. $(A\cap B=\emptyset,\ B \text{ ouvert}) \Rightarrow \overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}=\emptyset$.
   A ouvert $\Leftrightarrow A\cap Fr(A)=\emptyset$, A fermé $\Leftrightarrow Fr(A)\subset A$. [(4) : $A\subset\complement B, \bar{A}\subset\complement B, \overset{0}{A}\cap B=\emptyset$ ...]
3. Une partie A (de $\mathbb{R}$ par ex.) est **"rare"** si $\overset{0}{\bar{A}}=\emptyset$. (Une partie finie, $\mathbb{Z}$: rares.) Montrer que : A rare $\Leftrightarrow \bar{A}$ rare $\Leftrightarrow \bar{A}=Fr(\bar{A}) \Leftrightarrow \overset{0}{\complement A}$ dense. Et qu'une réunion finie d'ensembles rares est rare.
4. Distances équivalentes ($a.d_2 \leqslant d_1 \leqslant b.d_2$, $a,b>0$) $\Rightarrow$ Topol. unif. équivalentes (Id bi-unif.-continue) $\Rightarrow$ topol. équivalentes (Même topologie ou Id bi-continue). Sur $\mathbb{R}$, d_1 et $d_2(x,y)=\mid x^2-y^2 \mid$?

55.3 Convexité dans $\mathbb{R}^n$ par exemple. Si C convexe, adhérence, intérieur

1. Montrer que C convexe $\Rightarrow \overset{o}{C}$ (facile) $\overline{C}$ convexes. [$a,b\in\overline{C}$, $c=ta+(1-t)b, 0<t<1$; $c_\epsilon=ta_\epsilon+(1-t)b_\epsilon$...]
2. Si C convexe, $a\in\overset{o}{C}$, $b\in\overline{C}$; montrer que $[a,b[\subset\overset{o}{C}$. [$\mathcal{B}(a,r>0)\subset C$; $x\in]a,b[$; soit $h=h_{x,-xb/xa}$; $\exists b'\in h(\mathcal{B})\cap C$; si $a'=h^{-1}(b')\in\mathcal{B}, \mu\in]0,1[/x=\mu a'+(1-\mu)b' : x\in\mu\mathcal{B}+(1-\mu)b'$ ouvert de C.]
3. Si C convexe, $a,b\in\overline{C}$, alors : $[a,b]\subset Fr(C)$ ou $]a,b[\subset\overset{o}{C}$. [Avec q.1 et le Lemme d'intériorité q.2.]
4. Si C convexe et $\overset{o}{C}\neq\emptyset$: $\overline{C}=\overline{\overset{o}{C}}$ (q.2), $\overset{o}{C}=\overset{o}{\overline{C}}$ (si $c\in\overset{o}{\overline{C}}$, $\exists b\in\overline{C} : c=tb+(1-t)a$ si $t\to 1^-$; et q.2.)
   Donc $Fr(C)=Fr(\overline{C})=Fr(\overset{o}{C})$. En général : $(\overset{o}{C_1}=\emptyset,\ \overset{o}{C_2}=\emptyset)\Rightarrow C_1\overset{o}{\cup}C_2=\emptyset$. [Si $B(a,r>0)\subset C_1\cup C_2$ et $\overset{o}{C_2}=\emptyset$, on peut trouver $n+1$ points affinement libres de $C_1\cap B$; comme C_1 convexe, on en déduit : $\overset{o}{C_1}\neq\emptyset$.] Enfin :
5. $Aff(C)=\mathcal{E}\Rightarrow\overset{o}{C}\neq\emptyset$. [$\mathcal{E}=\{\sum\lambda_k.x_k/\sum\lambda_k\}=\{x+\sum\lambda_k.(x_k-x)/\sum\lambda_k\}\Rightarrow\exists x, x_k$ dans C affinement libres ; etc.]

55.4 Suites et topologie en espaces métriques. Cf. aussi 'suites de Cauchy'

1. Montrer que : a est adhérent à $A \Leftrightarrow$ Il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.
2. Montrer : A fermé (vide aussi) $\Leftrightarrow$ Toute suite de A convergente (limite finie), converge dans A.
3. a est dit valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ si $\forall\, V$ voisinage de a, l'ensemble des indices n : $u_n \in V$ est infini. Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$? d'une suite convergente ? de $((-1)^n.n)$ dans $\mathbb{R}$? (Par contre une suite bornée avec une seule valeur d'adhérence converge vers elle ; avec la compacité).
4. En espace métrique, on peut définir de manière équivalente (*) la compacité par la propriété de Borel-Lebesgue (avec les recouvrements ouverts) ou de Bolzano-Weierstrass (avec les suites). (B-W) est, au choix : De toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A. ou : Toute suite de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A. ($\emptyset$ est compacte) Exemples de compacts : Toute partie finie. Segments de $\mathbb{R}$ (par dichotomie). $\mathbb{R}barre = [-\infty, +\infty]$. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Les compacts de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) sont les fermés-bornés. Mais dans $E = C^0([0,1],\mathbb{R}), \|...\|_\infty$, la boule unité fermée B_f est fermée, bornée, non compacte : f_n valant 1 sur $[1/n, 1-1/n]$, 0 en 0 et 1, affine par morceaux : sans valeur d'adhérence dans B_f.
5. (*) Si f uniformément continue sur $]0,1[$, montrer que f a des limites en $0^+, 1^-$. (Suites de Cauchy.)

55.5 Partie ni ouverte ni fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Image de fermé/ouvert !

1. $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A^n$ bornée $\}$ est ni fermé $[\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & a \end{pmatrix},\ 0 < a < 1$; puis $a = 1]$ ni ouvert $[\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.]$
2. L'image de F fermé de $\mathbb{C}$ par $P \in \mathbb{C}[X]$ est un fermé (si $P = Cte$, clair). Et d'un ouvert est un ouvert si $P \neq Cte$. [a) Si $P(z_n)$, $(z_n \in F)$, converge vers $Z \in \mathbb{C}$ et P non constant, forcément (z_n) bornée ; compacité : on extrait une sous-suite converg. vers $z \in F$. Et $Z = P(z) \in P(F)$ forcément. b) Prenons P unitaire, $b = P(a)$, $z \in D(0,\epsilon)$; si $P(X) - b - z$ s'annule en u_i, $P(a - X) - b - z$ s'annule en $a - u_i$, d'où $\Pi(a - u_i) = -z$; donc $\exists i :\mid a - u_i \mid < \epsilon^{1/n}$; ainsi $D(b,\epsilon) \subset P(D(a,\epsilon^{1/n}))$.]

55.6 Au sujet des diverses normes dans un espace vectoriel (...)

1. Caractérisation de l'équivalence des normes avec les suites.
   Montrer : $[\exists\, a, b : a.N(\overrightarrow{u}) \leqslant N'(\overrightarrow{u}) \leqslant b.\mathbb{N}(\overrightarrow{u})] \Leftrightarrow$ Mêmes suites convergentes et mêmes limites.
   (Pour $\Leftarrow$: Sinon, $\exists \overrightarrow{u}_n \neq \overrightarrow{0}$: $N'(\overrightarrow{u}_n) \geqslant n.N(\overrightarrow{u}_n)$; $\overrightarrow{v}_n = \dfrac{\overrightarrow{u}_n}{\sqrt{n}.N(\overrightarrow{u}_n)}$ est contradictoire).
   Note. Dans $\mathbb{R}[X]$, (X^n) tend vers O pour les 2 premières normes ; vers 1 pour la dernière !
   $$max(\frac{a_k}{k+1})_{k\geqslant 0},\quad \sum \frac{\mid P^{(k)}(0) \mid}{(k+1)!} \quad \text{et} \quad max(\mid P(1) \mid, \frac{a_k}{k+1})_{k\geqslant 1}.$$
2. Norme et boule unité. Soit C une partie convexe, fermée bornée, symétrique / O, contenant une boule ouverte de centre O. On pose $E_x = \{\lambda > 0,\ \dfrac{x}{\lambda} \in C\}$; $j(x) = inf(E_x)$.
   (a) Montrer que E_x non vide. Puis que : $\lambda \in E_x,\ \mu \in E_y \Longrightarrow \lambda + \mu \in E_{x+y}$. Puis que :
   (b) $E_{\alpha x} =\mid \alpha \mid .E_x$. (cas $\alpha = 0$?) Conclure que j est une norme de boule unité fermée C.
3. En dimension finie, dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. orienté usuel, série (normalement) convergente dans $\mathcal{L}(E)$. Soit $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$. On pose $a = \|\overrightarrow{a}\| \neq 0$. Montrer l'existence de : $r = exp(f)$ (ce qui est : $r = \sum \dfrac{1}{k!}.f^k$). Puis préciser la rotation r. ($r = Id + \dfrac{sin(a)}{a}.f + \dfrac{1 - cos(a)}{a^2}.f^2$; $ror^* = Id$ ...)
4. En dim. infinie. Norme dans E e.v. des suites réelles bornées : soit $\|u\| = sup \mid u_n \mid, n \in \mathbb{N}$
   Pour $f : u \mapsto v$ avec $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que f est continue et calculer sa norme.
5. Applications contractantes en dimension finie. (Cf. espace métrique complet et suite de Cauchy)
   (a) Dans E de dim. finie, soit f contractante : $\|f(y) - f(x)\| \leqslant k.\|y - x\|$ avec $k < 1$.
   Montrer que la suite (u_n) : $u_{n+1} = f(u_n)$ converge ; de plus vers l'unique point fixe de f.
   (b) Dans $\mathbb{R}[X]$ avec $f(P) = 1 + X.P/2$, montrer que (u_n) peut diverger.
6. Cas de compacité. Si K compact, $f : \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v} \Rightarrow \|f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v})\| < \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$, $\exists\,!\, l : f(l) = l$. [Ind. $\overrightarrow{u} \mapsto \|f(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}\|$ a un minimum en l. Si non nul : $\|f[f(\overrightarrow{u})] - f(\overrightarrow{u})\| < \|f(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}\|$ ...]

55.7 (*) $X \mapsto A.X$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Norme subordonnée (...)

Une norme matricielle vérifie $\|B.A\| \leqslant \|B\|.\|A\|$. Exemples : normes subordonnées (mais ici $\|Id\| = 1$) $sup\|f(\overrightarrow{u})\|_{\|\overrightarrow{u}\|\leqslant 1}$ ou bien le plus petit k : $\|f(\overrightarrow{u})\| \leqslant k.\|\overrightarrow{u}\|$. Alors $\|gof\| \leqslant \|g\|.\|f\|$ et $\|f^k\| \leqslant \|f\|^k$.

1. Si on prend $\|X\|_\infty = max(|\ x_k\ |)$ et $|||\ ...\ |||$ la norme subordonnée : $|||\ A\ |||_\infty = sup_i\ (\sum_j |\ a_{ij}\ |)$.
2. Si on prend $\|X\|_1 = \sum_k (|\ x_k\ |)$, montrer que : $|||\ A\ |||_1 = sup_j\ (\sum_i |\ a_{ij}\ |) = |||\ A^*\ |||_\infty$.
3. Si on prend $\|X\|_2$ et A symétrique, montrer que $|||\ A\ |||_2 = max\{|\ \lambda\ |,\ \lambda$ valeur propre$\}$.
   Généralisations. A normale, $|||\ A\ |||_2 = \rho(A)$; et $\forall A \in \mathcal{M}_n(C)$, $|||\ A\ |||_2^2 = |||\ A^*.A\ |||_2 = \rho(A^*.A) = |||\ A^*\ |||_2^2$.
   En effet : $|||\ A\ |||_2^2 = sup\dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2} = sup\dfrac{X^*A^*AX}{X^*X} = \rho(A^*A)$ et les valeurs propres de A^*A sont positives.
4. Vérifier que $N(A) = sup(|\ a_{ij}\ |)$ est une norme $\begin{pmatrix} non\ matricielle \\ non\ subordonnée \end{pmatrix}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N(A^2) \not\leqslant N(A)^2$.
5. Etudier la norme matricielle de Frobénius (ou de Schur) : $(Tr({}^tA.A))^{1/2}$ (provenant d'un p.s.)
   (C-S) : $|\ c_{ij}\ |^2 \leqslant \|L_i\ de\ B\|_2^2.\|C_j\ de\ A\|_2^2 \Rightarrow N(C)^2 \leqslant N(B)^2.N(A)^2$. Non subord. : $N(I_n) = \sqrt{n}$.
6. Exercices : $\rho(A) \leqslant \|A\|$ si norme matr. $\quad \|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_1.\|A\|_\infty \quad \|M\|_2 \leqslant \|M\|_F \leqslant \sqrt{n}.\|M\|_2$.
   Solutions : (1) Si $Av = \lambda.v$, $|\ \lambda\ |.|||v, ..., v||| = |||Av, ..., Av||| \leqslant |||A|||.|||v, ..., v|||$. (1) $\Rightarrow$ (2) avec A^*
   (3) $\|M\|_2^2$: plus grande vp. de M^*M (dite carré d'une valeur singulière $\geqslant 0$ de M) ; $\|M\|_F^2$=leur somme.

55.8 Soit E de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$: $|||\ f^p\ |||$ bornée 52.11

1. Montrer que $E = Ker(f - Id) \oplus Im(f - Id)$.
   [Si $x = f(x)$, $x = f(t) - t$, $x = f^2(t) - f(t)$... donc (télescopie) $n.x = f^n(t) - t$; forcément $x = \overrightarrow{0}$.]
2. Pour $\overrightarrow{u} \in E$, calculer $\lim_{n\to+\infty}[\overrightarrow{u} + f(\overrightarrow{u}) + ... + f^{n-1}(\overrightarrow{u})]/n$. [Proj. sur $Ker(f - Id)$ // $Im(f - Id)$.]
3. Si dim(E) infinie, montrer que c'est faux : $P \mapsto X.P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\|P\| = max(|\ a_k\ |)$ vérifie
   $Ker(f - Id) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $Im(f - Id) = \{Q : Q(1) = 0\}$ sont non supplémentaires.

Notes . Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A^m bornée $\Leftrightarrow |\ \lambda\ | \leqslant 1$ et si $\mu \in \mathbb{U}$, $dim(E_\mu) = \omega(\mu)$.
. En e.v.e. si projecteurs orthogonaux ou endomorphismes orthogonaux : somme orthogonale.

55.9 Hyperplan non fermé en dimension infinie ; cas : H fermé

1. Dans $E = \mathbb{R}[x]$, soit la norme : $\|\sum a_k.x^k\| = max_k\ |\ a_k\ |$. (Nombre fini de coefficients non nuls) et $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(1) = 0\}$. Montrer que $\overline{E_1} = E$. (Calculer lim P_n, $P_n = 1 - \frac{1}{n}.\sum_{1\leqslant k\leqslant n} X^k$).
2. Soit φ une forme linéaire. Montrer que $H = Ker(\varphi)$ fermé $\Rightarrow \varphi\ C^0$. [Autre sens : vrai et connu]
   Corrigé de $\Rightarrow$ Soit $\varphi \neq 0$, $\varphi(\overrightarrow{\imath}) = 1$. Comme $E\backslash H$ ouvert, $\exists r > 0 : B(\overrightarrow{\imath}, r) \subset E\backslash H$. Par transl. de vecteur $-\overrightarrow{\imath}$, $B(O, r) \subset E\backslash H_1$, $H_1 = -\overrightarrow{\imath} + H$. Montrons : $\forall \overrightarrow{u} \in B(O, r)$, $|\ \varphi(\overrightarrow{u})\ | < 1$; ceci suffira. Sinon $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}/\varphi(\overrightarrow{u})$ est dans $B(O, r)$ et vérifie $\varphi(v) = 1$: qui contredit $B(O, r) \cap H_1 = \emptyset$.

55.10 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: montrer que $exp(A)$ est un polynôme en A

En général : si $\sum \alpha_k.A^k$ une série entière convergente. Montrer que S (somme) est un polynôme en A !
Corrigé. Soit $d = d^0(\Pi)$, polynôme minimal de A. $F = \{P(A), d^0(P) \leqslant d - 1\}$ est un sous e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dim. finie. $\forall Q \in \mathbb{K}[X] : Q(A) \in F$. Si $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \alpha_k.A^k$, $S_n \in F$, fermé ; sa limite S est dans F.

55.11 Distance à une partie $A \neq \emptyset$, en e.v. normé E (...)

1. Soit $d_A(\overrightarrow{u}) = \inf\{\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}\|, \overrightarrow{a} \in A\}$. Montrer : $|\ d_A(\overrightarrow{u}) - d_A(\overrightarrow{v})\ | \leqslant \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$. ($d_A\ C^0$ sur E).
2. Si A est convexe, montrer que d_A est une application convexe.
3. Si A est fermée et E de dim. finie, montrer : $\exists \overrightarrow{a}_{\overrightarrow{u}} : d_A(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}_{\overrightarrow{u}}\|$; $\overrightarrow{a}_{\overrightarrow{u}}$ est-il unique ?

56 Courbes de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

56.1 Cas $\mathbb{R}^2$: centre de courbure, C.I.R., développante

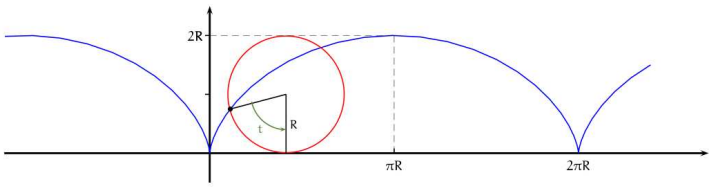
Rappel de ces notions sur un exemple.

– Prenons le cas d'une cycloïde Γ, décrite par un point A fixé à un cerceau de centre Ω roulant sans glisser sur un plan, le point de contact étant P. La normale à la cycloïde en A est la droite AP car P est le centre instantané de rotation (CIR) du solide cerceau. Mais P n'est pas le centre de courbure !
Soit le solide AXY (AX Tangente à la cycloïde en A, A lié au cerceau et décrivant la cycloïde) : le centre de courbure de la cycloïde est le **C.I.R. de ce solide-ci** (connu) et **cf. ce qui suit.**

– Développantes : Le centre de courbure C en un point M d'une courbe Γ est tel que $M = C + \lambda.\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{t}$ en $C \in \mathcal{C}$, en exprimant que $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma}$, σ sur $\mathcal{C}$, est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, on obtient $\frac{d\lambda}{d\sigma} = -1$ ou $\lambda = -\sigma + \lambda_0$ ou bien $\sigma + \overline{CM} = Cte$ avec $\sigma = Arc\text{-}C_0C$. Si $\overline{MM_1} = cte$, M et M_1 décrivent des "courbes parallèles" appelées : développantes de $\mathcal{C}$. En imaginant un fil fixé en C_0, épousant l'arc C_0-C, de longueur Cte **on voit que** C est le CIR du solide $(M, -\overrightarrow{n}, -\overrightarrow{t})$, celui-ci roulant sans glisser sur $\mathcal{C}$.

A noter : $\lambda = -$ rayon de courbure sur la développante ! D'où $Arc\text{-}C_1C_2 = R_{2(\Gamma)} - R_{1(\Gamma)}$ ...

– Exercices. Vérifier qu'une développante de cercle $\begin{cases} x = Rcos(\theta) \\ y = Rsin(\theta) \end{cases}$ est Γ : $\begin{cases} x = R(cos(\theta) + \theta.sin(\theta)) \\ y = R(sin(\theta) - \theta.cos(\theta)) \end{cases}$
Voir les points stationnaires de Γ (cas précédent) ; et en général ?



La cycloïde $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

– Retour à la cycloïde initiale soit $\theta = \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega P}$
l'élément de longueur est $ds = PA.d\theta$ d'une part. D'autre part $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{P\Omega} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}(\pi)$ et **donc le solide** AXY **(dont** C **est le CIR) tourne de** $\frac{d\theta}{2}$ **;** ce qui fait que $CA = 2.PA$! De plus, soit A' le point diamétralement opposé à A : on a $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{\Omega P} = -2R\overrightarrow{\jmath}$. Ainsi : C décrit une cycloïde translatée de la cycloïde initiale de vecteur $\pi.R\overrightarrow{\imath} - 2R\overrightarrow{\jmath}$ (car A' décrit aussi une cycloïde) !
Autre solution géométrique : Soit Q diamétralement opposé à P.
$A'Q$ est tangente en A' à son lieu (car tangente $\perp PA'$) ; et parallèle à AP. Si I est le sym. de A par rapport à P, $\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{A'I}$: I translaté de A', décrit donc une cycloïde et AI est tangente au lieu de I (car QA' tangente au lieu de A') : I décrit donc l'enveloppe des normales en A !

– Remarque. Inversons la figure haut-bas ; les arches de $\mathcal{C}$ tiennent lieu de joues donnant un pendule cycloïdal Γ ; sa période est indépendante de l'amplitude des oscillations ! (Th.dû à Huyghens.)

– Exercice. Une caustique par réflexion.
Des rayons venant de $-\infty$ dans le sens des y se réfléchissant sur la cycloïde en A passent par Ω.
La caustique est donc l'enveloppe des droites (A, Ω) : $X.cos(\theta) - Y.sin(\theta) = R\left(\theta.cos(\theta) - sin(\theta)\right)$.
Montrer par calcul que leur enveloppe est une nouvelle cycloïde déduite de l'initiale par $Hom(O, 1/2)$.

56.2 Courbes de $\mathbb{R}^2$: exercice sur les développantes

Soit I le centre de courbure en $M \in \mathcal{C}$; $P \in \Gamma$, Γ développante, sur la tangente en M.

1. Soit Q le milieu de $[MP]$. Dessin ? Cas particulier des développantes de cercles ?
2. Montrer que la tangente en Q à la courbe décrite par (Q) est perpendiculaire à (PI).
(s abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$; $2.\overrightarrow{OQ} = 2.\overrightarrow{OM} + (k-s)\overrightarrow{T}$; et $\overrightarrow{PI} = R.\overrightarrow{N} - (k-s)\overrightarrow{T}$.)

56.3 Exemple de courbes de $\mathbb{R}^3$. Plan osculateur

1. Soit $t \mapsto \begin{cases} x = cos^2(t) \\ y = cos(t).sin(t) \\ z = sin(t) \end{cases}$ la "fenêtre de Viviani". Projections sur les plans de coordonnées ?
[On dit que M est bi-régulier si $F'(t), F"(t)$ libres : ils déterminent le plan osculateur en $M(t)$].
2. Cas général. On suppose que $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \in \mathbb{R}^3$ est telle que $F^{(p)}(t_0)$, 1er vecteur non nul ; $F^{(q)}(t_0)$, 1er vecteur non colinéaire au précédent. $(M_0, F^{(p)}(t_0), F^{(q)}(t_0))$ est alors appelé plan osculateur.
   (a) En général, $F'(t_0)$,$F"(t_0)$,$F^{(3)}(t_0)$ base : vérifier que la courbe traverse le plan osculateur.
   (b) Et que, pour tout autre plan tangent, la courbe reste localement d'un même côté du plan.

56.4 Courbure et Torsion pour les courbes de $\mathbb{R}^3$

(a) Courbure dans $\mathbb{R}^3$. Par définition $\frac{1}{R} = \|\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}\| \geqslant 0$ et $\boxed{\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}.}$ $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$: vecteur binormal.

(b) On définit le rayon de torsion algébrique $\frac{1}{\mathcal{T}} = \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \cdot \overrightarrow{B}$; alors $\boxed{\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\frac{\overrightarrow{T}}{R} + \frac{\overrightarrow{B}}{\mathcal{T}}}$ et $\boxed{\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{-\overrightarrow{N}}{\mathcal{T}}}$ à voir.
Certains prennent le signe opposé pour $\mathcal{T}$

1. Hélice circulaire **56.5**. Montrer que $R = \frac{r^2\omega^2 + h^2}{r.\omega^2}$; $\mathcal{T} = \frac{r^2\omega^2 + h^2}{h.\omega} > 0$, si $h > 0$. [Note : les courbes de $\mathbb{R}^2$ tournant dans le sens trigonométrique ont un rayon de courbure $\mathcal{R} \geqslant 0$]. Vérifier aussi que angle$(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{B}) = cte = \pi/2 - V$, $V = (\overrightarrow{T}, \overrightarrow{k})$. Lieu du centre de courbure ? (autre hélice).
2. En pratique utiliser • les formules de Frenet si $\overrightarrow{T}$ assez simple ; • ou $\overrightarrow{V} = v.\overrightarrow{T}$; $\overrightarrow{\Gamma} = \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}$; $\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma} = \frac{v^3}{R}\overrightarrow{B}$: R, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{T}$; $\overrightarrow{S} = *\overrightarrow{T} + *\overrightarrow{N} + \frac{v^3}{R\mathcal{T}}\overrightarrow{B}$ (suraccélération) : $\mathcal{T}$ avec le produit mixte $[\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{S}]$: $R = \frac{\|\overrightarrow{V}\|^3}{\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\|}$, $\mathcal{T} = \frac{\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\|^2}{[\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{S}]}$ $\left(\begin{array}{l} Si\ d\beta = angle\ de\ 2\ binormales\ proches, \mathcal{T} = ds/d\beta : \overrightarrow{w} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma} \\ d\overrightarrow{w} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{S}dt, \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{w} + d\overrightarrow{w}) \simeq \|\overrightarrow{w}\|^2 d\beta \overrightarrow{T} = [\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{S}]\overrightarrow{V}dt\ ... \end{array}\right)$
3. En général : sphère osculatrice à une courbe ! $\boxed{\text{Son centre } P \text{ est-il centre de courbure ? non ...}}$
Sol. Posons $\overrightarrow{M_0P_0} = \lambda\overrightarrow{N} + \mu\overrightarrow{B}$; avec s au lieu de Δs : $P_0M^2 - P_0M_0^2 = 2\overrightarrow{P_0M_0}.\overrightarrow{M_0M} + M_0M^2 = -\frac{\lambda.s^2}{R} + \frac{\lambda.s^3}{3R^2}.\frac{dR}{ds} - \frac{\mu.s^3}{3R\mathcal{T}} + s^2 + s^3.\epsilon$ $[\overrightarrow{M_0M} = s\overrightarrow{T} + \frac{s^2}{2}\frac{\overrightarrow{N}}{R} + \frac{s^3}{6}(\frac{-\overrightarrow{T}}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\overrightarrow{N} + \frac{\overrightarrow{B}}{R\mathcal{T}}) + s^3\overrightarrow{\epsilon}]$: Choisir $\lambda = R$ et $\mu = \mathcal{T}.\frac{dR}{ds}$! Tangente au point P en écrivant maintenant $\boxed{\overrightarrow{MP} = R.\overrightarrow{N} + \mathcal{T}\frac{dR}{ds}\overrightarrow{B}}$
$\boxed{\frac{d\overrightarrow{P}}{ds} = [\frac{R}{\mathcal{T}} + \frac{d}{ds}(\mathcal{T}\frac{dR}{ds})]\overrightarrow{B}.}$ Et $\frac{d\overrightarrow{MP}^2}{ds} = \frac{d}{ds}[R^2 + \mathcal{T}^2(\frac{dR}{ds})^2] = 2.\frac{dR}{ds}.\mathcal{T}.[\frac{R}{\mathcal{T}} + \frac{d}{ds}(\mathcal{T}\frac{dR}{ds})]$ $\left(\begin{array}{l} \text{d'où : } P \text{ fixe} \\ \Rightarrow \text{Rayon fixe.} \end{array}\right)$
4. (*) Soit O, M, N, 3 points d'un arc C^2 d'un e.a.e. Montrer que : $\lim_{M,N \to O,O} \frac{OM.ON.MN}{\mathcal{A}(OMN)} = 4.R_O$.
(Paramétrage normal : $\overrightarrow{OM} = s\overrightarrow{\imath} + \frac{s^2.c_O}{2}\overrightarrow{\jmath} + s^2\overrightarrow{\epsilon}$). [Voir aussi le cas OMN sur un cercle !]
5. (*) Soit $M_1(s) = M(s) + \lambda(s).\overrightarrow{N}(s)$; on suppose que courbure $c(s)$ et torsion $\theta(s)$ ne s'annulent pas. Si la normale principale de M_1 [qui est $\perp$ à la tangente **et voir** $\forall M, t$: $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \wedge (\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2})$ colinéaire à $\overrightarrow{N}$!] est confondue avec celle de M, montrer que : $\lambda = Cte$ et $\lambda.c(s) + k.\theta(s) = 1$ où $k = cte$.

56.5 Définition, caractérisation des hélices [corrigé]

1. **Définition**. $\exists\,\overrightarrow{k}$ (unitaire) fixe tel que : (H1) $(\overrightarrow{T}(s),\overrightarrow{k})=V$ fixe. ($\frac{\pi}{2}-V$: angle de l'hélice)

• Hélice circulaire, pas $\frac{2\pi.h}{\omega}$ $\left\{\begin{array}{ll} x=r.cos(\omega.t)=r.cos(\theta) & aussi\\ y=r.sin(\omega.t)=r.sin(\theta) & idem\\ z=h.t=k.\theta; k=\frac{h}{\omega}, K=\sqrt{r^2+k^2}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} cos(V)=\frac{k}{K}, tan(V)=\frac{r}{k},\ \mathcal{T}=\\ \frac{k}{cos^2(V)}=\frac{r^2}{k.sin^2(V)}=\frac{r}{cos(V).sin(V)}\end{array}\right.$

Lieu du centre de courbure $\theta\mapsto(\frac{-k^2}{r}cos(\theta),\frac{-k^2}{r}sin(\theta),k.\theta)$, autre hélice circulaire $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''=\mathcal{H}$!
(la notion de 'développée' est plus compliquée ici ; en général, 2 droites de $\mathbb{R}^3$ sont non coplanaires, pas d'enveloppe de droites)

• Une autre hélice $\left\{\begin{array}{l} x=m.e^{-t}.cos(t)\\ y=m.e^{-t}.sin(t)\\ z=e^{-t}\end{array}\right.$ ici tracée sur le cône de révolution : $x^2+y^2-m^2.z^2=0$.

• 3ème hélice $\left\{\begin{array}{l} x=3.t\\ y=3.t^2\\ z=2.t^3\end{array}\right.$ Ici $R=\tau=\frac{3(1+2t^2)^2}{2}$; angle $\frac{\pi}{4}$ avec $\frac{\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{k}}{\sqrt{2}}$; $\overrightarrow{N}=\frac{(-2t,1-2t^2,2t)}{1+2.t^2}$.

• En général, axe Oz ; si σ absc. curv. dans Oxy, $x=x(\sigma),y=y(\sigma),z=p.\sigma+q$; $cos^2(V)=\frac{p^2}{1+p^2}$.
Donc $ds^2=d\sigma^2.(1+p^2)$; $s=k.\sigma$, $k=\sqrt{1+p^2}$; $s=\frac{k}{p}(z-q)$. Ainsi : $s=ax+by+cz+d$;
et inversement **ici,** en dérivant les 2 membres /s, on a : $\overrightarrow{K}.\overrightarrow{T}=1$; hélice d'axe $\overrightarrow{K}(a,b,c)$.
Par ex., si $x=\alpha.t$, $y=\beta t^2$, $z=\gamma t^3$, a-t-on une hélice ? $ds^2=(adx+bdy+cdz)^2$ conduit à $b=0$ et $\alpha^2+4\beta^2t^2+9\gamma^2t^4=(a.\alpha+3c\gamma t^2)^2$ ou à $a=1$, $c^2=1$, $6c.\alpha.\gamma=4\beta^2$; ou encore à $c=\epsilon$, $3\epsilon.\alpha.\gamma=2\beta^2$. Axe$=(1,0,\epsilon)$; $\gamma=\frac{2\beta^2}{3\alpha.\epsilon}$: on retrouve, en particulier, le 3è cas ci-dessus.

2. **Autres caractérisations**.

(H1) $\Rightarrow$ (H2) La normale reste **perpendiculaire** à $\overrightarrow{k}$. [Dériver $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{T}=cos(V)$.]

(H2) $\Rightarrow$ (H3) La binormale fait aussi un **angle** constant avec $\overrightarrow{k}$.
[$\overrightarrow{k}.\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}=-\frac{1}{\mathcal{T}}(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{N})=0$ donc $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{B})=cte$ et angle $(k,\overrightarrow{B})$ constant.]

(H3) $\Rightarrow$ (H4) rapport $\frac{R}{\mathcal{T}}$ constant. [Avec $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{B})=cte$, dérivant : $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{N})=0$ donc $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{T})=cte$.
Si $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{T}cos(V)+\overrightarrow{B}sin(V)$, $0=\frac{cos(V)}{R}-\frac{sin(V)}{\mathcal{T}}$: $\boxed{\frac{R}{\mathcal{T}}=cot(V).\binom{ou\ \pm\ si}{autre\ \overrightarrow{k}}}$ Th. de Lancret.]

(H4) $\Rightarrow$ (H1) (J. Bertrand) [Ayant $\frac{R}{\mathcal{T}}=cot(V)$, $V=cte$, soit $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{T}cos(V)+\overrightarrow{B}sin(V)$; alors ...
$\frac{d\overrightarrow{k}}{ds}=\overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{k}$ constant. Puis $(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{T})=cos(V)$ donc $(\overrightarrow{k},\overrightarrow{T})=cte$. D'où équivalences.]

On a encore H5,6,7 [vu : $z=p.\sigma+q$ ci-dessus, $p=cot(V)=tan(\alpha)$, $\alpha=\frac{\pi}{2}-V$] et H8 :

▪ H5,6,7 (Hélice d'axe $\overrightarrow{k}$) $\Leftrightarrow dz=cte.ds$ $(\frac{d^2z}{ds^2}=0)\Leftrightarrow ds=cte.\sqrt{dx^2+dy^2}=cte.d\sigma$, σ abscisse curviligne de $m(x,y,0)\Leftrightarrow dz=cte.d\sigma$ **noté :** $dz=p.d\sigma$, $ds=\sqrt{1+p^2}.d\sigma$, $ds=\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}.dz$.

▪ Egalement : H8 Hélice $\Leftrightarrow(R/r=cte,\mathcal{T}/r=cte)$ où r est le rayon de courbure de $m(x,y,0)$.
$\Rightarrow\frac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma}=\overrightarrow{t}+p\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{T}=\frac{1}{\sqrt{}}(\overrightarrow{t}+p\overrightarrow{k})$, $\frac{d\overrightarrow{T}}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{}}\frac{d\overrightarrow{t}}{d\sigma}$: $\sqrt{}.\frac{\overrightarrow{N}}{R}=\frac{1}{\sqrt{}}\frac{\overrightarrow{n}}{r}\Rightarrow\overrightarrow{N}=\overrightarrow{n}$; [on a choisi $r\geqslant 0$ avec une bonne orientation de σ] $\frac{R}{r}=(1+p^2)$; et $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{T}\wedge\overrightarrow{N}=\frac{1}{\sqrt{}}(\overrightarrow{t}+p\overrightarrow{k})\wedge\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{}}(\overrightarrow{k}-p.\overrightarrow{t})\Rightarrow\frac{d\overrightarrow{B}}{du}=\frac{-p}{\sqrt{}}\frac{\overrightarrow{n}}{r}$; $\sqrt{}.\frac{-\overrightarrow{N}}{\mathcal{T}}=\frac{-p}{\sqrt{}}\frac{\overrightarrow{N}}{r}$; donc $\frac{\mathcal{T}}{r}=\frac{1+p^2}{p}$. Et $\Leftarrow$: c'est (H4) $\Rightarrow$.

Remarque. (Puiseux) Si R et $\mathcal{T}$ sont constants, on a une hélice circulaire (avec (H8).)

3. Hélice **sur une surface de révolution** : $x = r.cos(\theta),\ y = r.sin(\theta),\ z = f(r)$; courbes $\theta = \theta(r)$.

   (a) Vérifier que : $cos^2(V) = \dfrac{f'^2(r)}{1 + r^2\theta'^2(r) + f'^2(r)}$. $(*)$

   (b) Par exemple, si $f(r) = \dfrac{r}{m}$, cône de révolution $x^2 + y^2 = m^2.z^2$, trouver que : $k.\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{1}{r}$; $k.\theta = ln\ \dfrac{r}{r_0}$ et donc : $x = r_0.e^{k.\theta}.cos(\theta),\ y = r_0.e^{k.\theta}sin(\theta),\ z = r_0e^{k.\theta}/m$ (d'où 1.Ex 2).
   Les projections orthogonales sur Oxy sont ici des spirales logarithmiques.

   (c) Cas $f(r) = \dfrac{r^2}{2p}$: hélices tracées sur un paraboloïde de révolution (*).
   L'égalité $(*)$ donne : $(\dfrac{d\theta}{dr})^2 = \dfrac{tan^2(V)}{p^2} - \dfrac{1}{r^2}$.

   . Ici (**) vérifier que c'est l'équation diff. des développantes de cercles, qui sont ainsi les $\text{proj}_\perp$. sur Oxy : si $x = R(cos(t)+t.sin(t)),\ y = R(sin(t)-t.cos(t))$; $\Rightarrow\ tan(\theta) = \dfrac{sin(t) - t.cos(t)}{cos(t) + t.sin(t)}$
   $r^2 = R^2(1 + t^2)$; d'où $\dfrac{1}{cos^2(\theta)}d\theta = \dfrac{t^2.R^2.dt}{x^2}$; mais $cos^2(\theta) = \dfrac{x^2}{R^2(1 + t^2)}$; $r.dr = R^2(t.dt)$
   donc : $d\theta = \dfrac{t.dr}{r}$ et $(\dfrac{d\theta}{dr})^2 = \dfrac{t^2}{r^2}$; finalement $(\dfrac{d\theta}{dr})^2 = \dfrac{1}{R^2} - \dfrac{1}{r^2},\ R = \dfrac{p}{tan(V)}$.

   . D'autre part si on prend le cône circonscrit de 1/2 angle V à son sommet $(0, 0, -z_r)$, on a : $tan(V) = \dfrac{r}{2z_r} = \dfrac{r}{r^2/p} = \dfrac{p}{r}$. C'est exactement le rayon R voulu, celui du cône circonscrit !

56.6 Courbe tracée sur une sphère ; une surface (...)

1. Soit Γ un arc C^∞. Montrer que : Γ est tracé sur une sphère $\Leftrightarrow\ \mathcal{T}.\dfrac{d^2R}{ds^2} + \dfrac{dR}{ds}\dfrac{d\mathcal{T}}{ds} + \dfrac{R}{\mathcal{T}} = 0$.
2. Montrer que si le centre de la sphère osculatrice est fixe, la courbe est tracée sur une sphère fixe.
3. Montrer que : (Γ est tracé sur la sphère de rayon a) $\Rightarrow R^2 + \mathcal{T}^2.(\dfrac{dR}{ds})^2 = a^2$. Réciproque ?

   Solution. a. Γ tracée sur une sphère de centre $\Omega \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\Omega M}(s).\ \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = 0 \Leftrightarrow\ \exists u, v, C^\infty : \overrightarrow{\Omega M} = u(s)\overrightarrow{N}(s) + v(s)\overrightarrow{B}(s)$. En dérivant, on obtient : $\overrightarrow{T} = u'.\overrightarrow{N} + u(-\dfrac{\overrightarrow{T}}{R} + \dfrac{\overrightarrow{B}}{\mathcal{T}}) + v'.\overrightarrow{B} - v.\ \dfrac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{T}}$.
   Donc $u = -R$, $v = +\mathcal{T}.u'$, $u = -\mathcal{T}.v'$ et l'égalité. Réciproque vue en **56.4.**4, refaite en b).

   b. Si la Sphère osculatrice **56.4** a un centre fixe, avec a) : $R^2 + \mathcal{T}^2(\dfrac{dR}{ds})^2 = cte = a^2 = P_0M^2$!

   c. Ayant $\overrightarrow{\Omega M} = -R.\overrightarrow{N}(s) - \mathcal{T}.\dfrac{dR}{ds}\overrightarrow{B}(s)$, on en déduit l'implication. Réciproque fausse : hélice circulaire à pas constant (on a seulement $MP^2 = cte$) ; mais elle est vraie si $dR/ds \neq 0$.

4. Des remarques sur la "fenêtre de Viviani" **56.3** : $\Gamma\ x = sin(2.t),\ y = 1 - cos(2.t),\ z = 2.cos(t)$.
   (a) Vérifier que Γ est inclus dans une sphère de centre O.
   (b) Puis que Γ est inclus dans le cylindre : $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.
   (c) Puis dans le cylindre $2.y + z^2 = 4$. Puis encore que :
   (d) $\alpha.(x^2 + y^2) + \beta.z^2 + 2.(\beta - \alpha)y - 4.\beta = 0$ et, avec $\alpha = -\beta = 1$, que $\Gamma \in$ Cône à préciser.

5. Courbe $M(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ tracée sur une surface$_{\perp\overrightarrow{n}}$ ($\overrightarrow{t} = \overrightarrow{T}, \overrightarrow{g} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}$) ; $\overrightarrow{g}$ normale géodésique.
   Courbure normale, géodésique, torsion géodésique $(1/R_n, 1/R_g, 1/T_g)$ vérifient : $\underset{d\overrightarrow{t}/ds\ \ d\overrightarrow{g}/ds\ \ d\overrightarrow{n}/ds}{\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_g & -\gamma_n \\ \gamma_g & 0 & -\tau_g \\ \gamma_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix}\overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{n}\end{matrix}$.
   Trièdre de Darboux-Ribaucour $(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{n}) = \varphi : \overrightarrow{N} = \overrightarrow{g}\,sin(\varphi) + \overrightarrow{n}\,cos(\varphi) : \gamma_n = \gamma.cos(\varphi), \gamma_g = \gamma.sin(\varphi)$.
   $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{g}\,cos(\varphi) + \overrightarrow{n}\,sin(\varphi) : \tau_g = \tau + \dfrac{d\varphi}{ds}$. C_0, C, c.de.courbure-sections $M, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}$; $M, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{N}$: cercle de Meusnier $\rho = \rho_0.cos(\varphi)$. $\gamma_g = 0, \forall M$: géodésique ; $\tau_g = 0, \forall M$: ligne.de.courbure ; $cos(\varphi) = 0$: ligne.asymptotique.

57 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Continuité. Surfaces

57.1 Les quadriques ; cf. formes quadratiques

1. $\mathbb{R}^2$: Voir l'étude des coniques dans $\mathbb{R}^2$ affine (euclidien). [En particulier : centre de symétrie].
2. $\mathbb{R}^3$: Ellipsoïde ; Hyperboloïde à 1 ou 2 nappes ; Paraboloïde elliptique ou hyperbolique ; Cône de degré 2 ; Cylindres : parabolique, elliptique ou hyperbolique ; ou connu (ex : point $x^2+y^2+z^2=0$).

57.2 Les cylindres (plus généralement)

1. Un cylindre est donné par $(u,v) \mapsto M(u,v) = m(u) + v.\overrightarrow{K_0}$ où $m(u)$ décrit une courbe. Dessin ?
2. Vérifier que le plan tangent en un point régulier du cylindre contient la "génératrice" de ce point.
3. Vérifier que l'on a un cylindre $\Leftrightarrow$ l'équation est du type $f(P,Q)=0$ où $P=0$ et $Q=0$ sont deux plans sécants selon une droite donnant la direction du cylindre. [$P=\lambda, Q=\mu$: droites parallèles].

57.3 Les cônes (plus généralement)

1. Plus généralement, un cône est donné par $(u,v) \longmapsto M(u,v) = \Omega + v.\overrightarrow{\Omega m}(u)$, Ω étant son sommet.
2. Vérifier que le plan tangent en un point régulier du cône contient la génératrice de ce point.
3. Vérifier que l'on a un cône si et seulement si l'équation est du type $f(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}) = 0$ où $P=0$, $Q=0$ $R=0$ sont 3 plans sécants (au sommet du cône). Exemple : $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$, cône de sommet O.
   Ex. Cône se sommet S_0 circonscrit à $x^2+y^2+z^2-2Rz=0$? $[xx_0+yy_0+zz_0-R(z+z_0)]^2 = (x_0^2+y_0^2+z_0^2-2Rz_0)(x^2+y^2+z^2-2Rz)$. Ombre au flambeau portée sur xOy ? Faire $z=0$.

57.4 Les surfaces de révolution (...)

1. Une surface de révolution est obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'une droite Δ.
2. (a) Vérifier que $xy+yz+zx-x-y-z+1=0$ est une surface de révolution [avec $\sigma_1 = x+y+z = P$ $\sigma_2 = xy+yz+zx$, $S_2 = x^2+y^2+z^2 = \Sigma$, arriver à : $P^2-\Sigma-2P+2=0$.] Dessin ?
   (b) Montrer que : $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=1$ est un cylindre de révolution à préciser.
   (c) Vérifier de même que $det.circulant(x,y,z)=0$ est aussi une équation de surface de révolution.
3. En général montrer qu'une surface de révolution a une équation du type $f(P,\Sigma)=0$ où $P=0$ est l'équation d'un plan, $\Sigma=0$ l'équation d'une sphère (l'axe passant par son centre, orthogonal à P).

57.5 Rappels au sujet du plan tangent (...)

Si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto F(u,v) = \begin{pmatrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{pmatrix}$ C^1 vérifie $\frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u}(u,v), \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v}(u,v)$ libres, on dit que $M(u,v)$ est régulier ; ces vecteurs définissent le plan tangent en M.

Rappel Si la surface est définie par $f(x,y,z)=0$, $f(M_0)=0$, f C^1 avec $\overrightarrow{grad} f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$, le plan tangent en M_0 est $\perp \overrightarrow{grad} f(M_0) = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$. Equation ? Cas de la sphère ?

57.6 Position de la surface par rapport au plan tangent

On suppose ici : $z=\varphi(x,y)$, φ, C^2. Sachant que $\varphi(a+h,b+k) = \varphi(a,b) + p.h + q.k + \frac{1}{2}[r.h^2 + 2s.hk + t.k^2] + o(h^2+k^2)$ avec les notations de Monge et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, en déduire que

– Si $s^2-rt<0$: la surface au voisinage du point est sur (si $r>0$) ou sous (si $r<0$) le plan tangent.

– Si $s^2-rt>0$: la surface au voisinage du point traverse le plan tangent.

58 Surfaces particulières (*)

58.1 Surface réglée $M(u,v)=m(u)+vG(u)$, $G(u)$ vecteur ne s'annulant pas

1. Vérifier que le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient sa génératrice.
2. Et que cylindres, cônes et l'hélicoïde droit $x=v.cos(u),\ y=v.sin(u),\ z=h.u,$ sont "réglées".

58.2 (*) Les surfaces réglées développables (dont cônes, cylindres ...) 59.5

1. Si génératrices $\nparallel xOy$: $x=av+\alpha, y=bv+\beta, z=v$; a,b,α,β fonct. de u. Plan tangent $\mathcal{P}_M$: $Y-bZ-\beta=m(X-aZ-\alpha)$, $m=\frac{b'z+\beta'}{a'z+\alpha'}$ f. homogr.(z) indique que $\mathcal{P}_M$ pivote autour de la gén. Si $z\to\infty$, plan asymptotique relatif à la génér. : $b'(X-\alpha)-a'(Y-\beta)+(ba'-ab')Z=0$, $\mathcal{P}_a$. Quand $\mathcal{P}_M\perp\mathcal{P}_a$, on dit 'point central' de la gén. et leur ensemble est 'la ligne de striction' de S. (S) développable si en tout point rég. d'une gén. quelc. $\mathcal{P}_M$ est le même $(\Leftrightarrow \alpha'b'-\beta'a'=0)$. **30.5**.
2. Si gén. $\parallel xOy$, $x=v, y=m.v+n, z=h$; m,n,h fonct. de u. $\mathcal{P}_M$: $Z-h=\frac{h'}{m'x+n'}(Y-mX-n)$. $\mathcal{P}_a$ $(x\to\infty)$: $Z=h$; plan central $Y=mX+n$ obtenu si $x_{central}=\frac{-n'}{m'}=x_{env.}$ dans Oxy des dr. $Y=mX+n$: la ligne de striction n'est ici que son contour apparent, $\parallel Oz$. $(m=cte$: cylindre). Une surface réglée à plan directeur dont les gén. rencontrent une droite fixe est un "conoïde" (droit si Droite $\perp$ Plan) ; ci-dessus $n=O$, donc : $z=\varphi(\frac{y}{x})$. Exemples : l'hélicoïde droit **58.1** ; et (**) le conoïde de Plücker : surface réglée, de degré 3, $z.(x^2+y^2)=a.(x^2-y^2)$; aucune développable.
3. Ex. Si 58.1 et $\vec{m}'(u),\vec{G}(u)$ libre $\binom{\text{si liée}}{\text{après}}$, montrer que : (la surf. est dév.) $\Leftrightarrow$ $\vec{m}'(u),\vec{G}(u),\vec{G}'(u)$ liée.

58.3 Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche C^2 birégulière

1. Si $\Gamma: u\mapsto m(u)$ est bi-régulière, la réunion des tangentes est (S) réglée : $(u,v)\mapsto m(u)+v.\vec{m}'(u)$. Alors, plan osculateur=plan tangent, hors de Γ où les points sont non réguliers. S est développable.
2. (*) Réciproque. Soit (S) développable : $(u,v)\mapsto m(u)+v.\vec{G}(u)$ avec $\vec{m}'(u),\vec{G}(u)$ et $\vec{G}(u),\vec{G}'(u)$ libres [cône, cylindre exclus]. (S) développable : $\vec{m}'(u)=\lambda(u).\vec{G}(u)+\mu(u).\vec{G}'(u)$, $\lambda,\mu\ C^1$.
   - Avec $det_{\vec{G}(u),\vec{G}'(u)}(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u},\frac{\partial\vec{M}}{\partial v})$, vérifier que (u,v) non régulier $\Leftrightarrow$ $v+\mu(u)=0$. On dit "arête de rebroussement" $\mathcal{A}: u\mapsto M[u,-\mu(u)]=m(u)-\mu(u)\vec{G}(u)=g(u)$, env. des droites de S :
   - Vérifier que : $\vec{g}'(u)=[\lambda(u)-\mu'(u)].\vec{G}(u)$, et $\vec{g}$" sont libres. Et enfin que :
   - (S') engendrée par les tangentes à $\mathcal{A}$ $(u,w)\mapsto g(u)+w.\vec{g}'(u)$ coïncide avec (S). Avec hyp. :

   Si (S) C^2, (S) développable $\Leftrightarrow\exists\ !\mathcal{A}$ tracée sur S : $S=\cup$ des tangentes à $\mathcal{A}$. 59.5.

58.4 Cône et cylindre circonscrit à une surface d'équation $f(x,y,z)=0$

1. Contour apparent cylindrique dans une direction donnée. Cylindre circonscrit. $\vec{U}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ donnant la direction, exprimer que l'équation en t, $f(x+a.t,y+b.t,z+c.t)=0$, $(x,y,z)\in S$, a une racine double (droite tangente). Exemple avec la sphère ? Cas où la direction est $\vec{k}$?
   Remarques : . Cas d'une quadrique : le contour apparent est une courbe plane, donc une conique.
   . Si contour apparent de direction Oz (dit "horizontal"), de $f(x,y,z)=0$: le plan tangent est parallèle à Oz, d'où $\overrightarrow{grad}\ f(M)\perp\vec{k}$: $f(x,y,z)=0$ et $f'_z(x,y,z)=0$. En project. sur xOy (horizontale) éliminer z entre ces équations. De même, on dit "frontal" si direction est Ox.
   . Si on a la surface en paramétrique $M=F(u,v)$, on exprime que : $(\vec{U},\overrightarrow{\partial F/\partial u},\overrightarrow{\partial F/\partial v})$ est liée.
2. Contour apparent conique issu d'un point donné Ω. Cône circonscrit. Exemple avec la sphère ?
   Si $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, poser $\begin{cases}X=a+\lambda(x-a)\\Y=b+\lambda(y-b)\\Z=c+\lambda(z-c)\end{cases}$ et exprimer que l'équation en λ a une racine double. **57.3**.

58.5 Equ. différentielle des lignes de niveaux ; et de plus grande pente

1. Les lignes de niveau d'une surface S : ses sections par les plans horizontaux ; lignes de plus grande pente : les trajectoires orthogonales. Si $z=\varphi(x,y)$ et (notations de **Monge**) $p=\varphi'_x(x,y)$, etc.
Lignes de niveaux $z=\varphi(x,y)$ et $z=z_0$ donc $\binom{dx}{dy}$ col. à $\binom{-q}{p}$ ou $z=\varphi(x,y)$ et $p+q.y'=0$.

2. Lignes de plus grande pente : $z=\varphi(x,y)$ et (dx,dy,dz) col. à $(-q,p,0)\wedge(p,q,-1)=(p,q,p^2+q^2)$.
Il suffit de dire : $z=\varphi(x,y)$ et $\binom{dx}{dy}$ col. à $\binom{p}{q}$; ou $z=\varphi(x,y)$ et $p.y'-q=0$.

Deux exemples. (P.H.) $2pz=x^2-y^2$? rép : $2pz=x^2-y^2$; $xy=\mu$. 13.3.
Cylindre : $x=cos(u)+v.\alpha$, $y=sin(u)$, $z=v.\gamma$?
proj. sur Oxy des L.de p.g.p. : tractrices $x-x_0=ln\mid tan\frac{u}{2}\mid+cos(u)$, $y=sin(u)$!

3. Hélices : $z=\varphi(x,y)$ et angle $V=cte$ entre $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{k}$. $[1+y'^2+(p+qy')^2].cos^2(V)=(p+q.y')^2$
ou $[1+y'^2+(p+qy')^2].sin^2(V)=(1+y'^2)$: $\lambda^2(1+y'^2)=(p+q.y')^2$ et $z=\varphi(x,y)$.

4. Loxodromies du grec loksos=oblique, dromos=course : coupent les lignes de niveau à angle constant.
[Sur terre, donc avec les méridiens et le pôle]. $(p^2+q^2)[1+y'^2+(p+qy')^2].cos^2(\alpha)=(py'-q)^2$
$(p^2+q^2)[...].sin^2(\alpha)=(p+qy')^2.(1+p^2+q^2)$; $(py'-q)^2.tan^2(\alpha)=(p+q.y')^2.(1+p^2+q^2)$.
[Hélices et loxodromies coïncident dans le seul cas des surfaces cylindriques verticales. L.de p.g.p. $\parallel Oz$.]

58.6 De la formule de Laguerre au 1/2 plan de Poincaré 4.6, 29.11

1. Soit A et B sur un cercle $\mathcal{C}$. Si $U\in\mathcal{C}$, l'angle $\widehat{(U,A),(U,B)}$ est indépendant de U ; de même le birapport $[UA,UB,UI,UJ]$, I,J points (cycliques) du cercle : il y a un lien ! Si O centre de $\mathcal{C}$:
$\boxed{\widehat{(U,A),(U,B)}=\frac{-1}{2i}.ln([UA,UB,UI,UJ])\ \left(\begin{smallmatrix}I,J:\text{points cycliques}\\UI,UJ\text{ droites isotropes}\end{smallmatrix}\right)\text{ et }\widehat{(O,A),(O,B)}=2.\widehat{(U,A),(U,B)}.}$
Ayant $A,B,I,J\in Cercle$, on peut dire aussi birapport $[A,B,I,J]$: indépendant de $U\in Cercle$.
D'où : $(UA)\perp(UB)\Leftrightarrow[UA,UB,UI,UJ]$ en D.H. (**formule de Laguerre**, "candidat à l'X" !)
[Car la droite UA : $y=x.tan(\alpha)$ (ou $y=x.tan(\alpha)+a.t$, dr. parallèle en coordonnées homogènes) et UB : $y=x.tan(\beta)$ coupent la droite de l'infini contenant les points cycliques $I(1,i,0)$, $J(1,-i,0)$ aux points $(1,tan(\alpha),0)$, $(1,tan(\beta),0)$: $[A,B,I,J]=\frac{i-tan(\alpha)}{i-tan(\beta)}:\frac{-i-tan(\alpha)}{-i-tan(\beta)}=e^{2.i.(\alpha-\beta)}=e^{-2.i.\theta}$.]

2. $\boxed{\text{Soit le demi-plan } \mathcal{H}:y>0\,;}$ si $A,B\in\mathcal{H}$, on nomme "droite A,B" le demi-cercle (ou demi-droite $\perp Ox$) passant par A,B centré sur Ox (exclu). Si $z,z'\in\mathcal{H}$, soit $d_k=k.\mid ln([z,z',\alpha,\omega])\mid$; α,ω bords du $\frac{1}{2}$ cercle, $d_k(i.t,i.t')=k.\mid ln(\frac{t}{t'})\mid$. C'est une distance ! (**) En effet : avec un D.L. $[z,z+u,\alpha,\omega]=1-u.\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\omega}\right)+o(u)$ d'où : $d_k(z,z+u)\underset{u\to0}{\sim}k.\frac{\mid\alpha-\omega\mid}{\mid z-\alpha\mid.\mid z-\omega\mid}\mid u\mid\underset{u\to0}{\sim}k.\frac{\mid u\mid}{y}$
car $y.\mid\alpha-\omega\mid=\mid z-\alpha\mid.\mid z-\omega\mid$ (2.surface-triangle). D'où un "espace de longueurs" (Gromov) : $d_k(A,B)=k.\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}.dt$ (sur une "géodésique") [invariance de $\mathcal{H}$ par : $z\mapsto T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=1$ et angles euclidiens préservés car $T'(z_0)=1/(cz_0+d)^2$, similitude directe.]
Géodésiques : avec la formule des variations d'Euler $\int_{x_A}^{x_B}f(x,y,y')dx$ extrémale $\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=O$,
vérifier qu'on a l'éq. diff. incomplète en x : $-y.y''=1+y'^2$; et avec $y'=\varphi(y)$: $\frac{\varphi(y).d\varphi}{1+\varphi^2(y)}=\frac{-dy}{y}$,
de solutions : $1+\varphi^2(y)=\frac{k^2}{y^2}$; donc $\frac{y.y'}{\sqrt{k^2-y^2}}=\pm1$; d'où $-\sqrt{k^2-y^2}=\epsilon.x+C$. Et ainsi trouver :
$(x-x_0)^2+y^2=k^2$: ce sont les $\frac{1}{2}$ cercles du début, auquels on doit joindre les $\frac{1}{2}$ droites $x=cte$.

3. L'aire est $Aire(\mathcal{D})=k^2.\int\int\frac{dx.dy}{y^2}$ d'où pour le triangle hyperbolique d'angle α,β,γ (Gauss-Bonnet)
$Aire(\mathcal{T})=k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$. Cas $A(a,\sqrt{R^2-a^2}),B(b,\sqrt{R^2-b^2}),C(*,\infty)$: $\int_a^b dx\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^\infty\frac{dy}{y^2}=...$
$Aire=...=k^2(\pi-\alpha-\beta)$; cas A,B,C : tracer les parallèles à Oy en A,B,C, additivité (Gauss).

59 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Dérivation. Extremum des f. numériques

59.1 Soit la conique d'équation $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 = 1$ (*) cf. 29.3

1. CNS pour que ce soit une ellipse ? $[a + c > 0, ac - b^2 > 0]$. Réduction et aire ? $(\frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}})$.
2. Et aussi avec les extrema de $x^2 + y^2$ sur l'ellipse (extrema liés), trouver la longueur des axes.

59.2 Chercher f C^1 : les normales à $z = f(x, y)$ rencontrent Oz

Trouver : $z = \varphi(x^2 + y^2)$; ce sont les surfaces de révolution autour de Oz.

59.3 Soit f de classe $C^1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; question théorique (...)

1. Dérivées partielles de : $(x, y, z) \longmapsto \int_y^z f(x, t)dt$?
2. Soit u, v de classe C^1. Dérivée de : $x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t).dt$?

59.4 Des dérivées partielles mixtes : à comparer (...)

1. Soit $f(x, y) = x.y.\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$. f est-elle continue ? de classe C^1 ?
2. Existence et calcul de $f"_{xy}(0, 0)$; $f"_{yx}(0, 0)$? Conclusion ? [Idem $g(x, y) = \frac{x^3.y}{x^2 + y^2}$.]

59.5 Quelques équations aux dérivées partielles

1. Résoudre : $x.f'_x(x, y) + y.f'_y(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x > 0$, en passant en polaires.
   (Trouver $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + H(y/x)$ où H est une fonction dérivable.
   En effet en posant $g(\rho, \theta) = f(\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta))$, obtenir : $\frac{\partial g}{\partial \rho} = 1$.)
2. Trouver f C^2 telle que : $\varphi(x, y) = f(y/x)$ soit solution de $\varphi"_{x^2} + \varphi"_{y^2} = 0$. (Laplacien.)
3. Avec $u = x.y$, $v = x/y$, $y > 0$, résoudre $x^2.\varphi"_{x^2}(x, y) - y^2.\varphi"_{y^2}(x, y) = 0$, φ $C^2(]0, +\infty[^2)$.
4. **Surface enveloppe d'un plan variable dépendant d'un paramètre : développable !**
   Soit $A.x + B.y + C.z = D$ (1) une famille de plans (P) : $A, ..., D$ dépendant de λ. cf. **30.5** **58.3**.

– Comme l'éq. dérivée est un plan $A'.x + B'.y + C'.z = D'$ (2), la "courbe caractéristique" est une droite (G) et la surface enveloppe $(\sum)$ est une surface réglée. Et $\forall M \in (G)$, le plan tangent à $(\sum)$ est (P) [cf. cas $\mathbb{R}^2$] qui reste le même quand M varie le long de (G) : c'est une surface développable.

– Son arête de rebroussement, $\mathcal{A}$, est telle que (1), (2) et (3) : $A"x + B"y + C"z = D"$. En effet : la courbe des fonctions $x(\lambda), ...,$ obtenue avec (1,2,3), vérifie en dérivant (1) avec (2) ; puis dérivant (2) avec (3), éq. : (4a,b) $Ax' + By' + Cz' = 0$, $A'x' + B'y' + C'z' = 0$: la tangente est donc bien (G).

– Et le plan osculateur à $\mathcal{A}$ n'est autre que (P) ; car dérivant (4a), avec (4b), $Ax" + By" + Cz" = 0$: le plan vectoriel associé contient $\overrightarrow{d^2M/d\lambda^2}$. Donc toute surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche $\mathcal{A}$, **est une surface développable, enveloppe des plans osculateurs à la courbe $\mathcal{A}$.**

– On dit "arête de rebroussement" car si $M \in \mathcal{A}$, $M = O$, $(G) = Oz$, $(P = Oxz)$, section dans Oxy : $z = t, x \simeq a.t^2, y \simeq b.t^3$ car $t = 0 \Rightarrow x' = y' = y" = 0$; d'où rebroussement dans Oxy ! Enfin :

– (S) $z = \varphi(x, y)$ est enveloppe de ses plans-tangents : $Z = pX + qY - (px + qy - z)$, dépendant de 2 paramètres x, y. Dépendance de 1 seul [ramenant à (1)] $\Leftrightarrow$ rel. entre p et q et entre p et $px + qy - z$; annuler 2 Jacobiens : $D(p, q)/D(x, y)$, $D(p, px + qy - z)/D(x, y)$ et trouver : surf. dév. $\Leftrightarrow rt - s^2 = O$.

60 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$: Intégration. Champs de vecteurs

60.1 Un calcul très astucieux avec une intégrale double

Il s'agit de montrer que : $I = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi.ln(2)}{8}$.

1. Vérifier que : $ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+x.y}dy$.
2. Déduire que $I = \int\int \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy = \int\int \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}dxdy$ sur le carré unité.
3. Déduire encore que $2.I = \int\int \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$ et conclure (Fubini).

60.2 Angle solide du carré $0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant a;\ z = h$, vu de O

1. Montrer, en général, que c'est le flux de : $\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.
   [Qui est la surface correspondante -par vision conique de centre O -sur la sphère unité.]
2. Montrer dans le cas de l'exercice que : $\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$.
3. En passant en polaires *montrer que cet angle solide vaut $\mu = \frac{\pi}{2} - 2.Arcsin\frac{h}{\sqrt{2(a^2+h^2)}}$.
   Vérifier si : $h \to +\infty$; $h \to 0$ (ici, 1/8 de la sphère) ; $h = a$: ici c'est $\pi/6$.

60.3 Les intégrales de Fresnel calculées aussi grâce à une intégrale double

Existence et calcul de $C = \int_0^{+\infty} cos(t^2).dt$ et $S = \int_0^{+\infty} sin(t^2).dt$.

On va calculer $E = \int_0^{+\infty} exp(i.t^2).dt$; on rappelle que $\int_0^{+\infty} exp(-t^2).dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer l'existence de C et S.
2. On note $I(a) = \int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{(i-a)(x^2+y^2)}dx.dy$, pour $a > 0$.
   Montrer en passant en polaires et en posant $u = \rho^2$ que $I(a) = \frac{\pi(i+a)}{4(1+a^2)}$.
3. En posant $F(a) = \int_0^{+\infty} e^{(i-a)x^2}dx$, vérifier que $I(a) = [F(a)]^2$.
4. Montrer la continuité de F en 0.
   On pourra écrire $\int_0^1 + \int_1^{+\infty} = G(a) + H(a)$ et, par parties : $H(a) = \int_1^{+\infty} e^{(i-a)x^2}.x.\frac{1}{x}.dx = \frac{-e^{i-a}}{2(i-a)} + L(a)$; puis appliquer une conséquence du Théorème de la convergence dominée.
5. De : $(\int_0^{+\infty} e^{i.x^2}dx)^2 = \frac{i.\pi}{4}$, ou de : $\int_0^{+\infty} e^{i.x^2}dx = \pm\frac{\sqrt{2.\pi}}{4}.(1+i)$, déduire que :
   $\underline{C = S = +\frac{\sqrt{2.\pi}}{4}}$, la 2è étant positive [$u = t^2$ et par parties, $1 - cos(u)$ primitive de $sin(u)$].

Histoire et citations de scientifiques (souvent mathématiciens) ...

[De Marcel Berger, IHES + 15-10-2016.] C'est avec François Viète (Fontenay-le-Comte 1540, Paris 1603) que la France entre dans les mathématiques modernes. Mieux, elles commencent avec Viète ... Cependant, il faut mentionner brièvement Nicolas Oresme (≃ Bayeux 1325, Lisieux 1382) : on tend à l'oublier car surtout connu comme théologien ; mais un historien soigneux comme Pierre Duhem a su montrer que dans ses écrits se trouvent en germe les notions de coordonnée, de représentation graphique, de série convergente, d'exposant fractionnaire ; c'est aussi un théoricien de la mécanique car il découvre l'expression mathématique du mouvement uniforme et uniformément accéléré.

Viète est avec Descartes le fondateur des notations algébriques modernes et de la mise en équation d'un problème ; on lui doit aussi d'importantes contributions en trigonométrie et géométrie ... Il introduit les signes plus et moins et c'est le premier à considérer un produit infini de nombres. Il arrive aussi à bout du problème d'Apollonius : construire des cercles tangents à trois cercles donnés. Pour cela, il utilise les propriétés de l'inversion (connue également de Descartes) mais ne considère pas cette transformation de façon systématique comme le fera Steiner au xixe siècle ... En trigonométrie, il trouve la formule pour cos(nx) et sin(nx). Il est aussi le premier à introduire la notion de triangles sphériques réciproques (premier exemple explicite de dualité qu'elle soit algébrique ou géométrique).

Avec Descartes arrive une maîtrise de la géométrie avec coordonnées qui lui permet de résoudre d'un seul coup un très vieux problème, celui du « lieu à quatre droites » : les Grecs avaient réussi à démontrer que, pour 3 droites D, E, F, le lieu des points m tels que dist (m,D).dist(m,E) = k dist^2(m,F), k constante était toujours une conique. Mais Pappus n'avait pas trouvé la solution du problème pour 4 droites dist(m,D).dist(m,E) = k. dist(m,F).dist(m,G) : encore une conique ! La recherche de ce lieu est emblématique du génie de Descartes : il montre d'abord que toute équation du second degré est l'équation d'une conique ; puis que la distance d'un point à une droite est une fonction affine des coordonnées. La définition du lieu entraîne alors que la courbe cherchée est une conique. Il est amusant de noter que Descartes se trompait (en partie seulement) et que c'est Roberval (1602-1665, physicien lui aussi, l'homme de la balance qui porte son nom) qui lui fit remarquer que le lieu se composait en fait de deux coniques. En effet, la distance d'un point à une droite est la valeur absolue d'une forme linéaire ; donc choix entre 2 signes, d'où 2 coniques. En réalité, Descartes prenait bien soin du signe, de sorte qu'il résolvait le problème en précisant de quel côté de la droite on se plaçait (ensemble constitué d'une ellipse et d'une hyperbole pour un k convenable). On doit aussi à Descartes la fameuse formule qui énonce que pour tout polyèdre (convexe), le nombre des sommets plus celui des faces et moins celui des arêtes vaut toujours 2. Mais l'attribution à Euler de cette formule est justifiée, car Descartes ne la donne pas de manière explicite et, surtout, à la différence d'Euler, il n'en « fait rien ».

Mais examinons en quoi Descartes, avec sa « dictature des coordonnées », a nui à Desargues. Gérard (ou Girard) Desargues (Lyon 1591-1661) est le prophète de la géométrie projective, le premier à commencer à fondre dans une théorie les propriétés de perspective pratiquées heuristiquement par peintres et graveurs. Architecte et ingénieur militaire (a-t-il participé au siège de La Rochelle en 1628 aux côtés de Descartes ?) Desargues rencontre certainement ce dernier à Paris et gagne vite son estime. Il crée de toutes pièces la géométrie projective en introduisant les « points à l'infini » : communs à toutes les droites parallèles. Dans un ouvrage fondamental "Brouillon project" (50 exemplaires en 1639) il révolutionne la théorie des coniques : « toutes les mêmes » car pour lui hyperbole et ellipse (voire cercle) c'est la même chose si on les regarde du bon point de vue ! Ce dont Pascal ne manquera pas de se servir pour son « hexagramme mystique ». On a pu dire que le livre de Viète contenait en germe la géométrie moderne ; l'oeuvre de Poncelet, continuateur de Desargues et Pascal, semble plus encore mériter cet éloge.

Mathématicien complet, géomètre, fondateur du calcul des probabilités, algébriste, physicien, philosophe et penseur chrétien, Blaise Pascal (ClermontFerrand 1623, Paris 1662) est l'un des mathématiciens les plus géniaux, même si sa mort prématurée, son dilettantisme, son mysticisme et ses passions multiples l'ont empêché d'être parmi les plus féconds. Pascal partage avec Ramanujan et Galois le titre de « greatest might-have-been in the history of mathematics ». Doté d'une énorme capacité de travail et d'une rapidité hors du commun, il est l'un des plus doués parmi les savants universels. Après son Traité des coniques, publié à 16 ans, il fonde avec Fermat le calcul des probabilités, construit sa machine à calcul. Algébriste, il est l'un des premiers à utiliser systématiquement le principe de récurrence, cela pour les propriétés du fameux triangle. Il crée la brouette et les transports en commun. Joueur invétéré avant sa conversion, il a aussi inventé et produit industriellement une machine à calculer en 50 exemplaires. Impossible ici de ne pas mentionner à nouveau qu'il fut un grand physicien (comme presque tous les grands savants jusqu'au xxe siècle), doublé d'un philosophe. Après sa conversion du 23 novembre 1654, il abandonne pratiquement toute recherche scientifique. Il est alors écrivain dans Les Provinciales et philosophe chrétien dans Les Pensées (oeuvre inachevée). Cependant, il publie encore des travaux, débouchant presque sur l'invention du calcul infinitésimal, Leibniz écrivant : « C'est en lisant Pascal qu'une lumière me vint » (lisant ses travaux sur la cycloïde, entamés durant sa période mystique, alors qu'une rage de dents l'empêchait de dormir). Il s'est aussi adressé à Fermat au sujet des probabilités, car il n'était pas sûr de lui : bel exemple de modestie scientifique. Pascal est pourtant aussi sur le point d'inventer le calcul intégral, comme Fermat l'était pour le calcul différentiel. Pour les géomètres, Pascal est aussi célèbre par son théorème sur les coniques, qu'il appelait hexagramme mystique. Sa preuve ramène par projection le cas général au cas du cercle ; mais pour le cercle, elle reste un mystère ...

Clairaut n'a certes pas la même envergure que les précédents, mais fut le premier à s'attaquer à la théorie des

courbes et des surfaces de l'espace. Pour les courbes, son oeuvre est riche, entre autres par l'expression analytique de leur courbure. On lui doit la notion de plan osculateur. La notion de torsion ne viendra qu'à la suite des travaux de Monge ; mais, pour les surfaces, c'est un précurseur de l'oeuvre de Monge. Clairaut est le premier à avoir abordé l'étude du subtil mouvement de la Lune (suivi bientôt par d'Alembert), par des calculs du second ordre (c'est-à-dire en négligeant les puissances d'ordre supérieur du rapport de la masse de la Lune à celle du Soleil), à avoir calculé l'avance du périgée. Il prévoit aussi le périgée de la comète de Halley avec moins d'un mois d'erreur, alors même que les masses de Saturne et Jupiter étaient mal connues à l'époque. Ainsi Clairaut constitue-t-il une transition, et l'on a pu dire à juste titre que, si le xviie siècle fut celui des courbes, le xviiie fut celui des surfaces.

Que s'est-il passé avant la Révolution ? Entre « Le temps de Descartes et de Fermat », et la Révolution française, on trouve : « Newton et Leibniz » (calcul infinitésimal) « L'ère Bernoulli » « L'âge d'Euler »... avant que Cauchy ne résolve définitivement les questions infinitésimales avec la notion de limite. En effet, sans elle, les Anglais travaillaient avec les « fluxions », les Allemands avec les infiniment petits, toutes choses maniées habilement avec des résultats remarquables, mais sans définitions précises. Euler (né à Bâle, mais qui fit la plus grande partie de sa carrière en Russie, appelé par la grande Catherine sur la recommandation de Bernoulli, et à Berlin) se sert du calcul infinitésimal pour résoudre un nombre immense de problèmes ; la dynastie des Bernoulli contribue aussi à cette évolution (on n'oubliera pas non plus le Français Guillaume de L'Hôpital). Si l'on ne devait retenir qu'une des innombrables formules d'Euler, la voici : $e^{i.\pi} = -1$ (mais aussi Dzeta(2) ...) Euler domine le début du xviiie siècle, mais, pour la suite, il doit partager cette gloire avec Lagrange ... Le calcul intégral se développe aussi mais, à ces époques, l'intégrale est simplement conçue comme l'opération inverse de la dérivation. Il faudra attendre en particulier le 20ème siècle et Lebesgue pour clore pratiquement ces questions essentielles ...

- *"D'où vient qu'un boiteux ne nous irrite pas et un esprit boiteux nous irrite ? A cause qu'un boiteux reconnait que nous allons droit et qu'un esprit boiteux dit que c'est nous qui boitons. Sans celà nous en aurions pitié et non colère. (...)*
- *Car enfin, qu'est ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. Infiniment éloigné de comprendre les extrêmes, la fin des choses et leur principe sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable, également incapable de voir le néant d'où il est tiré, et l'infini où il est englouti". Blaise Pascal (Pensées) né le 19 juin 1623 à Clairmont (aujourd'hui Clermont-Ferrand) en Auvergne ; et mort le 19 août 1662 à Paris.*

- *"Nous avons raison de penser que les nombres premiers sont un mystère que l'esprit humain ne pénétrera jamais..." Léonard Euler (1707 Bâle - 1783 Saint Pétersbourg)*

- *" Il existe pour ces sortes d'équations un certain ordre de considérations métaphysiques qui planent sur les calculs et qui souvent les rendent inutiles ... Sauter à pieds joints sur les calculs, grouper les opérations, les classer suivant leur difficulté et non suivant leur forme, telle est selon moi la mission des géomètres futurs. Je rêve d'un temps où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindre observations ... et on ajoutera : «je ne sais pas le reste»." Galois (1811-1832).*

- *"En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres ... " Hermite (1822-1901).*

- *Cauchy (1789-1857) un des plus grands mathématiciens du 19è siècle :*
  " Je crois en la divinité de Jésus-Christ avec Tycho Brahé, Copernic, Descartes, Newton, Fermat, Leibnitz, Pascal, Grimaldi, Euler ; Guldin, Boscovich, Gerdil ; avec tous les grands astronomes, physiciens, mathématiciens des siècles passés... Ma conviction ne se nourrit pas du lait maternel des préjugés hérités, mais provient de recherches profondes... Je suis franchement catholique comme le furent Corneille, Racine, La Bruyère , Bossuet, Bourdaloue, Fénelon, comme beaucoup des plus éminents de notre temps ... Je partage la foi profonde que : Ruffini, Hauy (le fondateur de la théorie des cristaux), Pelletier et Laênec (les inventeurs de la quinine et du stéthoscope) Freycinet (la navigateur immortel de la corvette « Uranie ») Ampère (le célèbre révélateur de l'électro-dynamique), Coriolis et tant de savants éminents de nos jours, confessèrent de vive voix, par leurs écrits et leurs actions."

- *Mais ... Gauss, Euler, Pfaff, n'étaient pas moins dévots que Cauchy. Euler faisait la prière du soir avec toute sa famille (...) Carl Friedrich Gauss, surnommé : "le Prince des mathématiciens" (« le plus grand mathématicien de tous les temps » ?) dans une lettre adressée à Parkas Bolyai :*
  " A présent, adieu, mon bon ami ! Qu'il te soit doux, le rêve que nous nommons vie, ce goût précurseur

de la vie véritable qui nous attend dans notre vraie patrie. Là, les chaînes du corps paresseux, l'espace limité, les coups de fouet des souffrances terrestres, l'amas de nos besoins et de nos désirs puérils ne pèseront plus sur l'esprit ressuscité... Et lorsque la dernière heure aura sonné, ce sera une joie de pouvoir déposer notre fardeau et de voir disparaître le voile épais, qui couvrait nos yeux".
Voir aussi en Italie la tombe d'un de ses étudiants, le très grand mathématicien Bernhard Riemann !

– *"J'ai beaucoup étudié, beaucoup appris et j'ai la foi religieuse du paysan Breton.*
Si après avoir étudié davantage, je parviens à savoir plus encore, j'arriverai, je le sens, à avoir la foi de la paysanne Bretonne" ! Louis Pasteur 2020 "rues Pasteur", en France (1822-1895).

– *"La science (...) est contrainte à admettre l'existence de lois physiques à titre de postulat primordial et préalablement à toute démarche, afin de pouvoir vivre et se développer." Max Planck (1858-1947).*
Signalons un autre grand physicien contemporain (CNRS,CERN) : Bernard d'Espagnat, +2015.

– *Pascal encore : "l'homme n'est qu'un roseau ... mais c'est un roseau pensant" ! Et analogue à ses "trois ordres", de François de Sales (saint patron des journalistes) : "L'homme est la perfection de l'univers ; l'esprit est la perfection de l'homme, l'amour celle de l'esprit, la charité celle de l'amour". Enfin :*

– *"An equation for me has no meaning, unless it express a thought of God." Ramanujan (1887-1920).*

Table des matières

0.1 Plusieurs questions concernant les nombres entiers (...) . . . 2
0.2 (*) Comparaisons (cf. les tailles d'un groupe en rectangle) . . . 2
0.3 (*) Pgcd et ppcm (nombres, polynômes, nombres de Fermat) . . . 2
0.4 (*) Résoudre $x^2+y^2=z^2$ dans $\mathbb{N}^*$. Les solutions sont (...) . . . 2
0.5 (*) Décomposition des nombres en facteurs premiers (...) . . . 2
0.6 Théorème de Johnson 1916 : 5 cercles de même rayon (...) . . . 2
0.7 Relation RST $(D,D')\equiv(\Delta,\Delta')$ antiparallèles=bissectrices.même.dir. . . . 2

1 Arrangements, Combinaisons, Injections, Surjections 3
1.1 (*) Divers calculs difficiles de dénombrement (...) . . . 3
1.2 Sur les applications (f^{-1} appliquée aux parties de F) . . . 3

2 Avec les nombres réels 4
2.1 $A+B+C=\pi \Rightarrow cos^2(A)+cos^2(B)+cos^2(C)=1-2.cos(A).cos(B).cos(C)$ . . . 4
2.2 Triangle toujours : $a+b+c=2p$, i : centre du cercle inscrit 5.4 . . . 4
2.3 Montrer que $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $a,...,d\geqslant 0$ . . . 4
2.4 (*) Le théorème de Beatty (p, $q>0$) [corrigé] . . . 4

3 Nombres complexes 5
3.1 Avec la conjugaison [on indique ici seulement la réponse (...)] . . . 5
3.2 CNS : les racines de $z^4-az^3+bz^2-cz+d$ forment un parallélogramme . . . 5
3.3 Complexes et polynômes : une majoration (inégalités de Cauchy) . . . 5

4 Complexes et géométrie 6
4.1 Chercher $M(z)$ de façon à avoir des points alignés (...) . . . 6
4.2 Fonction argument d'un complexe de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ continu avec *Arctan* . . . 6
4.3 Composition de rotations planes (et cf. aussi le ch. suivant 5.21) . . . 6
4.4 Centre de similitude directe≠translation, autre construction d'Euler . . . 6
4.5 Similitudes directes, cercles et Théorème "de l'angle inscrit" (...) . . . 6
4.6 Birapport et points alignés ou sur un cercle (une conique) DH, QH 4.7 . . . 6
4.7 (*) Quadrangle harmonique QH cf. Th. de la *puiss*$(M)/Cercle$ 29.10.6 . . . 7
4.8 (*) Théorème de Mohr-Masheroni (Napoléon l'a importé d'Italie) . . . 7

5 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ **8**
5.1 Trajet minimum [hors Problème de Fagnano et de Fermat (**)] . . . 8
5.2 Sur le triangle rectangle [hors Théorème de Pythagore, inversion] . . . 8
5.3 (*) Problème de Fagnano 1682-1766 et variations cf. 5.8, 5.15 . . . 8
5.4 (*) Théorème de la puissance d'un point et relations d'Euler . . . 8
5.5 (*) Quadrilatère A, B, C, D, quelconque et droites parallèles . . . 8
5.6 (*) Triangle pseudo-rectangle en A ; hyperbole équilatère HE . . . 9
5.7 (*) Hyperbole équilatère $\mathcal{H}$: des compléments à 5.6 (cf. 29.2) . . . 10
5.8 (*) Avec le Théorème de l'angle inscrit, ABC inscrit dans $\mathcal{C}$ . . . 10
5.9 Intersection de deux cercles. Axe radical et construction (...) . . . 10
5.10 Diverses constructions de cercles ; les points de Poncelet (...) . . . 11
5.11 (*) Quadrilatère inscrit (ex : biss de MNPQ)/circonscrit/orthodiagonal . . . 11
5.12 Formule de Héron d'Alexandrie [quadrilatère inscrit : F. de Brahmagupta] . . . 11
5.13 Triangles équilatéraux (ex.1 peut servir au Th. de Fermat 32.3) . . . 11
5.14 (*) Au sujet des cercles : Trois exercices très difficiles . . . 12
5.15 (*) Pieds des bissectrices du triangle orthique 5.16, 5.3,8 . . . 12
5.16 (*) Avec la puissance d'un point/cercle 29.10.6, axe orthique . . . 12
5.17 (*) Théorème de Ménélaüs. Les six pieds des bissectrices (...) . . . 12
5.18 (*) Théorème de Céva. Point de Lemoine (et de Gergonne/Nagel) . . . 13
5.19 Coordonnées barycentriques $M{=}bar[A, AireMBC ; B, AireMCA ; C, AireMAB]$ . . . 13
5.20 (*) Inversion isotomique (si 3 points alignés, les inverses ? non !) . . . 13
5.21 (*) En composant diverses similitudes affines directes (...) . . . 13
5.22 (*) Inversion (image d'un cercle passant par O : une droite) . . . 14
5.23 (*) Inversion : image d'un cercle ne passant pas par O (...) . . . 14
5.24 (*) Partager $ABCA$ en deux longueurs égales, cf. 5.18 . . . 14
5.25 (*) Une preuve du Théorème d'Erdös-Mordell (...) . . . 15
5.26 (*) Cercles orthogonaux et relation trigonométrique (...) . . . 15
5.27 (*) Avec le Théorème de l'angle inscrit, droites de Simson et Steiner . . . 15
5.28 (*) Droite de Steiner, point de Miquel ; isotomie et droite de Newton . . . 15
5.29 (*) Isogonalité et calcul de la longueur des bissectrices (...) . . . 17
5.30 (*) Isogonalité : points inverses du triangle (pour conique tritangente) . . . 17

6 Géométrie dans $\mathbb{R}^3$ **18**
6.1 Distance $\delta(O, \mathcal{D})$ si $\mathcal{D}{=}\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$: $x + y + z = 1 \cap 2x - 3y = 0$ . . . 18
6.2 (*) Sur le tétraèdre : deux exercices difficiles (...) . . . 18
6.3 (*) Au sujet du tétraèdre orthocentrique (...) . . . 19
6.4 (*) "Division vectorielle"//éq. lin. avec second membre . . . 19

7 Limites des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **20**
7.1 Des limites de suites ou de fonctions (...) . . . 20
7.2 Preuve du Th. de prolongement des inégalités . . . 20
7.3 Calcul de limite avec un encadrement (...) . . . 20
7.4 (*) Préciser diverses limites [corrigés] . . . 20
7.5 (*) Limites en lien avec des intégrales . . . 20

8 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **21**
8.1 Fonction continue, bornée, non prolongeable par continuité . . . 21
8.2 Quelques questions en lien avec la fonction $Arctan$ (...) . . . 21
8.3 (*) Une fonction uniformément continue, non lipschitzienne . . . 21
8.4 Trouver les fonctions C^0 telles que : $f(x) = f(2x + 7)$ . . . 21
8.5 Une fonction bijective mais continue nulle part (...) . . . 21
8.6 (*) Démontrer les Théorèmes sur la continuité . . . 21

9 Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **22**
9.1 Révisions des théorèmes fondamentaux de l'analyse (...) . . . 22
9.2 Chercher f dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y).f'((x+y)/2)$ . . . 22
9.3 (*) Diverses remarques sur le T.A.F. et ses conséquences (...) . . . 23
9.4 (*) f C^∞, $f \geqslant O$, nulle hors de $[-1,1]$ valant 1 sur $[-\theta,\theta]$ 23
9.5 (*) Questions au sujet d'une pseudo-dérivée (...) . . . 23

10 Polynômes $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ **24**
10.1 Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ (Théorème de Rolle) . . . 24
10.2 En utilisant les racines complexes [corrigés] . . . 24
10.3 $P \in \mathbb{C}[x], P(x^2) = P(x).P(x-1)$ $(Pcte : 0, 1)$ . . . 24
10.4 Majorer le module de racines dans $\mathbb{C}$ [corrigé] . . . 25
10.5 Règle de Sturm pour le nombre de racines réelles . . . 25
10.6 Meilleure approximation uniforme de O (polynômiale) . . . 25

11 Fractions rationnelles **26**
11.1 "Homographie" : écriture analogue pour f, f^{-1} . . . 26
11.2 Quelques décompositions à effectuer (...) . . . 26
11.3 Transformation d'équations, utilité (...) . . . 26
11.4 (*) Le Théorème de Gauss-Lucas (...) . . . 26
11.5 (*) Equations paramétriques dans $\mathbb{R}^3$! (coniques) . . . 26

12 Fonctions élémentaires **27**
12.1 Proche du cours. Diverses études [corrigé] . . . 27
12.2 Equation fonctionnelle de la fonction th (...) . . . 28
12.3 Courbes et géométrie (exercices remarquables) . . . 28

13 Equations différentielles **29**
13.1 Trouver les polynômes $P(x) \in \mathbb{R}[x]$: P' divise P . . . 29
13.2 Trajectoires orthogonales (de courbes planes ici ...) . . . 29
13.3 Trajectoires orthogonales (de courbes non planes ...) . . . 29
13.4 E.D. Lagrange $y = x.A(y') + B(y')$, Clairaut $A(y') \equiv y'$ . . . 29
13.5 Résoudre $y' = \sqrt{1+y}$. Ne pas oublier la solution : $y = -1$ . . . 29
13.6 Equations différentielles avec utilisations de la parité (...) . . . 30
13.7 f C^0 $2.\pi$- périodique. CNS pour que F (primitive) soit $2.\pi$-périodique . . . 30
13.8 Si f C^0 $2.\pi$- périodique, $y' + y = f(x)$ a une unique solution 2π-périodique . . . 30

14 Développements limités **31**
14.1 (*) Une suite avec un développement limité (...) . . . 31
14.2 Dl de fonction réciproque avec $f(x) = x + x^2 - x^3$ . . . 31

15 Courbes en paramétriques [hors coniques], fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ **32**
15.1 Une courbe orthoptique (avec diverses indications ...) . . . 32
15.2 Cinématique : composition des vitesses et des accélérations . . . 32
15.3 Exemples de mouvement particulier très important (...) . . . 32
15.4 (*) Etudier les mouvements de A, B, C, tels que (...) . . . 32
15.5 (*) Mouvement plan sur plan. Podaire, développée 30.6 . . . 33

16 Courbes en polaires [hors coniques] **34**
16.1 (*) Sur les limaçons de Pascal (Etienne, père de Blaise ...) . . . 34
16.2 (*) Tracer une courbe donnée par une équation polaire (...) . . . 34
16.3 (*) Accélération en coordonnées polaires, Formules de Binet . . . 35
16.4 (*) Avec l'hodographe, mouvements à accélération centrale . . . 35

17 Suites : généralités **36**
17.1 Des études de suites assez faciles (...) . . . 36
17.2 Suite impliscite comme racine de polynômes . . . 36
17.3 Accélération de convergence : méthode de Stirling . . . 36
17.4 Accélération de convergence : méthode de Richardson . . . 36
17.5 (*) Fractions rationnelles convergeant vers un irrationnel . . . 36

18 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$. etc. **37**
18.1 Suites avec beaucoup de radicaux (...) . . . 37
18.2 Soit $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$: un équivalent . . . 37
18.3 (*) Méthode de Newton avec $f(x) = x - \varphi(x)/\varphi'(x)$ . . . 37
18.4 Vitesse de convergence de suites convergeant vers $\sqrt[n]{a}$ . . . 38
18.5 Suite $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$, $u_0 \in [-2, 2]$ et $u_n = 2.cos(\varphi_n)$ . . . 38
18.6 Des suites couplées (étudiées sans matrice ici ...) . . . 38
18.7 Questions autour du Théorème du point fixe (...) . . . 39
18.8 Suites pour le calcul approché de π (Archimède ...) . . . 39
18.9 Méthode des isopérimètres : périmètres constants à 2 . . . 39

19 Intégrales simples **40**
19.1 Six petites questions initiales (...) . . . 40
19.2 Comment Fermat calculait $\int_0^a x^m.dx = \dfrac{a^{m+1}}{m+1}$ . . . 40
19.3 Une équation différentielle avec une primitive (...) . . . 40
19.4 $fC^0([0,1])$, $\int_0^1 f(t).dt = 0$; $\alpha = inf\ f$, $\beta = sup\ f$: $\int_0^1 f^2(t).dt \leqslant -\alpha.\beta$ . . . 40
19.5 (*) Quelques calculs de diverses intégrales [avec ici les réponses] . . . 41
19.6 (*) $a < b$, $\lambda > 0$, g C^1 ; par parties $\int_a^b g(t)sin(\lambda.t)dt \to 0$ si $\lambda \to +\infty$ . . . 41
19.7 (*) Une intégrale classique par limite de somme de R. 44.7 . . . 41
19.8 (*) Limites et intégrales [dont $(\int_a^b f^n(x).dx)^{1/n}$ ...] . . . 41

20 Calcul de primitives **42**
20.1 Les primitives de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sont-elles calculables ? . . . 42
20.2 Primitives de fractions rationnelles en $sin(x)$, $cos(x)$ . . . 42
20.3 Avec des fonctions irrationnelles ($\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ connu) . . . 42
20.4 Une primitive hors série de : $f(x) = 1/[ch(x).\sqrt{ch(2x)}]$ . . . 43
20.5 Calculs de limites (seulement) d'intégrales irrationnelles . . . 43
20.6 Intégration des "différentielles binômes" $\int x^m.(a.x^n + b)^p.dx$ . . . 43
20.7 (*) CNS : $\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2.(x-d)^2}dx$ soit rationnelle (a, b, c, d distints) . . . 43

21 Groupes, anneaux, corps **44**
21.1 Diverses questions d'Arithmétique (...) . . . 44
21.2 Avec la division euclidienne, préciser les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ . . . 44
21.3 (*) Au sujet des Groupes quotients (...) . . . 44
21.4 Un groupe admettant un nombre fini de sous groupes est fini . . . 44
21.5 (*) Groupe G opérant sur un ensemble E (...) . . . 45
21.6 Le centre $Z(G)$ d'un p-groupe (fini) n'est jamais réduit à $\{e\}$ . . . 45
21.7 (*) Le groupe $\mathcal{G}$ des isométries du cube (...) . . . 45
21.8 Non unicité de la décomposition dans un anneau non factoriel . . . 45
21.9 (*) Au sujet des Anneaux quotients (...) . . . 45
21.10 (*) Avec $A = \mathbb{Z}[i]$, si p premier, $p \equiv 1\ (4)$: p somme de 2 carrés . . . 45

22 Espaces vectoriels **46**
22.1 Donner des exemples de sous e.v. supplémentaires . . . 46
22.2 (*) Résolution de systèmes linéaires [corrigé] . . . 46
22.3 Des exemples de combinaisons linéaires [corrigé] . . . 46
22.4 (*) Complexifié d'un e.v. réel (comme le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$) . . . 46

23 Espaces vectoriels de dim finie **47**
23.1 Sur-famille, sous-famille [facile ; corrigé] . . . 47
23.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$=3, famille libre, génératrice . . . 47
23.3 Famille libres / liées dans $E = \mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathbb{R}[x)$ [corrigé] . . . 47
23.4 Quelques autres exemples de famille libres / liées [corrigé] . . . 48
23.5 Somme directe. Supplémentaires et dimension finie [énoncés] . . . 48

24 Applications linéaires **49**
24.1 En dim. finie, une équivalence importante pour $f \in \mathcal{L}(E)$ . . . 49
24.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$: noyau et image parfois non en somme directe . . . 49
24.3 Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$, sur la Dérivation discrète (et cf. 25.7) . . . 49
24.4 Avec le cours bien connu sur les projecteurs [corrigé] . . . 50
24.5 Rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), E, F$ de dimensions finies ; g... . . . 50
24.6 Sur le rang d'applications linéaires : quelques ajouts (...) . . . 51
24.7 Soit E un e.v. de dim. finie : n. Montrer les équivalences . . . 51
24.8 Quaternions de Hamilton et une note sur $\mathbb{GA} = E \rtimes \mathbb{GL}(E)$ . . . 51

25 Calcul matriciel **52**
25.1 Utilité du calcul des puissances d'une matrice. . . . 52
25.2 D'autres méthodes pour le calcul de M^n (...) . . . 52
25.3 En dim. 2, f end. : $Im(f) = Ker(f) = Vect((1, 2))$ . . . 53
25.4 Trois questions concernant la trace [corrigé] . . . 53
25.5 Si $A \in \mathcal{M}_n$ de rang 1 : $\exists k$, $A^2 = kA$ et $k = Tr(A)$ . . . 53
25.6 Dans $\mathcal{M}_{2,2}$, deux sous e.v. supplémentaires [corrigé] . . . 54
25.7 Dérivées intermédiaires bornées si les extrêmes le sont . . . 54
25.8 Un problème sur la dérivation discrète (cf. 24.3) . . . 55
25.9 E.v. et Anneau (algèbre) de matrices [corrigé] . . . 56
25.10 Question au sujet des matrices à trace nulle ($\neq$ 48.4) . . . 56
25.11 Matrice symétrique, conique $x^2 + 2kxy + y^2 + 2x + 2y = 0$ . . . 56

26 Déterminants 2x2 ou 3x3 **57**
26.1 Exercices de cours sur les déterminants dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ . . . 57
26.2 Déterminants et géométrie, (*) "problème de Napoléon" . . . 57
26.3 (**) Eq. barycentriques, déterminants, matrices (lecture) . . . 58

27 Espaces vectoriels euclidiens **59**
27.1 Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est toujours libre . . . 59
27.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. usuel, décrire l'endomorphisme de matrice B . . . 59
27.3 Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, un produit scalaire classique et norme de Frobénius . . . 59
27.4 Inégalités : produit scalaire et matrices orthogonales (...) . . . 59
27.5 Symétrie par rapport à un hyperplan en dimension finie (...) . . . 60
27.6 Le Th. du parallélogramme caractérise une norme provenant d'un p.s. . . . 60
27.7 Applications symétriques ou antisymétriques en e.v.e. (...) . . . 60
27.8 Sur les applications conservant le produit scalaire (...) . . . 60
27.9 (*) Dans $\mathbb{R}_2$[x] avec un p.s. donné par une intégrale (...) . . . 60
27.10 (*) Matrices 3,3 circulantes et rotations vectorielles (...) . . . 60
27.11 Suite de Fibonnacci, nombre d'or ; matrices 2x2 et produit scalaire . . . 61

28 Espaces affines/Affines euclidiens **62**
28.1 Composée de 2 symétries affines orthogonales dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ . . . 62
28.2 Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ e.a.e., décrire $M \mapsto M' : x' = z - 2,\ y' = x,\ z' = y$ . . . 62
28.3 Applications affines. Note sur la projection conique (Th de Désargues) . . . 63
28.4 Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, des ensembles de points tels que (...) . . . 63
28.5 Au sujet des torseurs. Un exemple classique . . . 63

29 Cercles et coniques (et cf. 30.3,5,6,8) **64**
29.1 Trois questions de barycentre. Note sur le cercle [Pascal] . . . 64
29.2 (*) Triangle inscrit dans une Hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ [corrigé] . . . 65
29.3 (*) C.N.S. pour que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ soit une ellipse. Aire ? . . . 65
29.4 Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$: construction de Rytz si diamètres conjugués . . . 66
29.5 Faisceau linéaire de cercles $C_0 : x^2 - 2a_0x + y^2 + c_0 = 0$, $C_1 \neq C_0$ . . . 66
29.6 Sur un Théorème de La Hire (sur l'Ellipse) [corrigé] . . . 67
29.7 Sur la double génération des coniques (ex. ellipse) . . . 67
29.8 (*) Puissance d'un point/une conique [Jean de Biasi] . . . 68
29.9 (*) Polynôme de degré 3. Convexité. Ellipses de Steiner . . . 68
29.10 Polarité / à un cercle, réciprocité, quadrangle harmonique . . . 69
29.11 Polarité par rapport à un cercle, Théorème de Salmon, tppr . . . 71

30 Longueur et courbure des courbes planes **73**
30.1 Courbes C^1 telles que $a.\mathcal{R} = a^2 + s^2$ . . . 73
30.2 (*) Quelques autres équations intrinsèques . . . 73
30.3 (*) Parabole Γ $t \mapsto M(x = 2t, y = t^2)$, normales . . . 74
30.4 (*) Au sujet des courbes de poursuite usuelles (...) . . . 75
30.5 Enveloppes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$; cf. 13.4 ; développée ; et 30.6 . . . 75
30.6 Podaire, enveloppe, coordonnées polaires, courbure 15.5 . . . 76
30.7 Equation intrinsèque $R.s = 1$: spirale de Cornu (fig. 4) . . . 77
30.8 (*) Au sujet des normales à certaines courbes (...) . . . 77
30.9 (*) Enveloppe de droites et courbes particulières . . . 77

31 Fonctions de plusieurs variables : Continuité **78**
31.1 Continuité de $f(x,y) = (1 - cos(\sqrt{|\,x.y\,|}))/\,|\,y\,|$ [corrigé] . . . 78
31.2 (*) Tangentiels de 3 points alignés d'une cubique : alignés . . . 78

32 Fonctions de plusieurs variables : Dérivation **79**
32.1 Soit $f(x,y) = \dfrac{sin(x^3) - sin(y^3)}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ . . . 79
32.2 Maximum(xyz), $M \in$ triangle ABC, $x = dist(M, BC)$, gradient . . . 79
32.3 Minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$, $M \in Triangle.ABC$, Leibniz . . . 80
32.4 Soit g C^0 ; et f telle que : $f(x,y) = \dfrac{1}{x}.\displaystyle\int_x^{x.y} g(t).dt$ (...) . . . 80
32.5 (*) Une équation aux dérivées partielles [corrigée] . . . 80
32.6 Sur l'inversion, avec différentielle de f. de deux variables . . . 80

33 Fonctions de plusieurs variables : Intégration **81**
33.1 Calcul de l'intégrale de Gauss avec les intégrales doubles [corrigé] . . . 81
33.2 (*) $\displaystyle\int\int (x^2 - y^2)dxdy$ sur l'intérieur de l'ellipse $x = a.cos(t), y = a.sin(t)$ . . . 81
33.3 Volume commun à 2 cylindres de révolution (même rayon) d'axes $\perp$ . . . 81
33.4 Quelques calculs : une aire non plane et un volume [avec réponses] . . . 81
33.5 Avec les formule de Stockes et d'Ostrogradski, rotationnel, divergence . . . 81

34 Compléments sur les Fonctions **82**
34.1 Quelques équivalents à trouver . . . 82
34.2 Dérivée nième de : $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$? . . . 82
34.3 Limite de $(tan\frac{3x}{2})^{tan(3x)}$ en $\frac{\pi^-}{6}$ . . . 82
34.4 Une limite théorique très classique . . . 82
34.5 Manipulation d'inégalités de convexité (...) . . . 82
34.6 Pour f C^2 dans un voisinage de x_0 où f" ne s'annulle pas . . . 82
34.7 (f C^0 sur $[a,b]$, dér. sur $]a,b[$, $f(a)=0$, $\mid f' \mid \leqslant \alpha. \mid f \mid) \Rightarrow f = 0$ . . . 82
34.8 Au sujet du Théorème de Rolle généralisé (remarque) . . . 82
34.9 (*) Théorème des Accroissements finis généralisés . . . 82
34.10 (*) Avec les "polynômes de Lagrange" . . . 83
34.11 (*) Prouver une existence d'une dérivée (...) . . . 83
34.12 (*) Majoration de dérivée intermédiaire, M_k majorant $\mid f^{(k)} \mid$ . . . 83
34.13 (*) Théorème de Darboux (avec le Th. des Accroissements finis) . . . 83
34.14 (*) Soit f telle que $fof(x) = a.x + b$, $a \neq 0$ (...) . . . 83
34.15 (*) Existence de fonctions C^∞ régularisante . . . 83

35 Compléments sur les Suites **84**
35.1 Cas $u_{n+1} = f(u_n)$, $f(x) = (1-x)^2$, $u_0 \in]0,1[$ intervalle de stabilité . . . 84
35.2 Limite de suites en lien avec des intégrales (...) . . . 84
35.3 Théorème de Césaro et lemme de l'escalier . . . 84
35.4 Des équivalents avec le théorème de Césaro (...) . . . 84
35.5 Comparaison des règles de Cauchy et D'Alembert sur les séries . . . 84
35.6 Suite bornée en lien avec la convexité (...) . . . 85
35.7 Approximation de nombres irrationnels . . . 85
35.8 (*) Equivalent avec le théorème de Césaro : généralisation . . . 85
35.9 (*) Soit $R_n = (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + ... + (\frac{n}{n})^n$. On cherche sa limite (...) . . . 85

36 Séries numériques **86**
36.1 Convergence d'une série avec un Développement Limité . . . 86
36.2 $x + ln(x) = n$ a une unique racine u_n. $\sum 1/u_n$, $\sum (-1)^n/u_n$ . . . 86
36.3 Convergence et somme de série (par télescopie) . . . 86
36.4 Nature de la série de terme général u_n (...) . . . 87
36.5 Somme d'une série et comparaison avec $1/n^\alpha$ . . . 87
36.6 (*) On suppose $\sum \frac{u_n}{n}$ convergente. Alors : $(\sum u_k)_{k \leqslant n}\ /n \to 0$ . . . 87
36.7 (*) Si (u_n) décroissante et série convergente, alors : $n.u_n \to 0$ . . . 87
36.8 (*) Calculs de somme de séries en lien avec des intégrales . . . 88
36.9 Montrer la formule d'Euler sur les nombres premiers p_n . . . 88
36.10 Série convergente/u_{n+1} équivalent à $u_n \geqslant 0$: $u_n = o(R_n)$ . . . 88
36.11 (*) Sur la formule de Stirling (avec diverses précisions ...) . . . 88
36.12 Accélération de convergence $\gamma = \sum u_n$, $u_n = \frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})$ . . . 88
36.13 Convergence et somme de la série $u_n = (-1)^n sin(n)/n$ 54.7 . . . 88
36.14 (*) Développement asymptotique d'une suite grâce aux séries . . . 89
36.15 (*) Si $u_n > 0$, étudier $\sum u_n/R_{n-1}^\alpha$ si $\sum u_n$ convergente, $\sum u_n/S_n^\alpha$ sinon . . . 89
36.16 (*) Somme avec les coefficients binômiaux. L'égalité : $\sum_{n \geqslant p} \frac{1}{C_n^p} = \frac{p}{p-1}$ . . . 89
36.17 (*) Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Trouver $a_i < i \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{p}{q} = \sum_{i \geqslant 2} \frac{a_i}{i!}$. Cas de $\frac{4}{7}$ . . . 89
36.18 (*) Un certain développement de $x \in]0,1]$ (...) . . . 89

37 Suites et Séries de fonctions **90**
37.1 Etude de la convergence simple et uniforme . . . 90
37.2 Suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $P(x)$ . . . 90
37.3 Est-on, ou non, dans un cas de convergence uniforme ? . . . 90
37.4 Echange de symboles : intégrale et somme de série . . . 90
37.5 Convergence uniforme mais pas "normale" . . . 90

38 Séries entières **91**
38.1 Le Lemme d'Abel. Des exemples . . . 91
38.2 Des calculs de rayons de convergence . . . 91
38.3 Convergence suivi d'un calcul de somme . . . 91
38.4 D.S.E. avec une équation différentielle . . . 91
38.5 D'autres calculs de rayon de convergence . . . 91
38.6 Une égalité en utilisant le produit de Cauchy . . . 91
38.7 Soit $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k.a_{n-k}\ ;\ S(x) = \sum a_n x^n \neq 39.4$ . . . 92
38.8 Utilisation d'une série entière pour une série numérique . . . 92
38.9 Autre façon d'obtenir certaines intégrales de Wallis . . . 92
38.10 Quelques développements en série entière (D.S.E.) . . . 92
38.11 Une série numérique avec le D.S.E. de la fonction exp . . . 92
38.12 Montrer que $f(x) = e^{x^2}.\int_0^x e^{-t^2}dt$ est D. S. E. (E.D.L.) . . . 93
38.13 Trouver $f(x) = \sum \frac{I_n}{n!}.x^n$ avec $I_n = \int_1^e ln^n(t).dt$ . . . 93
38.14 Trouver $f(x) = \sum a_n x^n$ avec $a_n = \int_0^{\pi/4} tan^n(t).dt$ . . . 93
38.15 Vérifier que $\frac{x.sin(a)}{x^2 - 2.x.cos(a) + 1} = \sum_{n\geqslant 1} x^n.sin(n.a)$, $\mid x \mid < 1$ . . . 93
38.16 Equivalent de la fonction : $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{n^2}$, en 1^- . . . 93
38.17 CNS pour avoir un DSE au voisinage de 0 . . . 93

39 Compléments sur les Séries entières **94**
39.1 Formules de Newton pour somme des puissances de racines . . . 94
39.2 (*) Un théorème sur le bord pour les séries entières (Abel) . . . 94
39.3 Un exemple de calcul sur le cercle de convergence (...) . . . 94
39.4 Quelques autres développements en série entière (...) . . . 95
39.5 (*) Calcul avec la transformation d'Abel 38.15 54.7 . . . 95

40 Equations différentielles **96**
40.1 (*) Résoudre $(1 + x^2)y" + x.y' - 4.y = 0$ avec $x = sh(t)$ . . . 96
40.2 Résoudre $(1 - x^2).y" - x.y' + y = 0$ si $\mid x \mid < 1$, $x = sin(t)$ . . . 96
40.3 (*) Au sujet de l'équation différentielle d'Euler (...) . . . 96
40.4 Diverses résolutions avec diverses indications (...) . . . 96
40.5 E.D.Linéaire du deuxième ordre, théorique (...) . . . 97
40.6 (*) E.D.L. du deuxième ordre, solution périodique (...) . . . 97
40.7 Solution bornée de $y" - \omega^2 y = f(x)$; f C^0, bornée sur $\mathbb{R}$, $\omega \neq 0$ . . . 97
40.8 Erreur dans la méthode de Newton (valeur approchée de racine) . . . 97
40.9 Equations diff. non linéaires mais qui s'y ramènent (...) . . . 97
40.10 Question très classique mais pas très facile (!) . . . 98
40.11 Sur la Transformation de Liouville (...) . . . 98
40.12 Diverses utilisations du Wronskien . . . 98
40.13 Equation différentielle et série . . . 98

41 Calcul d'Intégrales simples **99**
41.1 On montre que $\pi \notin \mathbb{Q}$, résultat d'abord prouvé par Lambert . . . 99
41.2 (*) Intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ obtenue par décomposition . . . 99
41.3 Des calculs d'intégrales conduisant à des intégrales généralisées . . . 99
41.4 $fC^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})$, σ subd. : $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{1}{n}\int_a^b f$. $\frac{1}{n}\sum f(x_k) \to \int_a^b f^2 / \int_a^b f$ . . . 100
41.5 (*) Quelques questions théoriques sur l'intégrale de Riemann . . . 100

42 Intégrales généralisées **101**
42.1 Le cours : à ne pas confondre (...) . . . 101
42.2 (*) Au sujet de la période du pendule simple . . . 101
42.3 (*) Période indépendante de l'amplitude (isochronisme) . . . 101
42.4 Existences et divers calculs d'intégrales généralisées (...) . . . 102
42.5 Intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ avec les intégrales de Wallis . . . 102
42.6 Une intégrale classique avec un D.S.E. : $\int_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt$ . . . 102
42.7 Une autre intégrale classique $\int_0^{\pi/2} ln(sin(t)).dt$ (...) . . . 102
42.8 Limite de série en lien avec une intégrale généralisée . . . 103
42.9 Existence et calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$ . . . 103
42.10 Avec une fonction intégrable (intégrale absolument convergente) . . . 103
42.11 Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec f^2 et $f"^2$ intégrables (...) . . . 103
42.12 Avec $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$: $\int_0^{+\infty} \frac{x}{sh(x)}.dx = \frac{\pi^2}{4}$ **(D.S.E.)** . . . 103
42.13 (*) Montrer que l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ de $f(x) = e^{-x.|sin(x)|}$ diverge . . . 103

43 Théorème de la "convergence dominée" **104**
43.1 Des exemples pour retenir ce théorème . . . 104
43.2 Des limites et des équivalents d'intégrales (...) . . . 104
43.3 Existence et Limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n.sin(t).dt}{t(1+n^2t^2)}$, $n \to +\infty$ . . . 104
43.4 Equivalent de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a.t}.dt}{\sqrt{t^2+1}}$, quand $a \to 0$ [réponse] . . . 104
43.5 Etude et équivalent de fonction. Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ (...) . . . 104
43.6 (*) Equivalent de fonction définie par une intégrale [réponse] . . . 104

44 Intégrales à paramètres **105**
44.1 Des résultats : rappelés et illustrés . . . 105
44.2 Pour $x > 1$, soit $f(x) = \int_0^{\pi} ln(x + cos(t)).dt$ (...) . . . 105
44.3 (*) Si f $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$: $U(x) = f(x)/x$, $U(0) = f'(0)$ C^∞ . . . 105
44.4 (*) Au sujet de la fonction : $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.ch(2.x.t).dt$ . . . 105
44.5 Etudier $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{Arctan(x.t).dt}{t.(1+t^2)}$, définie sur $\mathbb{R}$, impaire (...) . . . 106
44.6 (*) Avec $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t}.sin(t)}{t}.dt$, calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}.dt$ . . . 106
44.7 $f(x) = \int_0^{\pi} ln(x^2 - 2x.cos(t) + 1).dt$, intégrale de Poisson 39.5 . . . 106
44.8 Etudier : $g(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{ln(t)}.dt$ et $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{x^2+t^2}.dt$ . . . 106
44.9 (*) Intégrale généralisée calculée avec une série entière . . . 106

45 Compléments sur Espaces vectoriels ; Applications linéaires **107**
45.1 En dimension finie, des projecteurs associés (...) . . . 107
45.2 Endomorphismes qui commutent et sous e.v. stables . . . 107
45.3 Commutant d'un endomorphisme (cyclique) 48.3, 49.1 . . . 107
45.4 Endomorphisme nilpotent d'indice n en dim. n ; 45.3 . . . 107
45.5 Composition d'Applications Linéaires et étude du rang . . . 107
45.6 Les idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ sont $\{O\}$ et $\mathcal{L}(E)$, si $dim E$ finie . . . 107

46 Exercices sur les Matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **108**
46.1 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A+B=AB \Rightarrow AB=BA$ . . . 108
46.2 Inverse de matrices par blocs inversibles ! . . . 108
46.3 Un célèbre Théorème d'Hadamard [corrigé] . . . 108
46.4 (*) Projecteurs f, g non nuls : $fog-gof=\lambda.f+\mu.g$ . . . 108

47 Déterminants n x n (et Trace) **109**
47.1 Divers déterminants par blocs . . . 109
47.2 (*) Autres calculs de déterminants (C :Hurwitz) . . . 109
47.3 Trouver les matrices A, 3x3 : $\forall M,\ det(M+A)=det(M)$ . . . 109
47.4 Comparer les polynômes caractéristiques de AB_n et BA_p (...) . . . 109
47.5 Résultant de deux polynômes P et Q, $p=degr(P)$, $q=degr(Q)$ . . . 109
47.6 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si B de rang 1 : $det((A+B)(A-B)) \leqslant det^2(A)$ . . . 110
47.7 Déterminant et rang de la comatrice et ${}^t com[{}^t com(A)]$? . . . 110
47.8 Avec E_{ij} base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une forme linéaire . . . 110

48 Réduction des endomorphismes **111**
48.1 Des questions sur les matrices diagonalisables (dim. finie) . . . 111
48.2 $f : M=(C_1,...,C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M'=(C'_1,...,C'_n)$, $C'_i=\sum C_k - C_i$ . . . 111
48.3 Au sujet des endomorphismes cycliques ; les cas diagonalisables . . . 111
48.4 Endomorphisme nilpotent (d'indice quelconque) en dim. finie (...) . . . 112
48.5 Dans $E=C^0(\mathbb{R})$, éléments propres de la Transformation de Hardy . . . 112
48.6 $P \in E=\mathbb{R}_n[x] \mapsto u(P)=x(1-x)P'+n.x.P$: end. ? Eléments propres ? . . . 112
48.7 Polynôme annulateur, par ex. po-ca : Th. de Cayley-Hamilton 48.12 . . . 112
48.8 Soit f,g,h tels que : $f^p=\alpha^p.g+\beta^p.h$, $p=0,1,2$; $\alpha \neq \beta$ $(f^0=Id)$ . . . 113
48.9 Comment calculer $P(A)$, quand A est une matrice diagonalisable . . . 113
48.10 Si $a \neq b$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^2-(a+b)f+ab.Id=O$ est diagonalisable . . . 113
48.11 Sous espaces caractéristiques pour f "singulier" (non injectif) . . . 113
48.12 (*) Quelques résultats divers en compléments (parfois) . . . 113

49 Commutant, polyn. caractéristique, systèmes différentiels **114**
49.1 Dimension du commutant $\mathcal{C}(A)$ d'une matrice carrée A . . . 114
49.2 Formules de Newton et application au polyn. caractéristique . . . 114
49.3 Résoudre les divers systèmes différentiels suivants (...) . . . 114

50 Dualité -formes linéaires- en dimension finie -en général- **115**
50.1 Espace dual en dim. finie (sans flèche parfois sur les vecteurs) . . . 115
50.2 Avec : $\varphi_1,...\varphi_p$, $p \leqslant n$ formes linéaires en dimension n . . . 115
50.3 Changement de bases dans E^*. Un exemple en dim. 2 . . . 115
50.4 En dim. finies, transposée d'une A.L. et dualité ; rang . . . 115
50.5 Plan vectoriel invariant par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, avec ${}^t f$ . . . 115
50.6 Forme bilinéaire non dégénérée b, en dimensions finies $(E \equiv E^*)$ . . . 115
50.7 Formes b. symétriques sur E, $dim(E)$ finie (ex : relativité et 51.13) . . . 116
50.8 Formes b. sym. non dégénérées en dimension finie, $car(\mathbb{K}) \neq 2$: adjoint . . . 116
50.9 Réduction d'une 2è f.b.s. b_2 ayant une f.b.s.d.p. b : p.s. sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 52.3 . . . 116

51 E.v. préhilbertien réel (f.b.s.d.p.) E.v. euclidien (dim. finie) 117
51.1 (*) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ e.v.e. orienté . . . 117
51.2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ e.v.euclidien (orienté) . . . 117
51.3 Au sujet des similitudes vectorielles (...) . . . 117
51.4 Proj. orthogonal en dim. finie, norme de Frobénius 55.7 . . . 117
51.5 Droite des moindres carrés, minimiser $\sum(y_i - a.x_i - b)^2$ . . . 118
51.6 (**) Orthogonalité de polynômes et racines réelles (...) . . . 118
51.7 Cardinal d'une famille obtusangle, en dimension n (...) . . . 118
51.8 Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})n \geqslant 3$ contient N nilpotente, M inv. . . . 118
51.9 En utilisant f^* en question 1, et f^*of en question 2 (...) . . . 118
51.10 Calcul d'adjointe (existence non assurée en dim. infinie) . . . 118
51.11 Liens entre f et f^* dans E, e.v.euclidien (ou e.v.h. ...) . . . 119
51.12 Inégalité d'Hadamard et conséquences (cf. 52.2 pour fin) . . . 119
51.13 (*) Propriétés de l'orthogonal. Quelques contre-exemples . . . 119

52 Endomorphismes symétriques. Formes quadratiques. 120
52.1 Si A symétrique, positive, montrer : $det(A)^{1/n} \leqslant 1/n.Tr(A)$ . . . 120
52.2 (*) Diverses inégalités avec les matrices symétriques réelles . . . 120
52.3 Réduction, en simultané, d'une f.b.s.d.p. b et d'une f.b.s. b_2 . . . 121
52.4 (*) A, B sym., cas AB diag. sur $\mathbb{R}$ (en plus de $AB = BA \Leftrightarrow AB$ sym) . . . 121
52.5 Valeurs propres et vecteurs propres de X^tX (sym., sous e.p.$\perp$) . . . 121
52.6 Quand a-t-on deux projecteurs orthogonaux qui commutent ? . . . 121
52.7 (*) Question intéressante partant d'une base quelconque (...) . . . 121
52.8 Matrice et déterminant de Gram. Des calculs de distance (...) . . . 121
52.9 Avec ${}^tA$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $Ker({}^tA.A) = Ker(A)$, 51.11, 53.4, 55.7 . . . 122
52.10 Produit d'Hadamard. On pose ici $A * B = C$ où $c_{ij} = a_{ij}.b_{ij}$ (...) . . . 122
52.11 En e.v.e., si $f \in \mathcal{L}(E)$, $|||\ f\ |||_2 \leqslant 1$: $Ker(f - Id) = Ker(f^* - Id) \neq 53.4$ . . . 122
52.12 Paramétrisation de Cayley,exponentielle d'une matrice antisymétrique . . . 122

53 E.v. préhilbertien complexe 123
53.1 Forme sesquilinéaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Forme sesquil. hermitienne . . . 123
53.2 Cas particulier essentiel de produit scalaire hermitien. Ex. . . . 123
53.3 Au sujet des projections et des symétries orthogonales (...) . . . 124
53.4 Si f normal ($fof^* = f^*of$) en e.v.h. $Ker(f - \lambda.Id) = Ker(f^* - \overline{\lambda}Id)$ 124
53.5 Décomposition de Schur : trigonalisation unitaire. Conséquence . . . 124
53.6 Décomposition en Valeurs singulières sur un exemple (${}^tA.A$ ...) . . . 124
53.7 Pseudo inverse A^+ de $A_{n,p}$, en e.v.e. : éq. de Penrose (et autre ps-i) . . . 124

54 Séries de Fourier 125
54.1 Notations. Divers résultats généraux rappelés . . . 125
54.2 Théorème de convergence en moyenne quadratique . . . 125
54.3 Les Théorèmes de convergence ponctuelle (...) . . . 125
54.4 Exemple avec $f(x) = x$ sur $[0, \pi[$, f impaire 54.7 . . . 126
54.5 Exemple avec $f(x) = x$ sur $[0, \pi[$, mais ici, f paire . . . 126
54.6 Autres ex. et développement de $\frac{sin(\pi.t)}{\pi.t}$ en produit infini . . . 126
54.7 Quelques autres relations bien remarquables (...) . . . 126
54.8 Comment avoir f $\pi-$périodique ? cf. 54.1.3 (...) . . . 126
54.9 Pour une certaine série entière, on montre que $a_n \to 0$ 126
54.10 Développement en série de Fourier sans intégrales (série entière) . . . 127
54.11 Au sujet de l'inégalité de Wirtinger $\int_0^{2\pi} |\ f\ |^2\ (t).dt \leqslant \int_0^{2\pi} |\ f'\ |^2\ (t).dt$ . . . 127

55 Espace vectoriel normé (réel, de dimension finie souvent) 128
55.1 Topologie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et obtention de Théorèmes (connus) . . . 128
55.2 Topologie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, etc. Intérieur, Adhérence, Frontière (...) . . . 128
55.3 Convexité dans $\mathbb{R}^n$ par exemple. Si C convexe, adhérence, intérieur . . . 128
55.4 Suites et topologie en espaces métriques. Cf. aussi 'suites de Cauchy' . . . 129
55.5 Partie ni ouverte ni fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Image de fermé/ouvert ! . . . 129
55.6 Au sujet des diverses normes dans un espace vectoriel (...) . . . 129
55.7 (*) $X \mapsto A.X$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Norme subordonnée (...) . . . 130
55.8 Soit E de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$: $|||\ f^p\ |||$ bornée 52.11 . . . 130
55.9 Hyperplan non fermé en dimension infinie ; cas : H fermé . . . 130
55.10 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: montrer que $exp(A)$ est un polynôme en A . . . 130
55.11 Distance à une partie $A \neq \emptyset$, en e.v. normé E (...) . . . 130

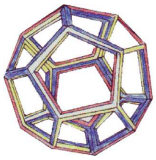
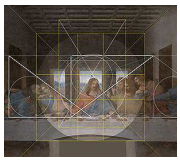
56 Courbes de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 131
56.1 Cas $\mathbb{R}^2$: centre de courbure, C.I.R., développante . . . 131
56.2 Courbes de $\mathbb{R}^2$: exercice sur les développantes . . . 132
56.3 Exemple de courbes de $\mathbb{R}^3$. Plan osculateur . . . 132
56.4 Courbure et Torsion pour les courbes de $\mathbb{R}^3$ . . . 132
56.5 Définition, caractérisation des hélices [corrigé] . . . 133
56.6 Courbe tracée sur une sphère ; une surface (...) . . . 134

57 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Continuité. Surfaces 135
57.1 Les quadriques ; cf. formes quadratiques . . . 135
57.2 Les cylindres (plus généralement) . . . 135
57.3 Les cônes (plus généralement) . . . 135
57.4 Les surfaces de révolution (...) . . . 135
57.5 Rappels au sujet du plan tangent (...) . . . 135
57.6 Position de la surface par rapport au plan tangent . . . 135

58 Surfaces particulières (*) 136
58.1 Surface réglée $M(u,v) = m(u) + vG(u)$, $G(u)$ vecteur ne s'annulant pas . . . 136
58.2 (*) Les surfaces réglées développables (dont cônes, cylindres ...) 59.5 . . . 136
58.3 Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche C^2 birégulière . . . 136
58.4 Cône et cylindre circonscrit à une surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ . . . 136
58.5 Equ. différentielle des lignes de niveaux ; et de plus grande pente . . . 137
58.6 De la formule de Laguerre au 1/2 plan de Poincaré 4.6, 29.11 . . . 137

59 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Dérivation. Extremum des f. numériques 138
59.1 Soit la conique d'équation $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 = 1$ (*) cf. 29.3 . . . 138
59.2 Chercher f C^1 : les normales à $z = f(x,y)$ rencontrent Oz . . . 138
59.3 Soit f de classe C^1 : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; question théorique (...) . . . 138
59.4 Des dérivées partielles mixtes : à comparer (...) . . . 138
59.5 Quelques équations aux dérivées partielles . . . 138

60 Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$: Intégration. Champs de vecteurs 139
60.1 Un calcul très astucieux avec une intégrale double . . . 139
60.2 Angle solide du carré $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant a$; $z = h$, vu de O . . . 139
60.3 Les intégrales de Fresnel calculées aussi grâce à une intégrale double . . . 139

Et encore L. de Vinci ici   **(nombre d'or...) et là**  **Fin.**