Lycée Etienne Mimard, Saint-Etienne

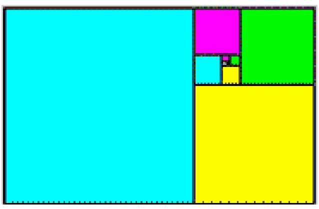
M+ Cours de Mathématiques Sup

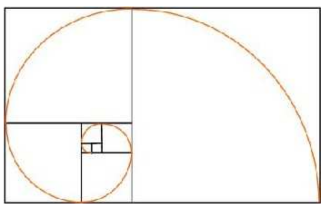
un chapitre 0 puis 33+10 chapitres. **Table des matières p. 297s.**

Le programme (avec "Informatique et Sciences du Numérique") **accentue le calcul fondamental.**

Exemple en lien avec le second degré : **le "nombre d'or" phi** (1,618) venant de Phidias (Parthénon)

Rectangles d'or emboités $\dfrac{L}{l} = \varphi$ Spirale d'or dans rectangle d'or Théatre d'Epidaure





en peinture, Vélasquez  et Léonard de Vinci  ... (cf. p.43)

A mes chers parents et famille, à Clément-Marie ;
à mes camarades, collègues et élèves.

M.Henri Chambon, 19 rue Saint-Joseph, Saint-Etienne.

Révisions en 2026

"Même pour le simple envol d'un papillon tout le ciel est nécessaire." Paul Claudel.

Exercices d'introduction (corrigés après)

1. **Simplifier la somme :** [1] $1+2+3+...+100$

2. **Simplifier aussi :** [2] $1+2+2^2+...+2^{63}$

3. **Résoudre l'inéquation :** $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{x-1}$

4. **Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme** x^3-1

5. **Factoriser aussi sur $\mathbb{R}$:** x^4+x^2+1

6. **Résoudre l'équation :** $sin(2x-\pi/3) = cos(3x+\pi/3)$

7. **. Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.**

   . Déduire que les hauteurs sont concourantes.

8. **Soit 2 points A et B situés du même côté d'une droite $\mathcal{D}$:**
   trouver $M \in \mathcal{D}$ tel que $AM+MB$ soit minimum.[3]

---

[1] **Question posée à Gauss, vers 6-7 ans, qui l'occupa peu de temps.**

[2] **Problème célèbre : 1 grain en case 1 ; 2 sur la 2è ; ... 2^{63} sur la 64ème du jeu d'échecs.**

[3] **C'est le trajet de la lumière, selon le principe optique de Fermat ; il contient les lois de Descartes.**

Chapitre 0

Les entiers. Vocabulaire, raisonnements

0.1 Ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

0.1.1 Raisonnement par récurrence

Déjà

Pour montrer une proposition dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, notée $P(n)$, il suffit de montrer
. que $P(0)$ est vraie [initialisation] et puis :
. si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie [hérédité].

0.1.2 Exemples

1. **A bien savoir et facile :** $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

. Si on initialise à 0, on convient qu'une somme vide est nulle. (Idem, un produit de 0 terme vaut 1).
Puis notons G_n le membre de gauche au rang n, D_n celui de droite.

. On a de plus : $G_{n+1} = G_n + (n+1) \underset{HR_n}{=} \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \; ... \; D_{n+1}$ (aisément !)

En fait il y a une **meilleure** démonstration : On écrit $S = n + (n-1) + ... + 2 + 1$
d'où par addition : $2.S = n$ paquets valant $(n+1)$ chacun. Fini.

2. **A bien savoir, essentiel : Pour** $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Par récurrence comme ci-dessus. Observer qu'il y a $(n+1)$ termes dans le menbre de gauche G_n.

Autre démonstration : Avec $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$, on a :
$q.S_n = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$. Donc $S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$. Fini.

Remarques 1) Si $q = 1$, le membre de gauche vaut : $n + 1$.

2) Un calcul à bien voir : $q + q^2 + ... + q^n = q(1 + ... + q^{n-1}) = q.\dfrac{1 - q^{(n-1)+1}}{1 - q}$.

3) **Exercice** : $n = 2$, $q = \dfrac{b}{a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$ $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

4) Enfin par exemple : $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3$. (La fraction vaut $1 + x + x^2$; cf. dérivée de $f(x) = x^3$ en 1)

3. Tout nombre dans $\mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ admet au moins un diviseur premier

Par récurrence **forte**. [à bien voir] . Déjà, le début est à 2 !
. Ensuite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n. Alors, soit $n+1$ est premier ; soit il admet un diviseur a avec $1 < a < n+1$; alors a admet un diviseur premier p, et p divise $n+1$. Fini.

Remarques. 1) Le résultat démontré va être utilisé juste après.

2) On peut montrer que $\forall n \geqslant 2$ s'écrit de manière unique comme produit de facteurs premiers.

0.2 Autres raisonnements

0.2.1 Par l'absurde. <u>Exemple</u> $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, ...\}$ ens. des nombres premiers, est infini

Sinon, on aurait $\mathbb{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...p_N\}$ fini ; considérons le nombre $1 + 2.3.5...p_N$: il n'est divisible ni par 2, ni 3, ni 5... ni par p_N, donc par aucun nombre premier ; impossible !

0.2.2 Par Analyse-Synthèse : (pour une $\Leftrightarrow$)

On examine un sens $\Rightarrow$ puis l'autre $\Leftarrow$

<u>Exemple</u>. Résoudre (1) $\sqrt{2-x} = x$. <u>Domaine : $x \leqslant 2$</u>.

- Analyse : Si x solution, en élevant au carré, forcément (2) $x^2 = 2 - x$; forcément $x \in \{1, -2\}$.
- Synthèse : Inversement, en reportant, une seule solution convient $x = 1$. [(1) $\not\Longleftarrow$ (2) !]

<u>Autre exemple plus significatif, plus tard</u> :

Toute application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une appl. paire et d'une impaire.

0.2.3 Contraposée : $p \Rightarrow q$ a même sens que l'implication Non $q \Rightarrow$ Non p, notée $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (c'est-à-dire : toutes deux vraies ou toutes deux fausses.)

<u>Exemple 1</u>. p=il fait beau ; q=je sors [réfléchir à ces 2 implications de même signification].

<u>Exemple 2</u>. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Il est plus commode de montrer la contraposée, à savoir : si n impair, alors n^2 impair.

Supposons n impair ou $n = 2k + 1$; alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair. Terminé.

0.2.4 Par Contre-exemple : (Exemple du contraire)

Un nombre premier est irréductible. Par analogie, on parle de polynôme irréductible.

Un polynôme strictement positif sur $\mathbb{R}$ est-il forcément irréductible ? non !

<u>Contre-exemple</u> : $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

0.3 Ensemble $\mathbb{Z} = \{... -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}$

0.3.1 Les deux opérations : $+$ et $.$

<u>Un mot sur chacune des 2 opérations</u> :

$2 - 7 = 2 + (-7)$, -7 étant le symétrique de 7. Et la règle des signes pour "**.**"

0.3.2 La notation n.$\mathbb{Z}$

$9.\mathbb{Z} = \{9.k, k \in \mathbb{Z}\}$. De même : $2.\mathbb{Z}$ signifie l'ensemble des entiers relatifs pairs.

0.3.3 La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

1. <u>Théorème</u> $\boxed{\text{Soit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*. \text{ Alors } \exists!(q, r) \text{ (quotient, reste) tels que } a = b.q + r \text{ avec } 0 \leqslant r <| b |.}$

   Démonstration laissée en exercice (sur $\mathbb{Z}$, on sème des grains espacés de $| b |$).

   Exemples : $22 = 7.3 + 1$ tandis que : $-22 = (-7).4 + 6$.

2. <u>Définition</u> $\boxed{\text{On dit que } b \text{ divise } a \text{ (noté } b/a) \text{ si } a = b = 0 \text{ ou si } b \neq 0 \text{ et } r = 0 \text{; ce qui est } a = b.q.}$

0.4 Ensembles généraux

0.4.1 Ensemble $\mathcal{P}(E)$= ensemble des parties de E

Exemple. Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c = E\}\}$: 8 parties.

En général $\boxed{\mid E \mid = n \Rightarrow \mid \mathcal{P}(E) \mid = 2^n.}$ En effet, par récurrence :

- Si $n = 0, E = \emptyset$ tandis que $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$: ensemble constitué d'une partie, la partie vide !
- Passage au rang $n+1$: Soit $E = \{x_1, x_2, ..., x_n, x\}$. Il y a les parties ne contenant pas x , au nombre de 2^n par hypothèse de récurrence à l'ordre n (HR_n) et celles contenant x ; mais ici, il y en a autant que de celles ne contenant pas x car on leur adjoint exactement x ! D'où $2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$.

0.4.2 Propriétés ($\overline{A}$ ou $C_E A$ étant le complémentaire de la partie A dans E)

On a :

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$ [dém. par double inclusion]
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et aussi $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ [lois de Morgan]
Associativité de $\cap$ et aussi associativité de $\cup$
Distributivité de $\cap / \cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et aussi de $\cup / \cap$.

Pour $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$: **.** Soit on fait un dessin en position générale appelé "diagramme de Wenn"
. Soit par double inclusion : si x est dans la partie Gauche, montrer qu'il est dans la Droite ; et vice-versa.

Définitions

On définit $A \backslash B$ par $A \backslash B = \{x : x \in A \; et \; x \notin B\} = A \cap \bar{B}$ [différence]
et $A \Delta B$ par $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ [différence symétrique].

La différence symétrique (correspondant au "ou" exclusif) est **associative :** le plus simple pour ceci est de faire un diagramme de Wenn. Et aussi $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ clairement.

0.4.3 Relation d'ordre

1. D'abord produit cartésien de 2 ensembles.

   Définition $\boxed{ExF \text{ est défini par } ExF = \{(x, y) / \ x \in E, y \in F\}.}$ Exemple :

   Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, alors ExF comprend 6 couples $(a, 1)$ $(a, 2)$ $(b, 1)(b, 2)$ $(c, 1)$ $(c, 2)$.
   Au passage : $\mid ExF \mid = \mid E \mid . \mid F \mid$

2. Relation

   Définition

Une relation R est définie par la donnée d'une partie G_R (comme graphe) de ExF par : si $x \in E$, $y \in F$, xRy si (exactement par définition) : $(x, y) \in G_R$.

   Ci-dessus :
   Si $G_R = \{(a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$, a n'est pas en relation avec 1 ; mais a est en relation avec 2.

3. Relation d'ordre

   Définition $\boxed{R \text{ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique, transitive. Ici } \underline{E = F}.}$

   Ce qui est : $\forall x \in$ E, xRx ; $(xRy$ et $yRx) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie) ; et $(xRy$ et $yRz) \Longrightarrow xRz$.

   Deux exemples (de relation R.A.T.)

   – Dans $\mathbb{R}$ la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre.

   – Dans $\mathcal{P}(E)$ la relation $\subset$ est une relation d'ordre. Par contre ici, on peut en général trouver 2 parties A et B telles que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$: on dit que l'ordre est partiel ; dans $\mathbb{R}$ il est dit total.
   (Une relation d'ordre sert à "ordonner" les éléments d'un ensemble).

0.4.4 Relation d'équivalence

1. Définition $\boxed{R \text{ est une relation d'équivalence si elle est : réflexive, symétrique, transitive (R.S.T.)}}$

   Symétrique signifiant : Si xRy alors forcément yRx. Explication de ces axiomes : cf. le théorème.

Exemple. Soit E l'ensemble des élèves d'une école ; et la relation R telle que aRb si a et b ont le même âge. C'est clairement une relation d'équivalence. Donnons une

Définition: En général, (ceci pour une relation d'équivalence notée parfois R.S.T.) on appelle classe de x, notée $\hat{x}$, l'ensemble des éléments en relation avec x : $\hat{x} = \{y \in E / xRy\}$

Dans notre exemple, il y aurait la classe des élèves 14ans ; celle des élèves de 15ans ; etc.
On voit que ces classes forment une "partition" de l'ensemble des élèves : une partition étant une famille de parties disjointes (non vides) dont la réunion est tout l'ensemble E.

2. Théorème (C'est un fait général) [4]

   Se donner une relation d'équivalence (R.S.T.) sur E, ou "une partition" de E, c'est pareil car Les classes d'équivalence forment toujours une partition de l'ensemble E.

3. Un exemple classique et important : les congruences dans $\mathbb{Z}$ (en lien avec l'arithmétique)

   La relation dans $\mathbb{Z}$: xRy si $x - y$ multiple de 9 $(x - y \in 9.\mathbb{Z})$ est R.S.T. (C'est facile).

   Il y a 9 classes d'équivalence : $\{9k\}, \{9k+1\}, ..., \{9k+8\}$ qui forment bien une partition de $\mathbb{Z}$.

0.5 Exercices corrigés

0.5.1 Médiatrices d'un triangle concourantes. Hauteurs concourantes

1. Médiatrices : On a $M \in$ Médiat$[A, B] \iff MA = MB$. Puis : $O \in$ Médiat$[A, B]$ et $[B, C]$ $\Rightarrow OA = OB$, $OB = OC$; donc $OA = OC$ d'où $O \in$ Médiat$[A, C]$; centre du cercle circonscrit !
2. Hauteurs : Faire directement les hauteurs est difficile. On le déduit des médiatrices concourantes, car en traçant par chaque sommet les parallèles aux côtés opposés, on s'aperçoit que les hauteurs du triangle initial sont les médiatrices d'un nouveau triangle ! Donc concourantes.

0.5.2 Bissectrices (intérieures et extérieures) concourantes

1. Bissectrices intérieures

   les bissectrices intérieures sont concourantes en I centre du cercle inscrit. De plus si S est la surface du triangle, r le rayon du cercle inscrit, p le demi-périmètre $2p = a + b + c$: $S = p.r$.

   La démonstration est facile et analogue au cas des médiatrices avec :
   $I \in$ Biss-int $(AB, AC) \iff$ dist(I, AB) = dist(I, AC).
   Car si $I \in$ Biss-int $BAC \cap$ Biss-int CBA, alors dist (I, AB)=dist(I, AC)=dist(I, BC). Ainsi I est sur la troisième bissectrice intérieure. Et avec IAB, IBC, ICA, on a aisément la relation $S = p.r$.

   De plus: Si la bissectrice issue de A coupe BC en A_1, alors : $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

   En effet, traçons la parallèle issue de C à (A, A_1), coupant (A, B) en D. Voyons que $AC = AD$: Facile avec des angles "alternes-internes " A_1AC, ACD et "correspondants" BAA_1, ADC égaux.

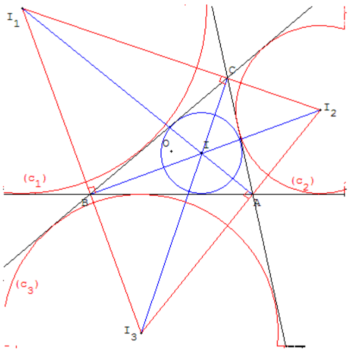
2. Bissectrices extérieures (Démonstration analogue au cas des bissectrices intérieures)

   La bissectrice intérieure de A et les 2 bissectrices extérieures de B et C sont concourantes en I_A centre d'un cercle ex-inscrit de rayon r_A ; et de même 2 autres cercles ex-inscrits.

   De plus: J et J_A étant les projections orthogonales de I et I_A sur (B, C) : $CJ = BJ_A = p - c$.

   (Pour $CJ = BJ_A$ seul, on peut dire $BCII_A$ sur un cercle de centre A^*, milieu de $\widehat{BC}$ et de II_A ...)

[4] (*) Démonstration facultative : Montrons que 2 classes distinctes sont disjointes par contraposée. Si $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$, soit $t \in \hat{y}$. On a xRz , yRz et yRt ; donc : xRz et zRy (symétrie) et yRt, d'où $\overline{xRt}$ (transitivité), soit : $t \in \hat{x}$. Ainsi $\hat{y} \subset \hat{x}$. De même (symétrie de l'hypothèse) $\hat{y} \subset \hat{x}$; soit $\hat{x} = \hat{y}$. Enfin, la réunion des classes disjointes donne E car $x \in \hat{x}$ (réflexivité).



En effet (difficile !)

. Notons K et L les projections orthogonales de I sur (C, A) et (A, B) ; et encore : $x = AL = AK, y = BL = BJ, z = CJ = CK$. Alors $x+y+z = p, x+y = AB = c$, d'où $z = p - c$.

. Notons $J_A = proj_\perp(I_A)$ sur $(B, C); Y = BJ_A$. En prenant 2 tangentes issues de A au cercle exinscrit, on a : $x+y+Y = x+z+a-Y$; comme $a = y+z$, on déduit : $Y = z$ ou $BJ_A = JC = p - c$.

3. **Les médianes** concourantes est une question affine qui ne dépend pas des angles : vue **plus tard.**

Résumé du ch.0

1. $\mathbb{N}$: ens. des entiers naturels. Raisonnement par récurrence [noter l'orthographe]. Ex. :

$\boxed{1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \exists p \in \mathbb{P}$ divisant n.

sans oublier $a^3 - b^3 = ...$ **provenant de (2) et $a^3 + b^3 = ...$**

Pour 1) et 2) il y a une démonstration bien meilleure qu'une récurrence ! 3) sert ensuite :

2. Autres raisonnements

1. Raisonnement par l'absurde : $\mathbb{P}$ est infini !
2. Raisonnement par Analyse/Synthèse. Montrer un sens $\Rightarrow$; puis l'autre $\Leftarrow$
3. Raisonnement par contraposée. Exemple : n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair (utile après.)
4. Contre-exemple. $x^4 + x^2 + 1$ factorisable sur $\mathbb{R}$, bien que sans racine réelle.

3. $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs

1. Opérations $+$ et $.$ avec la règle des signes.
2. La notation $n\mathbb{Z} = \{n.q,\ q \in \mathbb{Z}\}$. ($2.\mathbb{Z}$ ensemble des nombres pairs.)
3. Surtout la division euclidienne : on la retrouvera pour les polynômes.

4. Ensembles généraux

1. Ensemble des parties de E. $\mid E \mid = n \Rightarrow \mid \mathcal{P}(E) \mid = 2^n$.
2. Intersection, réunion, complémentaire : Dém. par double inclusion ; propriétés.
3. Relation définies par un "graphe" de ExF. Relation d'ordre : définition, exemples.
4. Relation d'équivalence : même chose qu'une partition de l'ensemble. (Des exercices corrigés)

Remarques (de logique) :

1) Depuis le début, on a donc beaucoup de "notions premières" : déjà la langue ! Et des axiomes : ainsi un énoncé est vrai ou faux (principe du tiers exclus) ; ou le célèbre "postulat d'Euclide" (d'un point pris hors d'une droite, on peut mener une et une seule parallèle à la droite).

2) Autre donnée : le programme ! cette nouvelle année scolaire du 3ème millénaire après Jésus-Christ.[5] Pour connaitre l'année au calendrier musulman, multiplier l'année par 0,97 (rapport de l'année lunaire à l'année solaire grégorienne) et ajouter 622 : pourquoi 622 ? Et qu'en est-il du calendrier juif ? (D'autres calendriers encore ; par ex. chinois ...)

---

[5] En 1800, Gauss –l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps– calcula par algorithme la date de Pâques ...

M+ **Exercices: Ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$. Raisonnements.** **PTSI**

---

1. (a) On pose $u_0 = 1, u_1 = 1+\dfrac{1}{1}$, $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{u_n}$; calculer u_{13} à la **calculatrice**. Limite ?

   (b) Pour $u_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, calculer u_{43} à la calculatrice. [On verra la limite au ch.28.]

---

2. (a) Simplifier la somme (preuve) : $S_n = 1+3+5+...+(2n+1)$.

   (b) Montrer que : $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (par récurrence, 1ère méthode).

   (c) (*) 2è méthode. Vérifier que $(1+h)^3 = 1+3.h+3.h^2+h^3$, puis faire la somme des cas où $h = 1, 2, ...n$. En déduire une forme simplifiée de : $S_2(n) = 1^2+2^2+...+n^2$.

   (d) Montrer par récurrence sur n que : $1^3+2^3+...+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ noté $S_3(n)$.

3. Sur un échiquier de 64 cases, on pose un grain de blé à la 1ère et on double à chaque case. Nombre total de grains ? (*) Nombre de milliers d'années de productions mondiales nécessaires ?

4. (a) et (b) : Montrer les deux équivalences :

   $(A\cap B = A\cap C$ et $A\cup B = A\cup C) \Leftrightarrow B = C$; $\quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C \Leftrightarrow A\subset C$.

   (c) Résoudre l'équation $A\cup X = B$ dans $\mathcal{P}(E)$. [Ind. Si $A\not\subset B$ ... si $A\subset B$ ... $|\mathcal{P}(A)|$ solutions.]

5. Concernant la définition de relation :

   (a) Si $\mathrm{Card}(E) = n$, combien peut-on définir de relations sur E ? (*) de relations réflexives ?

   (b) Si $E = \mathbb{R}$ montrer que $x\Re y$ si $sin(x) = sin(y)$ est une relation d'équivalence ; classe de $\pi/6$?

   Indication sur (a)1) ExE a n^2 éléments ; d'autre part, il y a autant de relations sur E que de parties de ExE (les graphes possibles). Celà donne $2^{(n^2)}$ relations. Attention $2^{(n^2)} \neq (2^n)^2 = 2^{2n}$.

6. (*) Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$. Montrer que $u_n \geqslant n-1$. (Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

   [Ind. par réc. $n\geqslant 2 \Rightarrow u_n \geqslant n-1$; départ : deux indices $n = 2$, $n = 3$, et si $n\geqslant 2$, $2n-1 \geqslant n+1$.]

7. **Constructions géométriques** :

   (a) A et B étant du même côté de la droite $\mathcal{D}$, trouver $M\in\mathcal{D}$ tel que $AM+MB$ soit minimum.
   Indications : Existence de M ? Unicité ? Construction si un et un seul trajet ?
   - La clé est de considérer le point A' symétrique orthogonal de A par rapport à $\mathcal{D}$.
   - A noter qu'il s'agit d'une trajectoire de lumière : angle d'incidence = angle de réflexion.

   (b) Idem, mais cette fois A et B sont de part et d'autre d'une rivière limitée par D et D' parallèles et traversée perpendiculairement. Indication : La clé est cette fois de translater la rivière ...

   (c) Etant donnés 2 droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et 2 points A et B , trouver $M\in\mathcal{D}$ et $M'\in\mathcal{D}'$ tels que A, B, M, M' soit un parallélogramme. Discuter. [La clé est de considérer une translation]

   (d) Etant donné un point A et 2 droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, trouver $M\in\mathcal{D}$ et $M'\in\mathcal{D}'$ tels que AMM' soit équilatéral. Discuter. [La clé est de considérer ici une rotation d'angle 60^o]

   (e) Etant donné un triangle A, B, C trouver $M\in(A,B)$; $N\in(A,C)$; $P, Q\in(B,C)$ tels que $MNPQ$ soit carré. (On peut supposer B et C aigus). [Cette fois, homothétie de centre A !]

Chapitre 1

Les nombres réels. Equat. et inéquations

1.1 Ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels

1.1.1 $\mathbb{Q}$, avec les opérations $+$, .

$\boxed{\text{D'abord}}$ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$. $\boxed{\text{Ensuite}}$ on a $r, r' \in \mathbb{Q} \Longrightarrow r + r' \in \mathbb{Q}$ et $r.r' \in \mathbb{Q}$.

Exemples : $0,33 = \dfrac{33}{100} \in \mathbb{Q}$ $\quad 0,333... = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ 0,999...=1=1,000... $\in \mathbb{Q}$ (cf. après)
(Ainsi certains nombres ont deux développements décimaux)

$\boxed{\text{Exercice}}$ Montrer que $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ admet un développement décimal} \\ \text{périodique à partir d'un certain rang.} \end{cases}$

Preuve sur des exemples (pour une bonne compréhension) :

$\Rightarrow$ $x = 22/7$ a un développement décimal périodique de période de longueur au plus 6. C'est obligatoire ; pourquoi sans calcul ? (Car les restes sont dans $\{0, ...6\}$: répétition !)

$\Leftarrow$ $x = 13,0519171917...$ rationnel car : $x = 13,05 + 10^{-2}y$ où $10000y = 1917 + y$! donc $y \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Q}$.
(On peut achever le calcul et trouver une fraction représentative ; sauf erreur $\dfrac{362517}{27775}$.)

1.1.2 On montre que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ fraction irréductible. On a : $a^2 = 2.b^2$ donc a^2 est pair ; celà entraine a pair (cf. contraposée). Posant alors $a = 2k, k$ entier, on arrive à $b^2 = 2k^2$; donc aussi b pair : impossible.
et donc : $\sqrt{2}$ a donc un développement décimal non périodique, même à partir d'un certain rang.

Les réels : $\boxed{\text{On va considérer l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels : nombres ayant au moins un développement décimal périodique ou non, même à partir d'un certain rang : } \sqrt{2} \in \mathbb{R}.}$

$\boxed{\text{Exercice}}$ Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer : $s \notin \mathbb{Q} \Rightarrow r + s \notin \mathbb{Q}$. (Donc $\sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Q}$)
(Contraposée : On a $r + s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s = (r + s) - r \in \mathbb{Q}$ **par différence !**)

1.1.3 Avec des racines cubiques : $a = \sqrt[3]{9 + 4.\ \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4.\ \sqrt{5}} \in \mathbb{N}$

On suppose connu que $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ ou bien : $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$
et que $\sqrt[3]{\alpha.\beta} = \sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\beta}$. Alors, en élevant au cube, a (notation : $a = u + v$) est solution de $x^3 = 18 + 3.x$; mais $x^3 - 3.x - 18 = (x - 3)(x^2 + \lambda.x + 6)$, avec $\lambda = 3$ aisément.
D'où un trinôme avec $\Delta < 0$; donc 3 est la **seule** racine réelle et, par suite, forcément : $a = 3$.

1.2 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.2.1 $\mathbb{R},+,.$ Vocabulaire non à savoir

1. $\mathbb{R}$ **a été défini** comme l'ensemble des nombres ayant au moins une écriture décimale.

2. **2 opérations reliées**

   $+$ est interne dans $\mathbb{R}$ $(x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R})$, et $\left\{\begin{array}{c} + \text{ est Commutative } \ x+y=y+x \\ \text{Associative } \ (x+y)+z=x+(y+z) \\ 0 \text{ est Neutre pour } + \\ \text{Enfin tout élément a un symétrique pour } + \end{array}\right.$

   [Pour le moment, on dit que $(\mathbb{R},+)$ est un "groupe" commutatif (ou abélien).]

   $.$ est interne, et $\left\{\begin{array}{c} \text{Commutative} \\ \text{Associative} \\ 1 \text{ est Neutre pour } . \end{array}\right.$ avec de plus :

   Les deux opérations $+$ et $.$ sont reliées par la Distributivité : $a.(b+c)=a.b+a.c$.

   [On résume ici en disant, pour le moment : "anneau commutatif" ($.$ commutative)].

   $\boxed{\text{Mais on a mieux}}$ $(\mathbb{R},+,.)$ **est un "corps" commutatif** car, en plus "d'anneau" :

   Tout élément non nul est inversible pour la multiplication : "$.$"

   Remarques 1) $(\mathbb{Q},+,.)$ est aussi un corps commutatif. Comment le distinguer de $\mathbb{R}$? après

   2) $(\mathbb{C},+,.)$ est aussi un corps commutatif. Voici de suite une distinction entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

3. $\mathbb{R}$ est "un corps **ordonné**" : " $\leq$ " est une relation d'ordre (ch.0) **compatible**

   avec $+$ et $.$ par $\lambda \geqslant 0$: $x \leqslant y \Rightarrow z+x \leqslant z+y$ et : $x \leqslant y$, $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda.x \leqslant \lambda.y$.

   $\boxed{\text{Alors que sur } \mathbb{C}\text{, pas d'ordre compatible avec les opérations. } \textbf{Dire } "z \geqslant 0" \textbf{ est une FAUTE.}}$

   (On a l'ordre lexicographique –du dictionnaire– sur $\mathbb{C}$; mais non compatible avec les opérations).

1.2.2 Définitions capitales

1. $\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } A \subset \mathbb{R}\text{. On dit que } A \text{ est majorée (par } M \in \mathbb{R}) \text{ si } \forall x \in A,\ x \leqslant M\text{ ; } M \text{ est } \textbf{un} \text{ majorant.} \\ M \text{ est dit le maximum de } A \text{ si de plus } M \in A\text{ ; et analogue pour minorant et minimum.} \\ \text{Enfin } \beta \text{ est } \textbf{la borne supérieure} \text{ de } A\text{, notée } sup(A)\text{, si } \beta \text{ est le plus petit majorant de } A. \end{array}}$

   Exemples
   1) $A=\mathbb{N}$ n'est pas majorée ; on note $sup(A)=+\infty$.
   2) $A=[0,\pi[$: 7 est un majorant ; π aussi. Pas de maximum, ici ! $sup(A)=\pi \notin A$.
   3) $A=\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est majorée par 1 ; qui est le maximum. Et :
   A est minorée par 0 ; mais pas de minimum : $inf(A)=0 \notin A$ (inf est le plus grand minorant).

2. Propriété qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, donc fondamentale (dite de "la borne supérieure") (ceci est lié à la définition de $\mathbb{R}$) : $\boxed{\text{Toute partie non vide, majorée de } \mathbb{R} \textbf{ admet} \text{ une borne supérieure dans } \mathbb{R}.}$

   Ceci est **faux pour $\mathbb{Q}$:** Si $B=\{r \in \mathbb{Q}$ tels que $r^2 \leqslant 2\}$, $sup(B)=\sqrt{2}$: n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

   Conséquence : $\boxed{\text{Toute partie non vide, minorée, possède une borne inférieure dans } \mathbb{R}.}$

   (Par symétrie /O, la borne inférieure étant le plus grand minorant.)

1.2.3 La droite numérique

1. On représente $\mathbb{R}$ par une droite orientée munie d'une unité ; nombres et points se correspondent.

2. Valeur absolue, définition. $\mid X \mid = X$ si $X \geqslant 0$ et $\mid X \mid = -X$ si $X \leqslant 0$. $\mid 4 \mid = \mid -4 \mid = 4$.

   Exemple : $\mid 1-2x \mid = 2x-1$, si $x \geqslant 1/2$; $1-2x$, sinon.

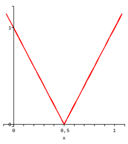
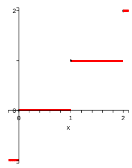
   Noter que : $\mid x - x_0 \mid < r \;\Leftrightarrow\; x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ **car** $\mid x - a \mid =$**distance**(x,a).

   Propriétés $\mid x + y \mid \leqslant \mid x \mid + \mid y \mid$. **D'où :** $\big|\, \mid x \mid - \mid y \mid \,\big| \leqslant \mid x + y \mid \leqslant \mid x \mid + \mid y \mid$.

   Démonstration
   1) Le plus simple est d'élever au carré (équivalence dans $\mathbb{R}^+$) et $x.y \leqslant \mid x \mid . \mid y \mid$
   2) **A RETENIR (ce sera pareil sur $\mathbb{C}$)** :
   On a : $x = (x+y) + (-y)$; d'où $\mid x \mid \leqslant \mid x + y \mid + \mid (-y) \mid$ donc $\mid x \mid - \mid y \mid \leqslant \mid x + y \mid$;
   et on permutte ensuite x et y. Fini.
   3) Remarque. En échangeant y en $-y$: $\big|\, \mid x \mid - \mid y \mid \,\big| \leqslant \mid x - y \mid \leqslant \mid x \mid + \mid y \mid$.

3. Approximation par des rationnels.
   Propriété Entre 2 réels $a < b$, il y a toujours un rationnel dans $]a, b[$; donc une infinité.
   Démonstration. Il suffit de traiter le cas $0 \leqslant a < b$ (sinon, on s'y ramène aisément).
   On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < b - a$: on fixe un tel n. [L'idée est de "semer" des nombres $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$ sur la droite] On considère alors l'ensemble FINI $\{\, k : \frac{k}{n} < b \}$; soit p son maximum ; alors p/n convient : il reste à voir que $p/n > a$; laissé en exercice avec $1/n < b - a$.

   Remarques
   1) Etant donné un réel x, il existe donc une suite de rationnels (même croissante) qui tend vers x.
   2) On prend parfois des rationnels particuliers : les décimaux $\{k/10^n,\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$.
   3) Dans $]a, b[$, $a < b$, on a toujours aussi un irrationnel. $r \in]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$: $r + \sqrt{2}$ convient !

Graphe de $x \mapsto \mid 2.x - 1 \mid$:  et de $x \mapsto E(x)$: 

1.2.4 Partie entière d'un réel

1. Définition $E(x)$ ou $[x]$ désigne l'entier le plus près à gauche de x. $x = E(x) + f,\ 0 \leqslant f < 1$.

2. Exercices 1) Courbe de $x \mapsto E(x)$ $[E(x+1) = E(x) + 1]$ 2) de $x \mapsto E(1/x)$ si $x > 0$.

1.3 Opérations avec les exposants rationnels

1.3.1 Les étapes pour $x^r, r \in \mathbb{Q}$.

1. Cas $r \in \mathbb{N}$.
   x^2, x^3, ... sont connus. Avec $x^0 = 1$ on a $x^{m+n} = x^m.x^n$; $x^{m.n} = (x^m)^n$; $(x.y)^n = x^n.y^n$

2. Cas $r \in \mathbb{Z}^-$. Pour étendre la 1ère relation, on doit poser $x^{-1} = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
   Alors : $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ noté x^{-n} et les 3 relations s'étendent (à voir).

3. $x^{1/n}$?
   $\underline{n=2}$: $y = x^{1/2} \Leftrightarrow \{y \geqslant 0 \text{ et } y^2 = x\}$, soit $y = \sqrt{x}$, $\underline{x \geqslant 0}$.
   $\underline{n=3}$: $y = x^{1/3} \Leftrightarrow \{y^3 = x\}$, soit $y = \sqrt[3]{x}$, $\underline{x \in \mathbb{R}}$.
   Le cas n pair : comme 1) ; n impair : comme 2).

4. x^r ? On prend $\underline{x > 0}$ sinon comparer $(-5)^1, [(-5)^2]^{1/2}, [(-5)^{1/2}]^2$ qui n'existe pas sur $\mathbb{R}$.
   Ensuite :
   1ère chose : on s'assure que $(x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ noté $x^{p/q}$ (1).
   2ème chose : on s'assure que si $p/q = p'/q'$ alors $x^{p/q} = x^{p'/q'}$ noté x^r (2).
   Enfin, avec ceci, on vérifie que les trois relations s'étendent. [laissé en exercice]

   Démonstrations de 1) et 2). Désignons par G et D les membres de gauche et droite :
   1) On a $G^q = x^p$ par définition et $D^q = [(x^{1/q})^p]^q = [(x^{1/q})^q]^p = [x]^p$ d'après les étapes 1) 2) 3).
   Comme G et D sont positifs, ils sont égaux.
   2) De même, on vérifie que $G^{qq'} = D^{qq'}$ et G et D sont positifs : ils sont égaux.

1.3.2 Exemples

1. Attention $\boxed{\sqrt{x^2} = \mid x \mid \quad !}$

2. Simplifier la quantité : $y = \sqrt[5]{8.x^3.\sqrt[3]{2x^{-4}}}$. Trouver $y = \sqrt[3]{4.x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

1.3.3 Remarque

Et pour un exposant irrationnel : $10^{\sqrt{2}}$? Réponse : on passe par les ln, exp :
$\boxed{a^b = e^{b.ln(a)}, a > 0.}$ Noter aussi que $\underline{ln(x^2) = 2.ln \mid x \mid \text{ sur } \mathbb{R}^*}$.

1.4 Equations usuelles

1.4.1 Algébriques

1. Définition : $\boxed{\text{Une équation du type } P(x) = 0, \text{ avec } P \text{ polynôme est dite algébrique.}}$

2. Le second degré : $a.x^2 + b.x + c = a(x - z_1)(x - z_2)$. En développant et en identifiant :
   La somme des racines de $a.x^2 + b.x + c = 0$ vaut $\dfrac{-b}{a}$, et leur produit vaut $\dfrac{c}{a}$.
   Cas de $x^2 - 3x - 4 = 0$. -1 est racine ; l'autre vaut donc $+4$, avec le produit.

3. Inversement z_1 et z_2 sont racines de $(x - z_1)(x - z_2) = 0$; on note $s = z_1 + z_2$, $p = z_1.z_2$; alors
   $\boxed{\text{Connaissant la somme } s \text{ et le produit } p \text{ de deux nombres, ils sont solution de } x^2 - s.x + p = 0.}$

1.4.2 Irrationnelles

1. $\boxed{\text{Une équation irrationnelle comporte un ou plusieurs radicaux, en général.}}$

2. Exemple. Résoudre $\sqrt{x+1} = x - 1$. $\boxed{\text{Le domaine est } x \geqslant -1 \text{ ; il ne faudra pas l'oublier ...}}$
   – Ensuite Première façon : on procède par implications. Forcément sur D, $x + 1 = x^2 - 2x + 1$ ou $x^2 - 3x = 0$; forcément $x \in \{0, 3\}$. **Mais** on étudie la réciproque ! Solution unique : $\underline{x = 3}$.
   – Deuxième façon : procèder par **équivalences** (ce qui exige plus de soin). Vérifier sur D que :
   $\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \left(x + 1 = x^2 - 2x + 1 \ \boxed{\text{et}} \ x - 1 \geqslant 0\right)$. Etc. Même réponse.

1.5 Inéquations

1.5.1 Algébriques

1. On peut faire l'étude de la fonction : $x \mapsto f(x)$ (pour savoir signe et racines).
   $\boxed{\text{Exemple}}$ $x > 0 \Rightarrow f(x) = x + 1/x \geqslant 2$ par étude de f sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, soit on a 2 racines réelles, soit 1, soit 0 :
   Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, $\boxed{a \neq 0}$ est celui de "a" à l'extérieur des racines.
   - Si pas de racines réelles, **considérer qu'on est toujours à l'extérieur**.
   - La courbe représentative est une parabole (tournée vers le haut $\Longleftrightarrow a > 0$).

1.5.2 Irrationnelles

1. Attention : $a \leqslant b \not\Rightarrow a^2 \leqslant b^2$ mais $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$
   Et aussi : $a^2 \leqslant b^2 \not\Rightarrow a \leqslant b$ mais $a^2 \leqslant b^2 \Rightarrow |a| \leqslant |b|$.
2. **Exemple** $\sqrt{P(x)} \leqslant Q(x)$. Résoudre l'inéquation (1) $\sqrt{x+1} < x - 1$.
   $\boxed{\text{Domaine } \mathcal{D} : x \geqslant -1.}$ Puis sur $\mathcal{D}$: $x - 1$ obligatoirement positif : $x \geqslant 1$.
   On peut donc élever au carré ; et on a même une équivalence :
   (1) $\Longleftrightarrow x + 1 < x^2 - 2x + 1$, $x \geqslant 1$. D'où : $x^2 - 3x > 0$, $x \geqslant 1$, $x \geqslant -1$. Solutions : $]3, +\infty[$.
3. **Exemple différent** $Q(x) \leqslant \sqrt{P(x)}$. Résoudre (2) $x - 1 \leqslant \sqrt{x+1}$.
   $\boxed{\text{Domaine } \mathcal{D} : x \geqslant -1.}$ Mais ensuite, **on va ici étudier deux "tiroirs" :**
   Cas $x - 1 < 0$: on **ne peut pas** élever au carré ; c'est heureusement **inutile**. $[-1, 1[$ solutions.
   Cas : $x \geqslant 1$: (2) $\Longleftrightarrow x^2 - 3x \leqslant 0$; donc $[1, +\infty[\cap[0, 3] = [1, 3]$. Toutes les solutions : $[-1, 3]$.

1.5.3 (*) En compléments : deux exercices corrigés

1. Inéquation avec paramètre : discussion. Résoudre : $|x| \leqslant x + a$.
   - Le domaine de définition de chaque terme est $\mathbb{R}$. Mais il faut déjà que $x + a \geqslant 0$, $x \geqslant -a$.
   - Sur $[-a, +\infty[$, l'inéquation équivaut à $x^2 \leqslant x^2 + 2a.x + a^2$ ou à : $-2.a.x \leqslant a^2$. Donc :

   si $a < 0$ $(-2a > 0)$ on obtient : $x \leqslant \dfrac{a^2}{-2a} = \dfrac{-a}{2}$: Ici $\dfrac{-a}{2} < -a$. $\boxed{\text{Pas de solution si } a < 0}$

   Et si $a \geqslant 0$ $(-2a < 0)$ $x \geqslant \dfrac{a^2}{-2a} = \dfrac{-a}{2}$: Ici $\dfrac{-a}{2} > -a$. Solutions : $[\dfrac{-a}{2}, +\infty[$ si $a \geqslant 0$.

   Bien sûr l'inéquation a une interprétation géométrique confirmant notre réponse.

2. Résoudre $\sqrt{x} + (x+1) = \sqrt{x+2}$ (1) sur le Domaine $x \geqslant 0$.
   On a (1) $\Rightarrow x^2 + 2x - 1 = -2(x+1).\sqrt{x}$ (2) en élevant au carré.
   et (2) $\Rightarrow x^4 - 6x^2 - 8x + 1 = 0$ (3) en élevant encore au carré.
   Etudiant $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 1$, on voit que f, décroissante sur [0,2] puis croissante, admet une racine a sur $[0, 1]$ et une autre b sur $[2, 3]$. A ce stade on sait que (1) a au plus 2 solutions !

   - Etudions la réciproque de (2) $\Rightarrow$ (3). Les solutions de (2) sont exactement celles de (3) telles que $x^2 + 2x - 1 < 0$ (car $A^2 = B^2 \Rightarrow -|A| = -|B|$). Soit $c = \sqrt{2} - 1$, on a $f(c) = 8 - 8.\sqrt{2} < 0$ d'où : $c \in]a, b[$. Pour avoir $x^2 + 2x - 1 < 0$ on doit être à gauche de c ; b est donc exclue.
   - Etudions la réciproque de (1) $\Rightarrow$ (2). Ici, équivalence car les 2 membres de (1) étant positifs !

   En résumé une et une seule solution : la racine a de $f(x)$ qui est dans $]0, \sqrt{2} - 1[$.

M+ **Exercices: Les nombres Réels. Equations, Inéquations.** **PTSI**

---

1. Sachant que 2,7< e <2,8 ; puis 1, 7<$\sqrt{3}$ <1,8 ; enfin 3,1< π <3,2 : majorer $\frac{\pi-\sqrt{3}}{e}$ (positif).
   Tout étant positif, pour majorer N/D, on majore N et on minore D. Idem pour majorer $a-b$.
   Autre règle pratique : on ne majore qu'en valeur absolue ; ou alors attention aux signes !

2. (a) Rappeler **une factorisation** de a^3-b^3 ; Puis de a^3+b^3.
   (b) A ne pas confondre avec $(a+b)^3$: développer cette expression. Cas de $(a-b)^3$?

3. (a) Montrer que $x=13,0519171917...$ est un rationnel à explisciter sous forme de fraction.
   (b) Simplifier la quantité $y=\sqrt[5]{8.x^3.\sqrt[3]{2x^{-4}}}$. (**Trouver** $\frac{362517}{27775}$ et $\sqrt[3]{4x}$ si $x\neq 0$)

4. Equations, Inéquations
   (a) Résoudre l'inéquation $|\,x-1\,|+2.\,|\,x+1\,|\leqslant 3\,|\,x\,|$ selon divers intervalles de $\mathbb{R}$.
   (b) (*) Résoudre $|\,x-y\,|+|\,x+y\,|=4$ en dessinant les points solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$.
   [D'abord le cas : $x-y\geqslant 0$ et $x+y\geqslant 0$, qui correspond –à voir– à 1/4 de plan].
   (c) Résoudre les inéquations en x : $x+a+2a(x-1)<0$; et (d) $ax^2-(a+1)x+1\geqslant 0$.

5. Quantificateurs (juste la définition)
   (a) Que dire de $x\in\mathbb{R}$ si : $\forall\varepsilon>0,\ |\,x\,|<\varepsilon$?
   (b) Soit A $\subset\mathbb{R}$. Que dire de $\beta\in\mathbb{R}$ si : $(\forall x\in A,\ x\leqslant\beta$ et aussi $\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in A\ :\ x>\beta-\varepsilon)$?

6. Une inégalité
   (a) Montrer que : $\forall\, x>0\ :\ x+\ 1/x\ \geqslant\ 2$
   (b) En déduire, pour a_k dans $\mathbb{R}^{+*}$, que : $(a_1+a_2...+a_n)(1/a_1+1/a_2+...+1/a_n)\ \geqslant\ n^2$.

7. Graphes de :
   (a) $y=E(x)$ (partie entière) (b) (*) $y=E(1/x),\ x>0$ (c) (*) $y=x.E(1/x),\ x>0$.

8. Bornes supérieures et inférieures des parties suivantes (savoir la définition)
   (a) $\{(-1)^n+1/n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$
   (b) (*) $\{|\,a+b.\sqrt{2}\,|\,;\,a,b\in\mathbb{Z}$ et $(a,b)\neq(0{,}0)\}$. [Admis : $(\sqrt{2}-1)^n=a_n+b_n.\sqrt{2},\ a_n,\ b_n\in\mathbb{Z}$]

9. Questions diverses sur les réels (*)
   (a) Montrer que : $0\leqslant E(2x)-2E(x)\leqslant 1$; et que : $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)\ \ n\in\mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que le nombre réel : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
   (c) Montrer que : $\sqrt[3]{7+5.\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5.\sqrt{2}}$ est rationnel.

10. (a) Résoudre : (*) $|\,x\,|\leqslant x+a$. Discuter.
    (b) Résoudre : (*) $\sqrt{x}+(x+1)=\sqrt{x+2}$

Chapitre 2

Le second degré. $x \to ax^2 + bx + c, \ \dfrac{ax+b}{cx+d} \dots$

2.1 Paraboles

2.1.1 Paraboles d'axe $//\ Oy$: $x \mapsto a.x^2 + b.x + c, \quad a \neq 0$.

1. Parabole que l'on peut construire avec la dérivée

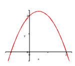
   La dérivée s'annule pour $x = \dfrac{-b}{2a}$. Avec $\boxed{a.x^2 + b.x + c = a.(x - z_1)(x - z_2)}$ on déduit :
   $\boxed{z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a},\ z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}}$ donc : $\boxed{\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{-b}{2a} \text{ est le milieu des racines (réelles ou non).}}$

2. Qu'on peut aussi construire sans la dérivée :

   Exemple $\quad y = -x^2 + x + 2$, **par translation de repère :** $\boxed{X = x - x_0, \quad Y = y - y_0 \ !}$

   On écrit la "forme canonique" $y = -(x^2 - x - 2) = -[(x - \frac{1}{2})^2 - 2 - \frac{1}{4}] = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$.

   Donc si on pose $\left\{ \begin{array}{l} X = x - 1/2 \\ Y = y - 9/4 \end{array} \right.$ [nouvelle origine $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$], on a : $Y = -X^2$. Aisé.

   Tracé  et vérifications : point $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 2 \end{pmatrix}$; racines : -1 et (donc) $+2$.

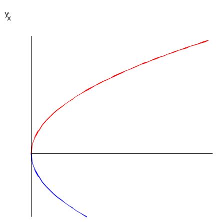
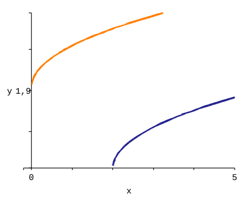
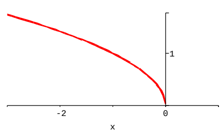
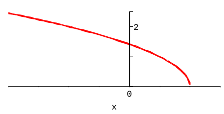
2.1.2 $x \mapsto \sqrt{x} = f(x)$: Demi-parabole d'axe Ox

1. La courbe :

   (a) On rappelle que $\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$. Tracé ci-dessous.

   (b) En réalité : $y = \sqrt{x} \Longrightarrow y^2 = x$, demi-parabole ; l'autre moitié : $y = -\sqrt{x}$ (dessous).

   Remarque : Les notations sont parfois $y^2 = 2px$.

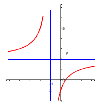
   

2. Cas : $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$, $\quad x \longmapsto \sqrt{x - 2}$, $\quad x \longmapsto \sqrt{x} + 2$; $\quad x \longmapsto \sqrt{-x} \quad$ et $\quad x \longmapsto \sqrt{2 - x}$.

2.2 Hyperboles

2.2.1 Hyperboles équilatères : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$.

1. Un cas traité : $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ sans nécessité de dériver.

   Divisant $2x-1$ par $x+1$ on a : $y = 2 - \dfrac{3}{x+1}$; $\left\{ \begin{array}{l} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{array} \right.$ translation de repère ... qui conduit à : $Y = -3/X$. Tracé  et vérifications ...
   (en particulier, les intersections avec les axes !)

2. Cas général : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$

   Hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes : donc orthogonales : on dit hyperbole "équilatère".

2.2.2 Cas : $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$: hyperbole avec asymptote oblique

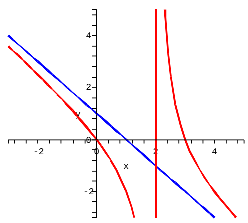
1. Exemple. $y = \dfrac{-x^2+3x}{x-2} = -x+1+\dfrac{2}{x-2}$ **en divisant** $-x^2+3x = (x-2)(-x+1)+2$

   Sur la deuxième expression, la dérivée est facile et ici : $y' = -1 - \dfrac{2}{(x-2)^2} > 0$ pour $x \neq 2$.

   2 asymptotes : $\boxed{x = 2 \text{ verticale}}$ et $\boxed{y = -x+1 : \text{ asymptote oblique}}$ **car**

Une droite $y_D = a.x + b$ est **asymptote** à une courbe $y_C = f(x)$ si on a : $y_C - y_D \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans le cas **d'asymptote oblique,** on a : $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} (\neq 0)$; puis $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - a.x$.
Enfin si on peut, on cherche à savoir si c'est b^+ ou b^- ou si $y - (a.x+b)$ tend vers 0^+ ou 0^-.

   Dans notre cas $y - (-x+1) = \dfrac{2}{x-2}$ est, de plus, de signe connu $[0^+$ en $+\infty$; 0^- en $-\infty]$: courbe

   au dessus en $+\infty$ de l'asymptote ; en dessous en $-\infty$; passe par O... tangente ?

2. Note : Si $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $d \neq 0$, numérateur $\neq 0$, on a : $(dx+e).y = ax^2+bx+c$; une "conique" car :

   Définition

On appelle conique toute courbe d'équation de degré 2 : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en repère orthonormé ou non.

   Hors programme $\boxed{\text{Sauf cas dégénérés, une conique est une parabole, une ellipse ou une hyperbole.}}$

   (Cas dégénérés :
   $\emptyset$ $y^2 = -1$; point $x^2 + y^2 = 0$; droite double $y^2 = 0$, 2 droites parallèles $y^2 = 1$ ou sécantes $y^2 = x^2$.)

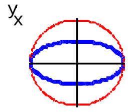
2.3 Cercles et ellipses :

2.3.1 Cas de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

1. On obtient la moitié du cercle trigonométrique $x^2+y^2=1$. ($y=-\sqrt{1-x^2}$ l'autre moitié)

2. $\boxed{\text{Plus généralement } \textbf{le cercle de centre } C(a,b)\textbf{, de rayon } R>0 \textbf{ :} \quad (x-a)^2+(y-b)^2=R^2.}$

2.3.2 Cas de $x \longmapsto \frac{1}{2}.\sqrt{1-x^2}$

1. Définition. L'application $M(x,y) \longmapsto (x'=x,\ y'=\frac{1}{2}.y)$ est **appelée dilatation (ou affinité) de base Ox, de direction Oy, de rapport $\frac{1}{2}$** : cercle $\begin{cases} x=cos(t) \\ y=sin(t) \end{cases}$  ellipse $\begin{cases} x=cos(t) \\ y=\frac{1}{2}.sin(t) \end{cases}$

   Par cette affinité, le cercle trigon. (décrit par M) a pour image l'ellipse (décrite par M') d'équation $y'=\frac{1}{2}\sqrt{1-x'^2}$; et revenant aux lettres usuelles $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a la courbe image : $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

2. Note : Une ellipse a pour "équation réduite" $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ ou en paramétriques : $\begin{cases} x=a.cos(t) \\ y=b.sin(t). \end{cases}$

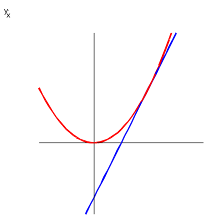
2.4 Quelques problèmes du second degré

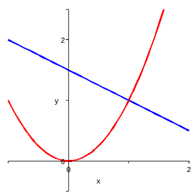
2.4.1 On pose $f(x)=\alpha.x^2$. Montrer que la tangente en $M(x,y)$ coupe Ox en $T(x/2,0)$

Solution : On va mettre comme lettres $M_0(x_0,\alpha.x_0^2)$ pour que ce soit plus clair.

Equation de **la Tangente** $\boxed{Y-f(x_0)=f'(x_0).(X-x_0)}$ ou $Y-\alpha.x_0^2=2.\alpha.x_0.(X-x_0)$.

Donc $Y=0 \Rightarrow X=x_0-\frac{x_0}{2}=\frac{x_0}{2}$ si $x_0\neq 0$ (supposé). D'où une construction de la tangente.





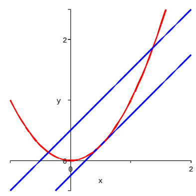


fig 2. et fig.3. pour après

2.4.2 Soit $f(x)=\alpha.x^2$. Montrer que la normale en $M(x,y)$ coupe Oy en K tel que $QK=cte$, $Q=proj_\perp(M,Oy)$ (si 2 droites $\perp$ le produit des pentes vaut -1)

Equation de **la Normale** $\boxed{Y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}.(X-x_0)}$ ou $Y-\alpha.x_0^2=\frac{-1}{2.\alpha.x_0}.(X-x_0)$.

$X=0 \Rightarrow Y=\alpha.x_0^2+\frac{1}{2.\alpha}$. D'où $\overline{QK}=\frac{1}{2.\alpha}$ indépendant de x_0 choisi sur la parabole.

2.4.3 Soit $f(x)=\alpha.x^2$. Trouver c tel qu'on ait : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

Trouver $c=\frac{a+b}{2}$ ce qui donne une propriété géométrique de la parabole d'axe $//\ Oy$.

2.4.4 Trinômes x^2-x-1 (nombre d'or) ; et x^2+x+1 (racines cubiques de 1)

1. $\underline{x^2-x-1 \text{ est } \textbf{réductible} \text{ sur } \mathbb{R}}$, de racines $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $\boxed{\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1,618 \ \ \textbf{nombre d'or".}}$

   $\boxed{\varphi^2=\varphi+1}$ (car $x^2=x+1$) d'où $\underline{\varphi^2\simeq 2,618}$ $\quad[\Rightarrow \varphi=\sqrt{1+\varphi}=\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}\ ...]$

   $\dfrac{1}{\varphi}=\varphi-1\simeq 0,618$ $\quad$ ($\underline{\text{car}}$ $\ x=1+\dfrac{1}{x}$) $\quad[\Rightarrow \varphi=1+\dfrac{1}{\varphi}=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}...]$

2. $\underline{x^2+x+1 \ \textbf{ est irréductible sur } \mathbb{R}}$. $\Delta=-3=(i.\sqrt{3})^2$ racines $\underline{\text{sur } \mathbb{C}}$: j et $\overline{j}$ $\boxed{j=\dfrac{-1}{2}+i.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.}$

   Et comme $\boxed{x^3-1=(x-1).(x^2+x+1)}$ car $a^3-b^3=(a-b)(a^2+a.b+b^2)$, les racines de x^2+x+1 vérifient forcément $\underline{x^3=1 : \ \textbf{racines cubiques de 1}}$ $\boxed{\textbf{donc} \ \ j^3=1, \ \ 1+j+j^2=0.}$

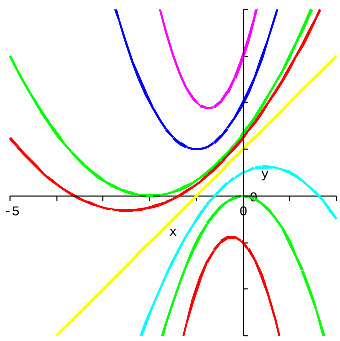
   (Si on connait la notation d'Euler : $j=e^{i.2.\pi/3}$, $\overline{j}=e^{-i.2.\pi/3}=e^{i.4.\pi/3}=j^2$; $\underline{\text{ou}}$ $j^2=1/j$, $\overline{j}=1/j$

   car j, $\overline{j}$ sont de module 1). Finalement : $\boxed{x^2+x+1=(x-j)(x-j^2) \ \text{ sur } \mathbb{C}.}$

   $\underline{\text{Changeant } \ x \ \text{ en } \ -x}$, x^2-x+1 est irréductible $\underline{\text{sur } \mathbb{R}}$; $x^2-x+1=(x+j)(x+j^2)$ $\underline{\text{sur } \mathbb{C}}$.

2.4.5 Cas de paramètre : $m.x^2+(m+1).x+(m+1)=0$

1. Montrer que si $m<-1$, ou $m>\dfrac{1}{3}$, il n'y a pas de racine en x. Cas $m=-1$ et $m=\dfrac{1}{3}$?
2. Que si $-1<m<0$, il y a 2 racines en x de plus de signes opposés. Cas $m=0$?
3. Que si $0<m<\dfrac{1}{3}$, il y a 2 racines en x, de plus : négatives. Faire un tableau selon m.



Cas : $m=-2,\ -1,\ -1/2,\ 0,\ 1/4,\ 1/3,\ 1,\ 2$; $y=f(x)$:

2.4.6 Exemple précédent : comment savoir la position de $x_0=-1$ / aux racines

1. Dire : x_0 entre les racines $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-(m+1)-\sqrt{-3m^2-2m+1}}{2.m}<-1<\dfrac{-(m+1)+\sqrt{-3m^2-2m+1}}{2.m}$

   - est non seulement **peu commode** (c'est clair)
   - <u>mais de plus **faux si** $m<0$ vu que la racine à droite est plus petite que celle de gauche</u> !

2. <u>Méthode</u> : **Si** $f(x)=a.x^2+b.x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $\underline{a.f(x_0)=a^2.(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$

Donc : x_0 extérieur aux racines $\Longleftrightarrow$ $f(x_0)$ du signe de "a".
Et si pas de racines réelles, x_0 toujours extérieur, $f(x_0)$ toujours du signe de a.

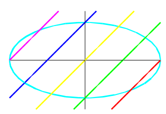
Quand x_0 extérieur, pour savoir quel côté, comparer x_0 à la demi-somme $\frac{-b}{2a}$.

3. Dans l'exercice : trouver que -1 est toujours extérieur aux racines ; et :

$$-1 \text{ est à droite des racines } \Leftrightarrow m \in]0, \frac{1}{3}].$$

2.4.7 (*) Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...

On la coupe par une famille de droite de direction fixe $\mathcal{D}_\lambda$: $y = m.x + \lambda$ (donc parallèles).



1. Vérifier qu'à l'intersection on a une équation de degré 2 en x.
2. Justifier sans autre calcul quasiment que les milieux des points d'intersection sont alignés.

   (Trouver $x_I = \frac{x' + x"}{2} = p.\lambda$, p fixe. Puis $y_I = q.\lambda$, q fixe. D'où $\overrightarrow{OI}$ col. à $\overrightarrow{u}(p, q)$.)

2.4.8 (**) Inéquation avec paramètre : exercice

Résoudre : $x - a \leqslant \sqrt{x + a}$ en discutant selon a.

1. Domaine : $x \geqslant -a$.
   Puis on va discuter la position de x par rapport à a ; donc de la position de a par rapport à $-a$; donc de a par rapport à 0. D'où :

2. $\boxed{\text{cas } a \geqslant 0 \text{ ou } -a \leqslant a}$ $[-a, a]$ est solution ; puis sur $[a, +\infty[$ élevons au carré : on a une inéquation de degré 2 et il faut placer a par rapport aux racines.

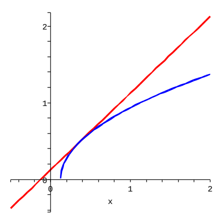
   Rappel
   Si $f(x) = px^2 + qx + r$, $f(a)$ est du signe de p pour a extérieur aux racines et de $-p$, sinon.
   Pour a extérieur, le comparer à la demi somme $-q/2p$, pour savoir s'il est à gauche ou à droite.

   Ici $f(x) = x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a$. Et on doit avoir : $x \geqslant a \cap [x_1, x_2]$...

   On réunit alors les 2 casiers : Solutions $[-a, a] \cup [a, x_2] = [-a, x_2]$

3. $\boxed{\text{cas } a \leqslant 0 \text{ ou } a \leqslant -a}$ Sur le domaine, chaque membre est positif ; on peut élever au carré et on a une équivalence ! Par contre, il faut placer $-a$ par rapport à des racines éventuelles ...

   Solutions $a < -1/8$: aucune.
   $-1/8 \leqslant a \leqslant 0$: entre les deux racines, voilà les solutions.



Comme vérification, le cas $a = -1/8$, une seule solution : **Tangence** !

M+ **Exercices: Quelques problèmes du second degré.** **PTSI**

---

1. Tracer la parabole d'équation $y = -x^2 + x + 2$ sans dériver mais par translation de repère.
   Vérifier avec les intersections avec les axes.

2. Tracer l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ sans dériver si possible ; et vérifier, idem.

3. Résoudre : (a) $\sqrt{2-x} > 2$ (b) $\sqrt{\mid x-3 \mid} \leqslant x-1$ (c) $x-3 \leqslant \sqrt{(1-x)(x-2)}$
   (d) $x-2 \leqslant \sqrt{\mid x-8 \mid}$ (e*) Placer -2 par rapport aux racines de $m.x^2 + (m+1).x + 1$.

4. Tracer l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{2.x^2 + 3.x + 2}{x+1}$. [$y = \dfrac{-x^2 + 3.x}{x-2}$ vue en cours.]

5. Soit $F(0, p/2)$ et $\mathcal{D}$: $y = -p/2$. Lieu de $M(x,y)$ équidistant de F et de $\mathcal{D}$?

   [Trouver : la parabole d'équation : $x^2 = 2.p.y$. (F est le foyer, $\mathcal{D}$ la directrice).]

6. On coupe la parabole $y = \alpha.x^2$ par des droites de direction fixe $y = m.x + \lambda$. m est donc fixe
   Que dire des milieux des points d'intersection obtenus quand λ varie ?

7. On coupe l'hyperbole $y = \dfrac{\alpha}{x}$ par des droites de direction fixe $y = m.x + \lambda$.
   Que dire des milieux des points d'intersection ? Note : le repère peut être ici non orthonormé !

8. On coupe l'hyperbole $y = \dfrac{\alpha}{x}$ par une droite $\mathcal{D}$: $y = a.x + b$.
   On note $\{A, B\}$ les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'hyperbole et $\{C, D\}$ les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et des asymptotes. Montrer que $[A, B]$ et $[C, D]$ ont même milieu.

9. (*) Théorème de la puissance d'un point/ un cercle. Soit $\mathcal{C}(C, R)$ un cercle et $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ une droite ; avec $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. Si $\overrightarrow{u}$ varie en direction et si $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ contient 2 points M, M', le produit $\overline{AM}.\overline{AM'}$ est constant et vaut $puiss(A/\mathcal{C}) = CA^2 - R^2 = d^2 - R^2$, appelé : puissance du point A par rapport à $\mathcal{C}$.

   $\mathcal{D}$: $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u}$. $\mathcal{C}$: $\overrightarrow{CM}^2 = R^2$. Donc : $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})^2 = R^2$ donne : $\lambda^2 + 2.\lambda.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CA}^2 - R^2 = 0$, car $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. Vérifier alors : $\lambda.\lambda' = (\lambda.\overrightarrow{u}) \cdot (\lambda'\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{CA}^2 - R^2$. Divers cas de figure ($A$ sur le cercle, intérieur ou extérieur : dans ce cas-ci, prendre aussi une tangente...) ?

Chapitre 3

A_n^k, C_n^k, Binôme. Injections et surjections

3.1 Arrangements, combinaisons

3.1.1 Définitions

> Soit un ensemble à n éléments, A_n^k désigne **le nombre** de k-uplets rangés ($k \leqslant n$) possibles ;
> on dit nombre d'arrangements ;
> Et C_n^k, encore noté $\binom{n}{k}$ désigne **le nombre** de parties (non rangées) de k éléments parmi n ;
> on dit nombre de combinaisons ou nombre de choix.

Exemple. Soit $n = 5$, $k = 3$; $E = \{a, b, c, d, e\}$

• Arrangements de 3 éléments parmi 5 : il y a (a, b, c) (a, b, d) (a, b, e) ; donc 3 commençant par $(a, b, ?)$ et si on commence par $(a, c, .)$ ou $(a, d, .)$ ou $(a, e, .)$ celà fait donc 4.3 cas à ce stade [avec les $(a, b, .)$].

Et comme on peut commencer par b, c, d ou e (5 cas équivalents), celà fait $A_5^3 = 5.4.3 = 60$.

• Combinaisons : $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$ car on a exactement les cas : $\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, b, e\}$ $\{a, c, d\}$ $\{a, c, e\}$ $\{a, d, e\}$ $\{b, c, d\}$ $\{b, c, e\}$ $\{b, d, e\}$ et $\{c, d, e\}$.

Remarques $C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$ (seul choix : la partie vide) et $C_n^n = \binom{n}{n} = 1$ (la partie pleine).

$\boxed{C_n^1 = \binom{n}{1} = n}$ $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k} \text{ ou } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ (Choisir k éléments ensemble, c'est en laisser $n-k$).

3.1.2 Calcul de A_n^k

On a : $\boxed{A_n^k = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \text{ en convenant que : } n! = n.(n-1)...1 \quad 0! = 1.}$

Voir déjà que $(n+1)! = (n+1).n!$ pour $n \geqslant 0$. Ci-dessus, celà faisait $A_5^3 = 5.4.3 = \dfrac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$.

Démonstration

Supposons $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Comptons les k-uplets (ordonnés, donc) :

On va supposer que x_1 est en 1ère position : il suffira alors de multiplier le résultat par n car il y a n cas identiques, à savoir x_2, ... ,x_n pourraient être en 1ère position !

A ce stade, $(x_1, ?, ...)$, on a $(n-1)$ posibilités équivalentes pour le 2ème casier car x_1 exclus ! On va donc supposer, de même, que l'on a $(x_1, x_2, ?, ...)$ et on multipliera (à nouveau) par $(n-1)$ cette fois.

On poursuit jusqu'à arriver à $(x_1, ..., x_k)$: au total $n(n-1)...(n-(k-1))$ cas ; terminé.

On a **donc** : $\boxed{A_n^n = n! \text{ façons de ranger } n \text{ éléments parmi } n \text{ (encore une fois } 0\,! = 1).}$

3.1.3 Calcul de C_n^k (en le reliant à A_n^k)

On a $A_n^k = k!\,.\,C_n^k\,;$ d'où $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$ ce qui donne : $\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}}$

Démonstration. Comptons les k-uplets (ordonnés). 1ère façon : il y en a A_n^k ; 2ème façon : on choisit les $C_n^k = \binom{n}{k}$ parties à k éléments ; et on range chacune d'elles de $A_k^k = k!$ façons ; d'où $k!\,.\,C_n^k$ k-uplets.

Forcément $A_n^k = k!\,.\,C_n^k$.

Exemples. Revoir que $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ $\boxed{\binom{n}{1} = n}$ ... et en plus $\boxed{C_n^2 = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}}$

3.1.4 Autre calcul : Triangle de Pascal

On a l'égalité $\boxed{\text{Pour } n \geqslant k \geqslant 1 : C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad \text{ou bien} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.}$

Voici comment celà fonctionne :

$C_0^0 = \binom{0}{0} = 1$ (1ère ligne ; où $n = 0$)

$C_1^0 = \binom{1}{0} = 1$ $\quad C_1^1 = \binom{1}{1} = 1$ (ligne où $n = 1$)

$C_2^0 = \binom{2}{0} = 1$ $\quad C_2^1 = \binom{2}{1} = 2$ $\quad C_2^2 = \binom{2}{2} = 1$

...

chaque terme (sauf 1ère ligne ; où $n = 0$) étant somme de celui au dessus et dessus à gauche (si personne, mettre un zéro) ; **ou encore le même triangle avec les valeurs :**

1 (1ère ligne ; où $n = 0$)
1 1 (ligne où $n = 1$)
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 (5ème ligne !)
...

Démonstration. On pourrait vérifier cette égalité avec la valeur ci-dessus.
Mais on va faire une autre preuve sans calcul ! Voici : Les parties à k éléments $(n \geqslant k \geqslant 1)$
. soit contiennent x_1 : il faut exactement choisir $(k-1)$ éléments (x_1 connu) parmi $(n-1)$
. soit ne contiennent pas x_1 : exactement choisir k éléments parmi $(n-1)$ (hors x_1 exclus). Fini.

Exercices

1. Calculer $C_5^3 = \binom{5}{3}$ (déjà vu) par le triangle de Pascal.
2. Montrer que le produit de n entiers naturels consécutifs est toujours divisible par $n!$
(en reconnaissant un coefficient binômial dans la fraction).

Remarques [1]

[1] . Ces divers coefficients permettent des calculs de dénombrements.
. Les A_n^k ont permis d'atteindre les $C_n^k = \binom{n}{k}$ fondamentaux comme on va le voir.
. On va voir aussi d'autres relations importantes sur ces coefficients.

3.2 Le binôme de Newton

3.2.1 Exemples

On a : $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$ et donc : $(a-b)^2 = a^2 - 2a.b + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et donc : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3.2.2 Théorème

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.C_n^k a^{n-k} b^k.}$$

Démonstration. On peut faire une récurrence (fastidieuse) avec $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n.(a+b)$.

Directement : Dans $(a+b)^n = (a+b).(a+b)...(a+b)$, n fois, on aura (pour une raison d'homogénéité) que des termes du type $a^{n-k}.b^k$; combien ?

Dans les n paquets $(a+b)$, il faudra exactement choisir (combinaisons) k paquets où l'on sélectionne "b" ; dans les autres facteurs, on prendra alors "a". Ainsi, celà fait donc $C_n^k = \binom{n}{k}$ termes.

(Exemple : nombre de termes en a^2b dans $(a+b)^3$? choisir b dans le 1er ou 2ème ou 3ème facteur).

3.2.3 Relations importantes

On a : $C_n^k = \frac{n}{k}.C_{n-1}^{k-1}$ ou bien : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, $n \geqslant k \geqslant 1$;

$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = \mid \mathcal{P}(E) \mid$ si $\mid E \mid = n$ (somme d'une ligne)

si $\underline{n \geqslant 1}$: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... = 0$; ou bien $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... = 0$; si $\underline{n \geqslant 1}$ donc :

si $\underline{n \geqslant 1}$: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}$ ou $\sum_j \binom{n}{2j} = \sum_j \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}$

$C_k^k + C_{k+1}^k + ... + C_p^k = C_{p+1}^{k+1}$ ou $\sum_{k \leqslant j \leqslant p} \binom{j}{k} = \binom{p+1}{k+1}$ (somme d'une colonne du triangle ici)

Démonstration

1) peut se voir par calcul facile ; (aussi par raisonnement comme pour le triangle de Pascal)

2) $C_n^k = \binom{n}{k}$ est aussi le nombre de parties à k éléments ; on retrouve $\mid \mathcal{P}(E) \mid$;

3) Développer $(1-1)^n$; retenir cette idée qui sera généralisée avec les complexes !

4) conséquence de 3) en tenant compte de 1) ; ne pas oublier : $n \geqslant 1$;

5) $C_l^k = C_{l+1}^{k+1} - C_l^{k+1}$ ou : $\binom{l}{k} = \binom{l+1}{k+1} - \binom{l}{k+1}$ pour $l \geqslant k$ avec, si $l = k$, $C_k^{k+1} = \binom{k}{k+1} = 0$.

En ajoutant ces égalités on a des simplifications "dominos" ou "télescopiques" classiques : à bien voir !

Note On aurait pu faire ici une récurrence sur p ; la clé étant aussi un emploi réitéré de la formule du triangle de Pascal (avec, bien sûr, la relation immédiate : $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ ou $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$.)

3.2.4 Résumé à bien savoir. Attention à ne pas confondre :

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n}$ redonne le binôme si $x = \frac{b}{a}$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$ donnant

$\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}.b + ... + a.b^{n-1} + b^n)}$ si $x = \frac{b}{a}$. $\boxed{a^3 - b^3 = ...\,? \quad a^3 + b^3 = ...\,?}$

3.3 Injections. Surjections

3.3.1 Fonctions et applications

1. Définitions

   Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est une correspondance (ou une relation de E vers F) telle que chaque $x \in E$ ait au plus une image dans F.

   Une application de E dans F est une fonction telle que chaque $x \in E$ ait une et une seule image dans F.

   Exemples

   1) $x \mapsto 1/x$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une application de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ (ou $\mathcal{D}_f$) est le domaine de définition de f.

   2) $x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ tes que $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique : partie de $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ appelée graphe), n'est pas une fonction (car $1/2$ a deux images $\pm\sqrt{3}/2$). (Donc, non application)

   3) $x \mapsto y$ tel que $x = y^2$ n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Idem.

   4) $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $F = \{a, b, c\}$; $f : 1 \mapsto a, 1 \mapsto b, ...$ ne peut être une fonction.

   5) $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $F = \{a, b, c\}$; $f : 1 \mapsto a, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b$ est une application.

   6) On notera $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

2. Composition : On définit, quand c'est possible, la composée par $gof(x) = g[f(x)]$.

   Exemple. $f :\ () \mapsto ()^2$, $g = ln$; $gof(x) = ln(x^2)$, $fog(x) = ln^2(x)$; ce n'est pas pareil !

   Propriété : La composition (dès qu'elle existe) est toujours associative.

   En effet notons $f(x) = y$, $g(y) = z$; alors $g[f(x)] = g(y)$

   . $(hog)of(x) = hog[f(x)] = hog(y) = h[g(y)] = h(z)$ et

   . $ho(gof)(x) = h[gof(x)] = h[g(f(x))] = h[g(y)]$: idem.

   Notations. Si $A \subset E$, $f(A)$ désigne la partie de F suivante $\{f(x), x \in A\}$.

   Ainsi, dans l'exemple 5) : $f(\{2, 3\}) = \{a, c\}$ ou $sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

   De même si $B \subset F$, on définit $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$. (On n'a pas dit f bijective !)

   Ainsi, dans l'exemple 5), $f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 3\}$ ou $sin^{-1}(\{0\}) = \{k.\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

   Avec ces notations, précisons le domaine de gof : Il faut exactement que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$;

   donc (**à ne pas savoir** !) $x \in D_f$ et $x \in f^{-1}(D_g)$: $D_{gof} = D_f \cap f^{-1}(D_g)$.

3. Nombre d'applications de E dans F si E, F finis :

   Notons $\mid E \mid = p$ et $\mid F \mid = n$ (attention à cette inversion des lettres voulue -cf matrices-)

   Théorème : Il y a exactement n^p (ou $\mid F \mid^{|E|}$) applications de E dans F.

   (C'est pourquoi, l'ensemble des applications de E dans F, noté $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E).

   Démonstration. Supposons $E = \{x_1, ..., x_p\}$; $F = \{y_1, ..., y_n\}$.

   Alors x_1 a n images possibles : on fait un choix et on multipliera la réponse par n ; x_2 a aussi n images possibles ; etc. Au total, celà fait exactement n^p cas possibles.

   Exemple. Nombre de façons de répartir 30 élèves en 3 classes *Allemand*, *Espagnol*, *Italien* ?

   On est dans le cas précédent : cela fait 3^{30} possibilités.

3.3.2 Injections

1. Définition
On suppose déjà que f est une application de E dans F : Tout x de E a une et une seule image.

Une application est dite injective (ou injection) si tout élément de F a au plus un antécédent.

Exemples essentiels à comprendre
1) $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est non injective car $y = 4$ a deux antécédents $+2$ et -2.
2) Par contre $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est injective !
3) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $F = \{a, b, c\}$; $f : 1 \mapsto a, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b$, est non injective car $y = a$ possède 2 antécédents.

2. En pratique. On a, pour une application f de E dans F :

$$f \text{ injective} \iff [x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'),\ \forall\, x,\ x' \in E] \iff [f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'].$$

C'est-à-dire, pour montrer f injective, on montre une implication (ou sa contraposée).

3. Théorème. Nombre d'injections si E, F sont finis :

Si E a p éléments et F en a n ; alors : si $| E |>| F |$, il y a 0 injection ;
si $| E |= p \leqslant | F |= n$, il y a : $n.(n-1)...(n-p+1) = A_n^p$ injections.

Démonstration. Supposons $E = \{x_1, ..., x_p\}$ $F = \{y_1, ..., y_n\}$ et $p \leqslant n$.
Alors x_1 a n images possibles : on fait un choix, par ex. y_1 et on multipliera la réponse par n ; x_2 possède, alors, $n-1$ images possibles car y_1 est interdit ... Et x_p aura, pour finir, $n-(p-1)$ images possibles. D'où : $n(n-1). ... .(n-p+1)$ cas.

Remarque. Une injections de {1,2,3} dans $\{a, b, c, d, e\}$, celà revient à ranger 3 éléments parmi 5 ; par ex : $1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto a$: ou encore (b, c, a) cela fait donc -à nouveau- : 5.4.3 cas !

3.3.3 Surjections

1. Définition
On suppose déjà que f est une application de E dans F : Tout $x \in E$ a une et une seule image.

Une application est dite surjective (surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent.

Exemples essentiels à comprendre
1) $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est non surjective car $y = -4$ n'a pas d'antécédent.
2) Par contre $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ est surjective !
3) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $F = \{a, b, c, d\}$; $f : 1 \mapsto a, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b$ est non surjective car $y = d$ ne possède pas d'antécédent.

2. En pratique. En notant $f(E) = \{f(x), x \in E\}$ on a, pour une application f de E dans F :

f surjective $\Leftrightarrow$ $f(E) = F$ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in F$ l'équation en x : $f(x) = y$, a **au moins** une solution.

Exemples ci-dessus
Dans 1) Ici, on avait $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$: f non surjective. (On dit aussi inclusion stricte $\subsetneq$)
Dans 3), on avait $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{a, b, c\} \subsetneq \{a, b, c, d\}$: f non surjective.

3. Nombre de surjections si E, F sont finis :

Cette question est plus difficile et ne sera pas utile. Exercice (*) :

- Si E a p éléments et F n ; alors si $| E | < | F |$, il y a 0 surjection
- si $| E |= p \geqslant | F |= n$, on a : $S_{p,n} = n(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1})$.

3.4 Bijections

3.4.1 Définition

On suppose déjà que f est **une application** de E dans F : Tout x de E a une et une seule image.

1. $\boxed{\text{Une application est dite bijective (bijection) si tout élément de } F \text{ a un et un seul antécédent.}}$
   C'est dire f à la fois injective et surjective.
2. En pratique. $\boxed{f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F \text{ l'équation en } x : f(x) = y \text{ a une et une seule solution en } x.}$
   Exemple : $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ bijective ; l'équation $x^3 = 4$ a une et une seule solution : $x = \sqrt[3]{4}$.

3.4.2 Existence de la bijection réciproque

1. Théorème

   Si f est bijective de E dans F, on peut définir une application de F dans E, notée f^{-1}, à savoir $y \mapsto x$, son seul antécédent ; celle-ci aussi bijective et $f^{-1}of = Id_E$, $fof^{-1} = Id_F$.

   Dém. laissée en exercice. (Id_E signifiant $x \in E \mapsto x \in E$)

2. Exemples **Voir sur le même dessin, les graphes de f et f^{-1} :**
   1) $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ est bijective, de bijection réciproque : $\sqrt{...}$
   2) $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est bijective, de bijection réciproque : $\sqrt[3]{...}$
   3) $f(x) = 2.x - 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)$.
   4) La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, de réciproque exp.

3. Note Quand f est seulement une application, on parle de $f^{-1}(B)$, B étant une partie de F !

3.4.3 Nombre de bijections si E, F sont finis

1. Théorème

   Si E a p éléments et F en a n ; alors si $\mid E \mid \neq \mid F \mid$, 0 bijection (clair).
   Si $\mid E \mid = \mid F \mid = n$, FINI, on a $[f$ injective$] \Leftrightarrow [f$ surjective$] \Leftrightarrow [f$ bijective$]$.
   Il y a donc $A_n^n = n!$ bijections possibles.

   Démonstration. Si $\mid E \mid = \mid F \mid = n$, FINI.
   - f inj. $\Longrightarrow$ f surj. : Quand f est injective, il est facile de voir que f est bijective de E sur $f(E)$; donc ici $\mid E \mid = \mid f(E) \mid = n$. Ayant $f(E) \subset F$, de même cardinal FINI, il est égal à F.
   - f surj. $\Longrightarrow$ f inj. : Si f n'était pas injective, on aurait $\mid f(E) \mid < \mid E \mid = n = \mid F \mid$; f ne pourrait être surjective ! On a fini. Attention : f peut être ni injective, ni surjective !

2. Définition

   $\boxed{\text{Une bijection de } E \text{ dans } E \text{ est appelée permutation ; Si } \mid E \mid = n, \text{ il y a donc } n! \text{ permutations.}}$

   Exemple : $x \mapsto x^3$ bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $E = \{a, b, c\}$ $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$ bijective.

3. $\boxed{\text{Attention}}$ Si E est infini, on peut trouver une application de E dans E :
   . injective, non surjective : par exemple $n \mapsto n + 1$ dans $\mathbb{N}$
   . et surjective non injective : $0 \mapsto 0$ et $n \geqslant 1 \mapsto n - 1$!

3.4.4 Autres propriétés

1. Composition :

   La composée de 2 injections est injective ; la composée de 2 surjections est surjective.
   Donc la composée de 2 bijections est bijective.

Démonstration facile dès qu'on a assimilé les définitions :

1) Soit $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$ vu que f est inj. ; puis $g[f(x)] \neq g[f(x')]$ vu que g injective.
Donc $gof(x) \neq gof(x')$: d'où gof injective
2) f sujective signifie $f(E) = F$; puis g surj. signifie $g(F) = G$. or, aisément, $gof(E) = g[f(E)]$.
Donc $gof(E) = G$: c'est gof surjective.
3) Résulte de 1) et 2).

2. Une réciproque :

Si gof est injective, alors f est injective ; si gof est surjective, alors g est surjective.

Démonstration

1) Supposons l'existence de $x_1 \neq x_2$ avec $f(x_1) = f(x_2)$ (f non injective).
Alors clairement $gof(x_1) = gof(x_2)$: gof non inj. [On pouvait éviter la contraposée !]
2) Supposons g non surjective, alors $g(F) \subsetneq G$; à fortiori $gof(E) \subsetneq G$: gof non surjective.

Conséquence

Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite involutive si $fof = Id$ $(Id : x \longmapsto x)$. Si f est involutive, forcément f est bijective et $f^{-1} = f$ (exemples : symétries).

En effet f sera à la fois injective et surjective car Id est bijective ; d'où f bijective.
Puis on a : $f^{-1} = f^{-1}ofof = f$.

3. Exemples

Trouver des involutions (autre que Id) :
. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
. puis de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même ;
. puis du plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Solution

• $x \in \mathbb{R} \longmapsto y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y = a$; ou bien $f(x) = a - x$.
• De même : $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto y \in \mathbb{R}^*$ tels que $x.y = k \neq 0$.
• Voici des exemples et contre-exemples :

1) Une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ est une bijection mais non involutive $(f^{-1} \neq f)$ sauf si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ auquel cas $t_{\overrightarrow{u}} = Id_{\mathcal{P}}$!
2) Les symétries par rapport à un point sont involutives ; ou encore :
3) les symétries par rapport à une droite D_1, de direction D_2 non parallèle à D_1 sont involutives ;
Un cas particuler est celui des symétries orthogonales.

Facultatif :

4) Une rotation $r_{A,\alpha}$ de centre A, d'angle α, est bijective non involutive sauf si $\alpha = 0$ ou π (2π).
5) Une homothétie $h_{A,k}$ de centre A, de rapport $k \neq 0$, est bijective non involutive sauf si $k = \pm 1$.

Dessins ?

Exercice [2]

[2] En complément :

. Si $x \notin \mathbb{Q}$, montrer que : $1 - x \notin \mathbb{Q}$.
. Déduire que $f : \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \longmapsto x \\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \longmapsto 1 - x \end{cases}$ vérifie $fof = Id$; donc bijective (involutive).
. Dessin de f ? Soit maintenant : g : $1/2 \mapsto 0$; $0 \mapsto 1/2$; $x \mapsto x$ sinon :
. Justifier que gof est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; continue en aucun point ! (cf. ch. Continuïté)

M+ **Exercices**: A_n^k, C_n^k, **binôme. Injections, surjections.** **PTSI**

---

1. Développer l'expression de $(a+b)^5$.
2. Rappeler les relations du cours au sujet des coefficients binômiaux : $\boxed{C_n^k \text{ encore noté } \binom{n}{k}.}$
3. Avec $f(x) = (1+x)^n$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k} = A$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.\binom{n}{k} = B$.
4. Calculer A (précédent) d'une autre façon (au moins). <u>Pour la suite, mettre les autres notations</u> :
5. Avec $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} C_j^2 = \sum_{j=2}^{n} \binom{j}{2} = C_{n+1}^3 = \binom{n+1}{3}$, calculer $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ (3ème méthode).
6. (Une 4ème) Trouver $P(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x$ tel que $\underline{P(x) - P(x-1) = x^2}$. En déduire $S_2(n)$.
7. (*) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p} C_m^k.C_n^{p-k} = C_{m+n}^p$ (cf. coefficient de x^p dans $(1+x)^{m+n}$). Valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$?
8. (*) On considère tous les nombres à 6 chiffres sans répétition formés avec 1,2,3,4,5 et 6. Combien y en a-t-il ? Quel est le 500ème ? (516243) Le rang de 362145 ? (343ème) Leur somme ?
9. Trouver une application injective non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; puis surjective non injective.
10. Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
11. Montrer que gof injectif et f surjectif $\Rightarrow g$ injectif. Et gof surjectif et g injectif $\Rightarrow f$ surjectif.
12. (*) Montrer que $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt{2n+2}}$ pour $n \geqslant 1$. Amélioration : $\leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$.
13. (*) Soit n droites du plan en position générale. Nombre de régions obtenues ? $[1+C_{n+1}^2]$
14. (*) Dans le plan, on considère n points tels que 3 quelconques soient non alignés.
    On trace les droites obtenues. Nombre de points nouveaux, au plus, par intersection ? $[3.C_n^4]$
15. (**) <u>Théorème de Cantor</u> : Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
    (Si f en était une, considérer $\{x \in E : x \notin f(x)\}$.)
16. (**) <u>Tirages avec remises</u> : On tire k boules, avec remise à chaque fois, parmi $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.
    (a) Si l'ordre les boules tirées importe, vérifier qu'il y a n^k tirages. Sinon, c'est plus difficile :
    (b) K_n^k étant le nombre de tels tirages, calculer K_3^2 et K_2^3. Montrer que K_n^k est le nombre de solutions entières de $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ (x_p=nombre de tirages de b_p) et vaut C_{n+k-1}^k :
    . soit par récurrence (*) sur $n+k$ avec $K_n^k = K_{n-1}^k + K_n^{k-1}$;
    . soit choisir $n-1$ cloisons parmi $n-1+k$ objets (cloisons et boules) !

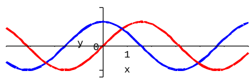
Chapitre 4

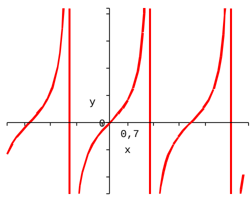
Trigonométrie. Equat. et inéquations trigonométriques

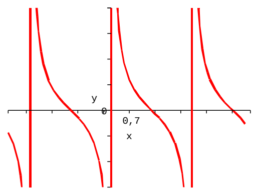
4.1 Equations trigonométriques

4.1.1 Fonctions sin, cos, tan, cot

1. Graphe de sin et cos $\underline{sin' = cos}$, $\underline{cos' = -sin}$ [Ceci sera démontré plus tard]







2. Graphe de tan

$$\boxed{tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \quad \pi\text{-périodique, impaire, de dérivée : } tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)}$$

3. Graphe de cot

$$\boxed{cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{1}{tan(x)} \quad \pi\text{-périodique, impaire ; } cot'(x) = \frac{-1}{sin^2(x)} = -\left(1 + cot^2(x)\right)}$$

4.1.2 Equations fondamentales

1. **Théorème**

$$\boxed{\begin{array}{c} cos(y) = cos(x) \iff y = \pm x + k.2.\pi \quad (1) \\ sin(y) = sin(x) \iff y = x + k.2.\pi \text{ ou } y = \pi - x + k.2.\pi \ (2) \\ tan(y) = tan(x) \iff y = x + k.\pi. \quad (3) \quad \underline{k \in \mathbb{Z}} \end{array}}$$

2. Démonstration (1) et (2) se voient bien avec le cercle trigonométrique (après).

   (3) Soit on connait la fonction tan ... soit $sin(x).cos(y) - sin(y).cos(x) = sin(x - y)$ [après].

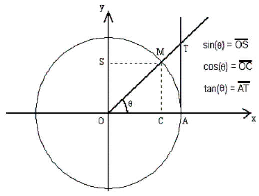
3. Exemple Résoudre $sin(2x - \pi/3) = cos(3x + \pi/3)$

   Solution : On peut ramener un sinus à un cosinus par la formule $\underline{sin(x) = cos(\pi/2 - x)}$! Puis (1).

   Trouver : $x = \dfrac{\pi}{10} + k.\dfrac{2.\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\quad x = \dfrac{-7.\pi}{6} + k'.2.\pi$, $\quad k' \in \mathbb{Z}$.

4.2 Trigonométrie circulaire

4.2.1 A connaitre



1. Déjà $\underline{cos^2(x) + sin^2(x) = 1}$ (Théorème de Pythagore) et $tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$.

2. Puis $\begin{cases} sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b)cos(a) \\ sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a) \\ cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \\ cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \end{cases}$ D'où $\begin{cases} tan(a+b) = \dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)} \\ tan(a-b) = \dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)} \end{cases}$

   Formules d'addition ; qui donnent les formules de duplication :

3. D'où $\begin{cases} cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a) = cos^2(a) - sin^2(a) \;; \\ sin(2a) = 2sin(a)cos(a) \qquad \text{donc} \quad tan(2a) = \dfrac{2.tan(a)}{1-tan^2(a)} \end{cases}$

   $$\boxed{cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2};\quad sin^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{2};\quad 1+cos(x) = 2.cos^2\frac{x}{2}\,;\quad 1-cos(x) = 2.sin^2\frac{x}{2}}$$

4. Et $\begin{cases} sin(a+b) + sin(a-b) = 2sin(a)cos(b) \\ sin(a+b) - sin(a-b) = 2cos(a)sin(b) \\ cos(a+b) + cos(a-b) = 2cos(a)cos(b) \\ cos(a+b) - cos(a-b) = -2sin(a)sin(b) \end{cases}$ ou $\begin{cases} sin(p) + sin(q) = 2.sin(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p) - sin(q) = 2.cos(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2}) \\ cos(p) + cos(q) = 2.cos(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2}) \\ cos(p) - cos(q) = -2.sin(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2}) \end{cases}$

   Que l'on peut retenir par l'ordre choisi et "si co co si co co − si si" (Somme ↔Produit).

5. En fonction de "la tangente de l'arc moitié" :

   $$\boxed{sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\;,\quad cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\;,\quad tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$$ fractions rationnelles en $t = tan(\frac{x}{2})$.

6. A ne pas confondre avec : $\boxed{sin^2(x) = \dfrac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)} \qquad cos^2(x) = \dfrac{1}{1+tan^2(x)}}$ (moins essentielles).

   Les formules d'addition seront prouvées avec le produit scalaire. Les autres en résultent :

   Ainsi : $sin(2a) = \dfrac{2sin(a)cos(a)}{cos^2(a) + sin^2(a)}$; en simplifiant par $cos^2(a)$, on trouve 5)a). Idem pour 6)a).

4.2.2 Remarques

1. Attention : $\underline{sin^2(x) \neq sin(2x)}$!

2. Sont essentielles aussi : $\boxed{cos(\frac{\pi}{2} + a) = -sin(a), \quad sin(\frac{\pi}{2} + a) = cos(a)...}$ En particulier :

   $\boxed{\text{En repère orthonormé, 2 droites } y = mx + p,\ y = m'x + p' \text{ sont orthogonales} \iff m.m' = -1}$

   En effet : $m = tan(a)$ et $m' = tan(a + \frac{\pi}{2})$...

4.3 Inéquations trigonométriques

4.3.1 Résoudre : $sin(x) \geqslant 1/2$

Avec le cercle (fig. 1) : $\dfrac{\pi}{6} + 2k.\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5.\pi}{6} + 2k.\pi$; réunion d'une infinité d'intervalles.

4.3.2 Résoudre : $cos(2.x) < 1/2$

Idem (fig. 2) mais diviser par 2 : $\dfrac{\pi}{6} + k.\pi < x < \dfrac{5.\pi}{6} + k.\pi$ même k dans chaque membre et $k \in \mathbb{Z}$.

4.3.3 Résoudre : $sin(x) + cos(x) \leqslant 1$.

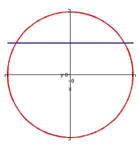
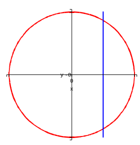
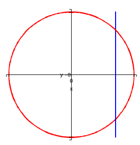
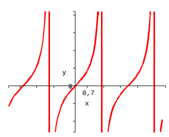
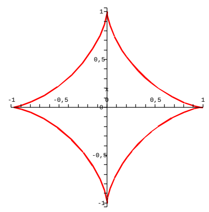
1. Propriété $\boxed{a.cos(x) + b.sin(x) \quad \text{s'écrit} \quad \sqrt{a^2+b^2}.cos(x-\varphi)}$ (Si $a = b = 0$, évident).

   Sinon : $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ vérifie $X^2 + Y^2 = 1$; donc s'écrit $cos(\varphi)$, $sin(\varphi)$. Finir !

2. L'exemple devenant : $cos(X) \leqslant cos(\pi/4)$, $X = x - \pi/4$ ... (fig.3). A finir.

4.3.4 Résoudre : $tan(3.x) < 1$

cf. graphe de tan. (fig.4) $\dfrac{-\pi}{2} + k.\pi < 3.x < \dfrac{\pi}{4} + k.\pi$ et on divise par 3.

4.3.5 (*) Une courbe en paramétrique avec de la trigonométrie

1. Tout est dans le domaine d'étude. $F: \ t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x(t) = a.cos^3(t) \\ y(t) = a.sin^3(t) \end{cases}$ (Astroïde fig.5.)

   $F(t + 2\pi) = F(t)$ montre qu'un intervalle de longueur 2π donne tout ; on le centrera plus tard !
   Demi-période : $F(t+\pi) = -F(t)$ un intervalle de longueur π suffit en faisant une symétrie $/O(0{,}0)$.
   Puis : $x(t + \pi/2) = -y(t)$; $y(t + \pi/2) = x(t)$ un intervalle de longueur $\pi/2$ suffit en faisant une rotation d'angle $\pi/2$.
   Maintenant, on va changer t en $-t$, donc on centre notre intervalle en $t = 0$: $[-\pi/4, \pi/4]$. Ce changement de t en $-t$ montre que $\mathcal{D}_e = [0, \pi/4]$ **suffit** en faisant de plus la symétrie $/Ox$.

   Attention pour la courbe : Faire les symétries en sens inverse, à partir du "motif" $t \in [0, \pi/4]$.

2. Tableau de Variations sur $[0,\pi/4]$ On prend $a > 0$. $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) = -3a.cos^2(t)sin(t) \\ y'(t) = 3a.sin^2(t)cos(t) \end{pmatrix}$.

   (Ces dérivations seront vues plus tard).

   - Pour $t = 0$, point stationnaire A. Tangente ? $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ est col. à $\begin{pmatrix} -cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ donc col. à $\vec{i}$, car $t = 0$.
   - Pour $t = \pi/4$, point B : on a $OB = \dfrac{a}{2}$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin : **Graphe ?**

M+ **Exercices: Equat. Inéquations trigonométriques sur $\mathbb{R}$** **PTSI**

---

1. Reprendre les équations trigonométriques fondamentales **et résoudre :** $sin(2x-\dfrac{\pi}{3}) = cos(3x+\dfrac{\pi}{3})$

2. (a) Calculer $sin(\dfrac{\pi}{12})$ avec $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. <u>Puis avec</u> : $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{6}$ et $sin^2(a) = \dfrac{1-cos(2a)}{2}$.
   (b) Calculer comme ci-dessus, 2ème façon, le réel : $cos(\dfrac{\pi}{8})$.
   (c) Condition Nécessaire et Suffisante, en repère orthonormé, pour que 2 droites :
   $y = mx + p$, $y = m'x + p'$ soient orthogonales ? Réponse et preuve.

3. Transformer en somme $sin(3.x).sin(x)$ et en produit : $sin(3x) + sin(x)$.

4. Formules donnant $sin(x)$, $cos(x)$ en fonction de $t = tan\dfrac{x}{2}$; puis en fonction de $T = tan(x)$.
   (Réponse partielle : $sin(x) = \dfrac{2.tan(x/2)}{1+tan^2(x/2)}$ <u>à ne pas confondre avec</u> : $sin^2(x) = \dfrac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$)

5. Trigonométrie facile (mais essentielle). Simplifier le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} cos(x/2^k)$.

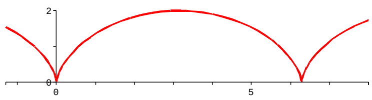
6. (*) Soit $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ avec $tan(2.\alpha) = 2.\sqrt{2}$. Calculer $tan(\alpha)$. Puis $sin(\alpha)$.

7. Trigonométrie dans un triangle : $A + B + C = \pi$
   (a) Montrer que : $sin(2A) + sin(2B) + sin(2C) = 4.sin(A).sin(B).sin(C)$.
   (b) (*) Montrer que : $cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1 - 2.\, cosA.\, cosB.\, cosC$.
   (c) (*) Montrer que : $tanA + tanB + tanC = tanA.\, tanB.\, tanC$.

8. <u>Equations trigonométriques</u>. Résoudre : $cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ puis : $cos^2(x) + cos^2(2x) + cos^2(3x) = 1$
   (poser $C = cos(2x)$.)

9. <u>Inéquations trigonométriques</u>. Résoudre :
   (a) $cos(2x) \geqslant 1/\sqrt{2}$; puis $-1/\sqrt{2} \leqslant cos(2x) \leqslant -1/2$;
   (b) (*) enfin $cos(x).cos(2x).cos(3x) \geqslant 1/4$. (poser $C = cos(2x)$.)

10. (*) $\begin{cases} x = R[t - sin(t)] \\ y = R[1 - cos(t)] \end{cases}$ $\boxed{\text{Etude à faire :}}$ Domaine d'étude : se ramener à $[0, \pi]$.
    (a) Tableau avec t, $x'(t)$, $x(t)$, $y'(t)$, $y(t)$? Tangente au point "stationnaire" :
    (b) $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 2.R.sin\dfrac{t}{2}.\begin{pmatrix} sin(t/2) \\ cos(t/2) \end{pmatrix}$... [ce dernier vecteur donnant la tangente]

    Courbe ? (voici une arche de "cycloïde") : 

Chapitre 5

Complexes : Aspect algébrique et trigonométrique

5.1 Forme algébrique $z = x + iy$

5.1.1 Généralités

1. Définition

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Posons } i^2 = -1,\ i \notin \mathbb{R}\,;\ \textbf{on définit alors}\quad \mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}\ \text{ tel que :}\\ z = z' \Leftrightarrow (x = x', y = y');\quad z + z' = x + x' + i(y + y');\quad z.z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).\end{array}}$$

2. Propriétés. $\boxed{(\mathbb{C}, +, .) \text{ est un corps commutatif (comme } \mathbb{Q} \text{ ou } \mathbb{R}\text{)}}$ (Vocabulaire : cf. $\mathbb{R}$.)

   De plus, on constate que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et qu'il s'agit d'une extension des opérations.

   Démonstration
   1) La loi + s'interprète comme l'addition vectorielle $\overrightarrow{u}(x, y) + \overrightarrow{v}(x', y')$ et ainsi $(\mathbb{C}, +)$ groupe abélien est facile. [Revoir le ch. $\mathbb{R}$ pour les définitions non exigibles]

   2) La loi **.** est commutative, 1+i.0 est Neutre. Comment voir l'associativité $(z.z').z" = z.(z'.z")$?
   – soit on fait un calcul (long ...) !
   – soit on considère $\mathbb{R}$[x], ensemble des polynômes à coeff. réels, muni des lois usuelles + et "**.**"
   En identifiant polynômes et fonctions polynômes ! on sait que $(P_1.P_2).P_3 = P_1.(P_2.P_3)$
   et chaque fois que l'on a "x", il suffit de lui substituer i ... (*)

   3) Lien entre les lois : $z.(z' + z") = z.z' + z.z"$. A ce stade, on a un "anneau commutatif".

   Enfin, tout élément non nul est inversible pour **.** : $\dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$.

3. Remarques
   1) La multiplication par un réel : $\lambda.z, \lambda \in \mathbb{R}$ s'interprète aisément comme $\lambda.\overrightarrow{u}$.
   Pour la multiplication par un complexe : $z' = a.z$ **voir la section II.**

   2) L'égalité $z' = z + cte$ s'interprète :
   – soit comme une translation du plan : $z' = z + z_0$
   – soit comme un **changement de repères par translation :** $\underline{Z = z - z_0}$ **ou** $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
   A revoir ! [exemple : la courbe d'équation $y = 2 + \dfrac{-1}{x - 1}$ 'est' aussi $Y = \dfrac{-1}{X}$.]

5.1.2 Conjugaison et module

1. Définition
$\boxed{\overline{z} = x - iy, \quad \mid z \mid = \sqrt{x^2+y^2} = OM \text{ généralisant la valeur absolue.}}$ $\boxed{\textbf{noter } \mid z \mid^2 = z.\overline{z}.}$

Attention : 1) Pas de $\leqslant$ dans $\mathbb{C}$.
2) On n'écrit pas $\sqrt{...}$ d'un complexe, sauf s'il est réel positif.

2. Théorème sur la conjugaison
$\boxed{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \quad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}; \quad \overline{\overline{z}} = z.}$ (Facile et laissé).

Remarques :
1) D'où aussi $\boxed{\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}}$ (le conjugué de $z.\frac{1}{z}$ valant le produit des conjugués ; et aussi 1.)
2) On a aussi $\mid z \mid = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = \frac{1}{z}$.

3. Conséquence sur le module
$\boxed{\mid z.z' \mid = \mid z \mid . \mid z' \mid.}$ Car : $\mid z.z' \mid^2 = z.z'.\overline{z.z'} = z.z'.\overline{z}.\overline{z'} = \mid z \mid^2 . \mid z' \mid^2$.

Remarques :
1) Et donc également $\boxed{\mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{\mid z \mid}, \qquad \mid \frac{z}{z'} \mid = \frac{\mid z \mid}{\mid z' \mid}.}$
2) $\begin{cases} \Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, \\ \Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2.i} \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} z+\overline{z} = 2.\Re e(z), \\ z-\overline{z} = 2.i.\Im m(z) \end{cases}$ $\boxed{\text{Donc}}$ $\begin{cases} z \text{ réel} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad \text{et} \\ z \text{ imag. pur} \Leftrightarrow \overline{z} = -z. \end{cases}$
3) Puis aisément : $\mid \Re e(z) \mid \leqslant \mid z \mid$ et $\mid \Im m(z) \mid \leqslant \mid z \mid$.

4) [Et aussi $\mathbb{U} = \{z / \mid z \mid = 1\}$ "groupe abélien" pour la multiplication ; plus tard.

En effet pour 4) :
Loi interne dans $\mathbb{U}$; puis $1 \in \mathbb{U}$ et si $z \in \mathbb{U}$, alors $1/z \in \mathbb{U}$: celà suffit.]

5.1.3 Le module comme norme

1. Théorème
$$\boxed{\begin{array}{c} z \mapsto \mid z \mid \text{ est une norme, } \textbf{c'est-à-dire } \mid z \mid \in \mathbb{R}^+ \text{ et encore 3 points :} \\ \mid z \mid = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \mid \lambda.z \mid = \mid \lambda \mid . \mid z \mid \\ \mid z + z' \mid \;\leqslant\; \mid z \mid + \mid z' \mid . \end{array}}$$

En effet
Pour l' inégalité (qu'entre réels positif) !
Elever chaque membre au carré $\boxed{\mid u \mid^2 = u.\overline{u}}$ puis :
$z.\overline{z'} + \overline{z}.z' = 2.\Re e(z.\overline{z'}) \;\leqslant\; 2. \mid \Re e(z.\overline{z'}) \mid \leqslant\; 2. \mid z.\overline{z'} \mid \;=\; 2. \mid z \mid . \mid z' \mid$. Fini.
(Bien sûr, c'est aussi : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \;\leqslant ...$ **si on** l'avait déjà prouvé).

2. Conséquence
On en déduit encore $\boxed{\big|\, \mid z \mid - \mid z' \mid \,\big| \;\leqslant\; \mid z + z' \mid \;\leqslant\; \mid z \mid + \mid z' \mid.}$

En effet : Pour l'autre inégalité, c'est comme dans le cas de $\mathbb{R}$, à revoir.

5.2 Forme trigonométrique $z = \rho.e^{i.\theta}$, $\rho = \mid z \mid \geqslant 0$

5.2.1 Définition. Formules d'Euler et opérations

- $\boxed{\text{Pour } z = x + iy \neq 0, \text{ on pose } cos(\theta) = x/\mid z \mid, sin(\theta) = y/\mid z \mid. \text{ Donc } z = \mid z \mid .[cos(\theta) + i.sin(\theta)]}$

  En particulier, tout complexe de module 1 s'écrit : $cos(\theta) + i.sin(\theta)$.

- $\boxed{\text{On note}}$ $\begin{cases} cos(\theta) + i.sin(\theta) = e^{i\theta} \\ cos(\theta) - i.sin(\theta) = e^{-i\theta} \end{cases}$ ou $\boxed{\text{par équivalence}}$ $\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases}$

Théorème $\boxed{\begin{array}{l} e^{i.0} = e^0 = 1 \qquad \mid e^{i\theta} \mid = 1 \qquad e^{-i\theta} = e^{i.(-\theta)} = \overline{e^{i\theta}} \quad \text{(l'inverse)} \\ \text{et : } \ e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i.\alpha}.e^{i\beta} \quad \textbf{grâce aux formules d'addition.} \end{array}}$

5.2.2 Interprétation de la multiplication dans $\mathbb{C}$

Soit $z' = a.z$. Posons $z = \rho.e^{i.\theta}$, $a = r.e^{i.\alpha}$. Alors $z' = r.\rho.e^{i(\alpha+\theta)}$.

On retrouve le module du produit ; et on voit que les argument (angles) s'ajoutent.

$\boxed{\text{Exemple}}$ Dessiner de 2 façons $z' = (1+i).z = z + i.z$ pour z donné.

5.2.3 Formule de Moivre

Théorème $\boxed{\text{On a } (e^{i.\theta})^n = e^{i.n.\theta}, n \in \mathbb{N}. \text{ Ou bien : } [cos(\theta) + i.sin(\theta)]^n = cos(n.\theta) + i.sin(n.\theta).}$

En fait vrai même si $n \in \mathbb{Z}$; voir le cas $n = -1$. Sera utilisé en fin de chapitre.

$\boxed{\text{Le cas } n = 2}$ $cos(2.x) + i.sin(2.x) = \big(cos(x) + i.sin(x)\big)^2$ d'où : $cos(2.x) = ...$ $sin(2.x) = ...$

$\boxed{\text{Faire personnellement le cas } n = 3 \text{ ...}}$

5.2.4 Somme ou différence de $e^{i\alpha}, e^{i.\beta}$

D'abord $\boxed{\textbf{un rappel}}$ $\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i.\theta} = 2.cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i.\theta} = 2.i.sin(\theta) \end{cases}$

Ensuite $\boxed{\text{Pour } e^{i\alpha} \pm e^{i.\beta}, \text{ on met la } \textbf{demi-somme des arguments en facteur}}$

$$e^{i\alpha} + e^{i.\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}.\left(e^{i(\alpha-\beta)/2} + e^{i(-\alpha+\beta)/2}\right) = e^{\frac{i.(\alpha+\beta)}{2}}.2.cos(\frac{\alpha-\beta)}{2}.$$

$$e^{i\alpha} - e^{i.\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}.\left(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{i(-\alpha+\beta)/2}\right) = e^{\frac{i.(\alpha+\beta)}{2}}.2.i.sin(\frac{\alpha-\beta)}{2}.$$

5.2.5 Exemple sur ce qui précède

Simplifier la somme : $C = 1 + cos(x) + cos(2x) + ... + cos(nx)$.

$\boxed{\text{Méthode à savoir :}}$ Posons $Z = 1 + e^{ix} + ... + e^{inx}$. Alors, avec $1 + q + ... + q^n$ connue :

$$Z = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i.(n+1)x)/2}.2i.sin[(n+1)x/2]}{e^{i.x/2}.2i.sin(x/2)} = \frac{sin[(n+1)x/2]}{sin(x/2)}.e^{i.n.x/2}$$

ou bien $Z = \dfrac{sin[(n+1)x/2]}{sin(x/2)}.[cos(\dfrac{n.x}{2}) + isin(\dfrac{n.x}{2})]$. Et donc : $C = \dfrac{sin\frac{(n+1)x}{2}}{sin\frac{x}{2}}.cos\dfrac{nx}{2}$.

car C est la partie réelle [que l'on peut avoir par $(Z + \overline{Z})/2$ si nécessaire].

Vérifier sur quelques cas : $n = 0$, $n = 1$; $(x = 0$ avec $sin(h)/h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ (*).)

5.3 Conséquences algébriques

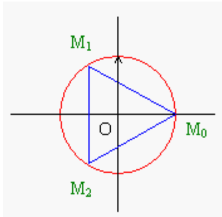
5.3.1 Equation $z^n = 1$

Théorème: L'équation $z^n = 1$ a n racines : $e^{ik.2\pi/n}, k = 0, 1, ..., n-1$ par exemple, appelées les n racines $n$ième de l'unité ; leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$ et forme polygone régulier.

Deux exemples (Démonstration au numéro suivant) :

1) $\boxed{n=3}$ $z^3 = 1$ possède 3 racines sur $\mathbb{C}$: $\mathbb{U}_3 = \{1, j = e^{i.2\pi/2}, j^2 = \overline{j} = e^{4i\pi/3}\}$; et donc : $j^3 = 1$;

$\frac{1}{j} = \overline{j} = j^2$; $1 + j + j^2 = 0$ (avec $1 + q + ...q^n$ si l'on veut). Dessin :



Attention : sur $\mathbb{C}$, on n'écrit pas $\sqrt[3]{1}$ car on ne sait pas laquelle est-ce ! On dit une racine cubique ...

2) $\boxed{n=5}$ Posons $\omega_k = e^{ik.2\pi/5}$ et $\omega = \omega_1 = e^{2.\pi/5}$; alors les 5 racines 5ème sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.
On a : $\omega^5 = 1$ $1/\omega = \overline{\omega} = \omega^4$ $(\omega^5 = 1)$ et $1 + \omega + ... + \omega^4 = 0$. Faire un dessin.

5.3.2 Equation $z^n = a, \quad a \neq 0$

Théorème: L'équation $z^n = a$ possède n racines sur $\mathbb{C}$, sommets d'un polygone régulier à n côtés. **De plus,** si $\omega_k = e^{ik\pi/n}$ et z_1 une racine, les racines sont : $z_1.\omega_k$, $k = 0, 1, ..., n-1$

$\boxed{\textbf{Exemples}}$

1) $x^3 = 8$: sur $\mathbb{R}$ **une** solution ; sur $\mathbb{C}$ **trois** solutions : 2; $2j$; $2j^2$ (triangle équilatéral), car $(x/2)^3 = 1$.
2) $x^4 = -1$; (4 racines : $e^{i\pi/4}$, $e^{3.i\pi/4}$ et les conjuguées) puis (*) **factoriser** $x^4 + 1$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
(Début : on peut poser $x = \rho.e^{i\theta}$, $-1 = e^{i.\pi}$... Voir que les racines sont aussi 2 à 2 opposées !)
3) $A^4 = B^4 \iff A = B.\omega_k$, $\omega_k \in \{1, i, -1, -i\} = \mathbb{U}_4$. **Donc 4 cas sur $\mathbb{C}$!**

Démonstration du Théorème :

1) Posons $z = \rho.e^{i\theta}, a = r.e^{i\alpha}$; alors $z^n = a \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n.\theta = \alpha (2.\pi) \end{cases}$; ou $\rho = \sqrt[n]{r}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k.2.\pi}{n}$.
2) De plus, si $z_1^n = a$, l'équation devient $(z/z_1)^n = 1$. Donc $z/z_1 = \omega_k$ est une racine nième de l'unité.

5.3.3 Le second degré [Un bon exemple suffit]

1. L'équation $z^2 = \Delta$, plutôt notée ici $\delta^2 = \Delta$.
   - Une méthode trigonométrique vient d'être vue (2 racines opposées : $\pm\delta$ avec $\delta^2 = \Delta$).
   - Voici une méthode algébrique :

   Posons $\delta = u + iv$ et $\Delta = p + iq$; $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = p \ (1) \\ 2.u.v = q \ \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = p \ \ (1) \\ 2.u.v = q \ \ \ (2) \\ u^2 + v^2 = \sqrt{p^2 + q^2} \ (3) \end{cases}$

   En effet, faire $(1)^2 + (2)^2$; mais il y a un moyen meilleur, faire $| \delta^2 | = | \Delta |$. Astuce ! D'où δ.

2. $az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$, coefficients complexes.
   Comme dans $\mathbb{R}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$: $az^2 + bz + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a(z - z_1)(z - z_2)$

   $\boxed{\text{Il y a deux solutions qui sont donc } \frac{-b \pm \delta}{2a} \text{ ; leur somme vaut } z + z' = \frac{-b}{a}, \text{ leur produit } zz' = \frac{c}{a}.}$

   Si coefficients réels, les racines sont réelles ou complexes conjuguées. Car $\Delta = -k^2 \in \mathbb{R}^-$; $\delta = \pm i.k$

3. Rappels

• $\boxed{\text{Ayant la somme } s \text{ et le produit } p \text{ de 2 complexes, ils sont solutions de : } \mathrm{x}^2 - s.\mathrm{x}+p=0.}$

• $\boxed{\text{La demi-somme est le milieu des racines.}}$ (Note. Voici des "formules réduites" :

Si on a : $az^2 + 2.b'z + c = 0$, en posant : $\Delta' = (b')^2 - ac$, $(\delta')^2 = \Delta'$, les racines sont : $\dfrac{-b' \pm \delta'}{a}$)

• Dans le cas de coefficients et racines réelles soit $f(x) = ax^2+bx+c$. Pour avoir la position d'un réel x_0 par rapport aux racines (si $\Delta > 0$), on a $\boxed{f(x_0) \text{ est du signe de } a \iff x_0 \text{ extérieur aux racines.}}$
S'il est extérieur, on compare x_0 avec la demi-somme, pour savoir s'il est à gauche ou à droite ...

Résoudre

1) $z^2 + z + 1 = 0$
2) $z^2 - z + 1 = 0$
3) $z^2 = \overline{z}$
4) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
5) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$

Solutions :

1) Racines $\dfrac{-1 \pm i.\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire j et j^2 ! et $x^2 + x + 1 = (x - j)(x - j^2)$.
2) En changeant x en $-x$: $x^2 - x + 1 = (x + j)(x + j^2)$
3) Attention : ne pas dire qu'il n'y a que 2 racines ! $z = \rho.e^{i\theta}$ conduit à $\rho^2.e^{2i\theta} = \rho.e^{-i\theta}$; alors $\rho = 0$; ou bien $\rho = 1$ et $3\theta = 0(2.\pi)$ D'où 4 racines : $\{0, 1, j, j^2\}$. [$z = x + i.y$ possible]
4) Equation "bicarrée" ; on peut poser $Z = z^2$ ...
5) Ici $\Delta = 25 - 196 - 140i + 40i + 96 = -75 - 100i = -25(3 + 4i)$; soit u, v : $(u + i.v)^2 = 3 + 4i$, on trouve $\pm(2 + i)$ donc $\delta = \pm 5i.(2 + i) = \pm 5(-1 + 2i)$ etc ; vérifier par somme et produit.

5.3.4 Théorème de D'Alembert-Gauss

1. Enoncé (admis)

> Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ se factorise en produit de polynômes de degré 1 : $P(\mathrm{x}) = a_0\mathrm{x}^n + a_1\mathrm{x}^{n-1} + ... + a_n = a_0(\mathrm{x}\text{-}z_1)(\mathrm{x}\text{-}z_2)...(\mathrm{x}\text{-}z_n)$. $(*)$

Les **racines** étant distinctes ou confondues : on dit que tout polynôme est **scindé** sur $\mathbb{C}$.

2. Formules de Viète. $\boxed{\text{Notons}}$ $\left\{\begin{array}{c} \sigma_1 = z_1 + z_2 + ... + z_n \\ \sigma_2 = z_1.z_2 + ... + z_{n-1}z_n \\ \sigma_3 = z_1z_2z_3 + ... \\ ... \\ \sigma_n = z_1.z_2....z_n \end{array}\right.$ "fonctions symétriques élémentaires" ;

Elles sont liées aux coefficients par $\boxed{\sigma_1 = -a_1/a_0; \quad \sigma_2 = +a_2/a_0; \quad ... \quad \sigma_k = (-1)^k.a_k/a_0; \quad ...}$

Démonstration. Conséquence de $(*)$: développer et identifier !

Exemples

1) Revoir le cas du second degré ! Cas de $a.z^3 + b.z^2 + c.z + d$?

2) (*) Soit $P(x) = x^3 + px + q$. Calculer $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ à l'aide de p et q.
Réponse. S_2 est aussi une fonction symétrique ; mais on ne dit pas "élémentaire".
$S_2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ donc $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0^2 - 2p$.

3. Remarque. Soit z une racine de P ; c'est-à-dire : $a_0.z^n + ... + a_n = 0$.
En conjugant, avec $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$ et $\overline{u.v} = \overline{u}.\overline{v}$, on obtient : $\overline{a_0}.\overline{z}^n + ... + \overline{a_n} = 0$.
Notant alors $\overline{P}(\mathrm{x}) = \overline{a_0}.\mathrm{x}^n + \overline{a_1}.\mathrm{x}^{n-1} + ... + \overline{a_n}$, on en déduit :

• Si z est une racine de P, alors $\overline{z}$ est une racine de $\overline{P}$ et surtout :

• **Si P est à coefficients réels $(P = \overline{P})$, les racines non réelles sont conjuguées.**

5.3.5 Exemples

1. Factoriser x^4+x^2+1 par 3 méthodes.

   1) Ayant les racines de z^2+z+1 $(j,\ j^2)$, on doit résoudre $x^2=j$. $\boxed{\text{Astuce : } j=j^4}$ donc $x=\pm j^2$ et pour les 2 dernières, il suffit de conjuguer. $x^4+x^2+1=1.(x-j)(x-j^2)(x+j)(x+j^2)$

   2) On peut voir que j est une racine $(1+j+j^2=0)$; donc $\overline{j}$ aussi (polynôme à coefficients réels) et $-j$, $-\overline{j}$ aussi par parité. Même réponse.

   3) Autre astuce : $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ sur $\mathbb{R}$; on sait finir sur $\mathbb{C}$!

2. Si $n \geqslant 2$, vérifier que les n racines de $x^n-1=0$ ont une somme nulle.

   1ère façon : $1+\omega+...+\omega^{n-1}=...$ avec $\omega \neq 1$.

   2ème façon : O centre de symétrie du polygône régulier.

   3ème façon : les formules de Viète ! $(\sigma_1=-coeff.\ de\ x^{n-1}/coeff.\ de\ x^n\ ...)$

3. (*) Résoudre $(z+1)^n=(z-1)^n$ (Eq) équation polynômiale de degré $n-1$ ($n-1$ racines).

   $z=1$ non racine et (Eq) $\Leftrightarrow (\dfrac{z+1}{z-1})^n=1$. Donc $\dfrac{z+1}{z-1}=\omega_k$ (cf. les racines nièmes de 1) ; on effectue : $z+1=z.\omega_k-\omega_k$ ou $z=\dfrac{\omega_k+1}{\omega_k-1}=\dfrac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}+1)}{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}-1)}=\dfrac{2cos(k\pi/n)}{2isin(k\pi/n)}=-i.cot(\dfrac{k.\pi}{n})$, avec $k=0,1,...n-1$ par exemple. Mais il faut exclure $k=0$: $n-1$ racines.

   Remarques 1) On peut voir aussi que : z racine $\Longleftrightarrow -z$ racine **sur l'équation** ...
   2) Avec le module voir dès le début que les racines sont dans $\mathbb{R}.i$: $\mid z-1\mid=\mid z+1\mid$; $AM=BM$ où $A(1)$, $B(-1)$, $M(z)$ donc M sur la médiatrice de $[AB]$!...

5.4 Conséquences trigonométriques

5.4.1 (*) Calcul de certaines sommes (difficiles)

1. Calcul de $C=\sum_{k=0}^{n} cos(a+kx)$. Comme vu à la fin du II ... $C=\dfrac{sin[(n+1).x/2]}{sin(x/2)}.cos[a+\dfrac{nx}{2}]$.

2. Cas de $C=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.cos(a+kx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(a+k.x)$. Poser $Z=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.e^{i.(a+kx)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(a+kx)}$

   Alors $Z=e^{ia}.(1+e^{ix})^n=e^{ia}.[e^{ix/2}.2.cos(\dfrac{x}{2})]^n=2^n.[cos(\dfrac{x}{2})]^n.e^{i(a+\frac{n.x}{2})}$.

   Chaque égalité à bien voir ! (Utiliser la formule de Moivre, le binôme de Newton, la somme $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$, le rappel ci-dessous...). Et donc : $C=2^n.cos^n(\dfrac{x}{2}).cos(a+\dfrac{n.x}{2})$ (vérifié si $x=0$).

3. Cas de $C=\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+...$ Comment aller de 3 en 3 ? Avec le complexe j !

   $(1+j)^n=C_n^0+C_n^1.j+C_n^2.j^2+C_n^3+C_n^4.j+...$ [Mettre les nouvelles notations]
   $(1+j^2)^n=C_n^0+C_n^1.j^2+C_n^2.j+C_n^3+C_n^4.j^2+...$
   $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...$ les 3 racines cubiques ! $3C=somme.des.lignes$ car $1+j+j^2=0$.
   Puis voir que $(1+j)^n=(1+e^{i2\pi/3})^n=[e^{i\pi/3}.2cos(\pi/3)]^n=e^{in\pi/3}$; $(1+j^2)^n$ étant son conjugué et rappel $\boxed{e^{ix}+e^{-ix}=2.cos(x),\ \ e^{ix}-e^{-ix}=2i.sin(x)}$ Aussi : $1+j=-j^2=e^{i\pi/3}$... Finir !

5.4.2 Expression de $cos^n(x), sin^n(x)$ à l'aide de $cos(px), sin(qx)$: Linéarisation

1. D'abord, il y a $\boxed{2}$ opérations linéaires : addition, multiplication par une constante.

2. Exemples

   On sait que $\boxed{cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sin^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2}}$ (très utile pour les primitives !)

3. Méthode :

   $\boxed{\text{On part de}}$ $cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ on élève à la puissance n ; puis le rappel.

   . Cas de $cos^5(x)$?

   . Cas de $cos^3(x).sin^4(x)$? On peut mettre de suite des exponentielles partout ! Alors : $(a + b)^3$; $(a - b)^4$ connus ! C'est assez rapide en alignant les termes analogues ...

5.4.3 Expression de $cos(nx), sin(nx)$ à l'aide de $cos^p(x), sin^q(x)$; problème inverse

1. Exemples

   On a $\boxed{cos(2x) = 2.cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x) = cos^2(x) - sin^2(x), \quad sin(2x) = 2sin(x)cos(x)}$

   Donc plusieurs écritures possibles ici, parfois !

2. Méthode : $\boxed{\text{Départ}}$ $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$ exponentielle isolée ! $e^{i.n.x} = (e^{i.x})^n$ ou bien :

   $\boxed{\text{F. de Moivre } cos(n.x) + isin(n.x) = [cos(x) + isin(x)]^n}$ puis parties réelle et imaginaire.

   . Faire le cas $n = 3$. Trouver : $cos(3x)$; $sin(3x)$; et déduire que $tan(3x) = \dfrac{3.tan(x) - tan^3(x)}{1 - 3.tan^2(x)}$

   Réponse en Remarque ci-dessous.

   . Et pour $sin(3x).sin(5x)$? Transformer un produit en somme : cf Réels et trigonométrie.

   Ici : $sin(a).sin(b) = \dfrac{-1}{2}.[cos(a + b) - cos(a - b)]$ ...

3. Remarque. $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$, $\quad cos(3x) = cos^3(x) - 3.cos(x).sin^2(x) = 4.cos^3(x) - 3.cos(x)$

   Cas de : $cos(4x)$... à l'aide de $cos(x)$ seul (ci-dessous) ?

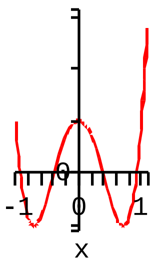
Si on pose P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=2.x$^2 - 1$, P_3(x)=4.x^3−3.x, on constate au début que $\boxed{P_n(cos(x)) = cos(nx).}$ Ceci se généralise :

- soit par la formule de Moivre ;
- soit par récurrence avec : $cos[(n + 1)x] + cos[(n - 1)x] = 2.cos(nx).cos(x)$.

De ceci, on en déduit l'existence de P_n. Il reste à voir leur unicité : **cf. Polynômes.**

(On dit : Polynômes de Tchébytchev de 1ère espèce)

Trouver : $P_4(\text{x}) = 8\ \text{x}^4 - 8\ \text{x}^2 + 1$.



M+ **Exercices: Complexes. Aspect algébrique et trigonométrique.** **PTSI**

---

1. Simplifier : (a) $(1+i.\sqrt{3})^6$; (b) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$.
2. Forme trigonométrique de $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$, $z_2=1-i$, $z=\dfrac{z_1}{z_2}$; déduire $cos(\dfrac{\pi}{12})$. Autre façon ?
3. (*) Module et argument de : $\dfrac{1+cosx+i.sinx}{1-cosx-i.sinx}$.
4. Résoudre
   (a) $z^4=-1$ puis factoriser X^4+1 sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
   (b) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$. Somme des racines ?
   (c) $z^2=\bar{z}$; puis : (*) $z^5=9.\bar{z}$ (Trouver 7 solutions !)
   (d) $z^4+2z^2+4=0$; puis : (*) $z^4-30z^2+289=0$.
   (e) $iz^3+(2i-1)z^2-(i+4)z+3(2i-1)=0$ **sachant qu'une racine est réelle**.
   (f) (*) $(z+1)^n=(z-1)^n$. Commentaires ? (*) Déduire $\forall p\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant p} cot(\frac{k\pi}{2p+1})=\frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.
5. Exprimer $cos(4x)$ en fonction de cos^px, sin^qx. Idem pour $sin(4x).sin(x)$.
6. Linéariser cos^5x. Idem pour $sin^3x.cos^2x$ et sin^6x.
7. (*) Simplifier
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k.cos(x+k\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.cos(x+k\alpha)$
   (b) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+...$? puis $C_n^0-C_n^2+C_n^4-...$?
   (c) $cos(x)+cos(x+\alpha)+cos(x+2\alpha)+...+cos(x+n\alpha)$.
8. Montrer qu'une C.N.S. pour que $(\dfrac{1+iz}{1-iz})^n=a$ ait une racine réelle est $\mid a\mid=1$. Préciser-les.
9. (*) Equation de degré 3.
   (a) Etudier l'équation $z^3+pz+q=0$, sur $\mathbb{C}$, en posant $z=u+v$, avec $3.u.v+p=0$.
   (b) Cas des coefficients (et racines) réels ?
10. (*) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ simplifier la somme : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\,e^{i.2k\pi/n}$.
11. (*) Résoudre : $(\dfrac{z-i}{z+i})^n+(\dfrac{z-i}{z+i})^{n-1}+...+(\dfrac{z-i}{z+i})+1=0$.
12. (*) Avec $Z=z+\dfrac{1}{z}$: $z^4-2(cos\alpha+cos\beta)z^3+2(1+2cos\alpha.cos\beta)z^2-2(cos\alpha+cos\beta)z+1=0$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
13. (*) Soit $x_0=1, y_0=0$; $x_n=x_{n-1}+y_{n-1}$, $y_n=y_{n-1}-x_{n-1}$. Avec x_n+iy_n , simplifier x_n, y_n, $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x_k, B_n$ de même. [z_n géom. ; $y_n=-\sqrt{2}^{\,n}.sin(n\pi/4), B_n=\sqrt{2}^{\,n+1}.cos((n+1)\pi/4)-1$].

Chapitre 6

Complexes : Aspect géométrique

6.1 Distances et angles

6.1.1 Distances

Avec $\mid z \mid = \sqrt{z.\overline{z}} = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$, M d'affixe z, on a $\boxed{\mid b-a \mid = AB = \|\overrightarrow{AB}\|}$ A et B d'affixes a et b.

6.1.2 Angles

On a les relations : $\boxed{Arg(b-a) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})(2.\pi) \qquad Arg(b/a) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})(2.\pi)}$

En effet

pour (1), prendre M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$; pour (2), $Arg(b/a) = Arg(b) - Arg(a)$.

Conséquence $\boxed{Arg\, \dfrac{d-c}{b-a} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\ (2.\pi) \text{ et } \mid \dfrac{d-c}{b-a} \mid = \dfrac{CD}{AB}.}$ D'où $Arg\, \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = \widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}(2.\pi)$

Remarques : $Arg(-Z) = Arg(Z) + \pi$. $\quad -Arg(Z) = Arg(\overline{Z})$: à ne pas confondre.

6.1.3 Alignement. Orthogonalité

- Pour $A \neq B$ A, B, C alignés $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}/ \quad c-a = k(b-a)$

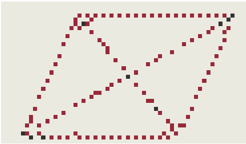
  Plus généralement $\boxed{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \Longleftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}.}$

- Pour $A \neq B$ $(A, B)(A, C)$ orthogonaux $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}.i/ \quad c-a = k(b-a)$

  Plus généralement $\boxed{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ orthogonaux} \Longleftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}.i.}$

6.1.4 Théorème du parallélogramme ou de la médiane : exercice

Soit un triangle OAB, I milieu de $[A, B]$, J tel que I milieu de $[O, J]$; c'est-à-dire que $OAJB$ est un



parallélogramme. Alors : $\boxed{OA^2 + OB^2 = 2(OI^2 + IA^2) = \dfrac{1}{2}(AB^2 + OJ^2)}$

(qui sera revu avec le produit scalaire). Formule analogue :

Si $\overrightarrow{OI}$ est d'affixe u, $\overrightarrow{IA}$ est d'affixe v, l'égalité se traduit par $\boxed{\mid u+v \mid^2 + \mid u-v \mid^2 = 2(\mid u \mid^2 + \mid v \mid^2).}$

Démonstration avec $\mathbb{C}$:

On a $\mid u+v \mid^2 = (u+v).(\overline{u+v}) = (u+v).(\overline{u} + \overline{v}) = \mid u \mid^2 + \mid v \mid^2 + u.\overline{v} + \overline{u}.v$

(à noter que $u.\overline{v} + \overline{u}.v$ est réel par différence !) Idem : $\mid u-v \mid^2 = ...$ Et faire la somme.

6.1.5 Pentagone régulier à la règle et au compas : exercice

1. Soit $\boxed{\omega = e^{i.2\pi/5}}$; alors $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$.

   Donc ω est racine de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ (les 4 racines étant $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4 = \overline{\omega}$).

2. Cette équation, du type $\underline{x^4 + a.x^3 + b.x^2 + a.x + 1 = 0}$, est un cas particulier d'équation réciproque.

   Pour la résoudre, on pose $\boxed{y = x + 1/x}$ (0 n'est pas racine !) alors : $y^2 - 2 = x^2 + 1/x^2$.

   Diviser par x^2, reporter : $y^2 - 2 + a.y + b = 0$ ou $y^2 + y - 1 = 0$ dans notre cas : $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   Connaissant y, on peut revenir à x par une équation du second degré. Inutile ici :

   $x = \omega = e^{i.2.\pi/5} \Rightarrow y = e^{i.2\pi/5} + e^{-i.2\pi/5} = 2.cos(\dfrac{2\pi}{5})$ $\underline{cos(\dfrac{2.\pi}{5}) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$ $(cos(\dfrac{4.\pi}{5}) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}.)$

3. Construction : Ayant une droite muni de points O et A tel que $OA = 1$, on sait construire la perpendiculaire à OA en O ; puis ... $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$; $\sqrt{5} - 1$; puis $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ puis $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et ω !

4. Remarque. Soit $M_0M_1M_2M_3M_4$ ce pentagone régulier M_0 d'affixe 1, M_1 d'affixe ω.

   Nous allons voir que $\boxed{\dfrac{M_0M_2}{M_0M_1} \text{ est égal au nombre d'or, noté usuellement } \varphi.}$

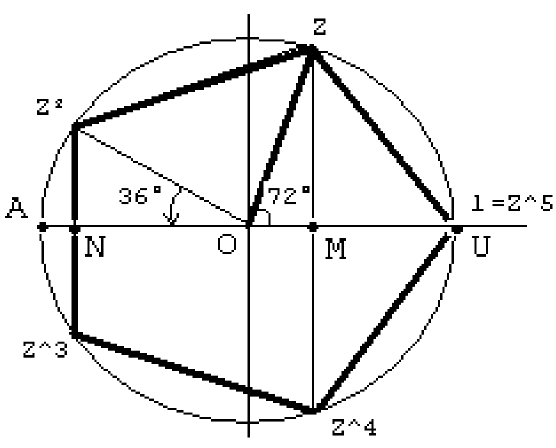
   • Déjà, une définition du nombre d'or : φ est la racine positive de $x^2 = x + 1$ (pour avoir le carré, ajouter 1) ; ou de $\dfrac{1}{x} = x - 1$ (pour avoir l'inverse, retrancher 1) ; c'est-à-dire $\boxed{\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

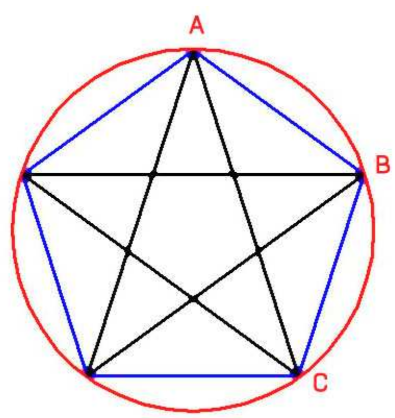
   • Maintenant, nous devons voir que $\left| \dfrac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} \right| = \varphi$:

   On a : $|\, \omega + 1 \,| = |\, e^{i\pi/5}.2.cos(\dfrac{\pi}{5}) \,| = -2.cos(4.\dfrac{\pi}{5}) = 2.(1 - 2.cos^2(2.\dfrac{\pi}{5})) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Fini.

   (Pour relier $cos(\dfrac{\pi}{5})$ à $cos(2.\dfrac{\pi}{5})$, très astucieux de dire $cos(\dfrac{\pi}{5}) = -cos(4.\dfrac{\pi}{5})$.)

5. Les angles du Pentagone régulier ; et les deux pentagones, convexe et croisé :





On a donc vu que : $\underline{AC/AB = \varphi}$.

Complément : Interventions du nombre d'or

– en architecture/et sculpture : le théatre d'Epidaure (fin du 4ème siècle avant Jésus-Christ). 34 gradins près du théatre ; 21 ensuite ; or $\frac{34+21}{34} = 1,6176$ ... $\frac{34}{21} = 1,619$ ... ; alors que $\varphi = 1,618$ ...
C'est d'ailleurs comme celà qu'est défini φ à savoir un rectangle de cotés $x < y$ tels que si on enlève un carré (x,x), il reste un rectangle semblable : $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} = \varphi$.
également : les pyramides, **le Parthénon**, les maitres d'oeuvres, la décoration arabe (Kairouan en Tunisie ? **Dôme** à Jérusalem), la célèbre **Pieta** de Michel-Ange à Rome (Michel Ange, avec Raphaël Sanzio et Léonard de Vinci, sont appelés : "les 3 génies de la Renaissance"). Aussi, une chapelle à Notre Dame de Pitié à Bonson (42) ! par exemple. Enfin, un artiste assez récent : Le Corbusier ...

– en peinture : Le célèbre tableau de Léonard de Vinci, **L'Annonciation.** Les peintres : Nicolas Poussin **(Les Bergers d'Arcadie) ;** Vélasquez **(L'Adoration des Mages ; Saint Antoine abbé et Saint Paul Ermite) ;** Raphaël : **(La Madone du Belvédère).**

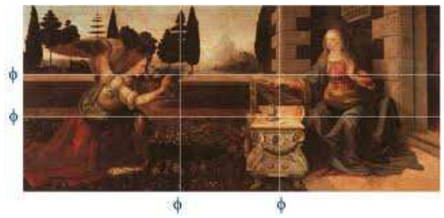
– /et gravure : **Vierge à l'Enfant** de Raphaël (tiré du "Que sais-je ?" sur le Nombre d'Or).

Ci-après : Le Parthénon. Au sculpteur grec Phidias, qui l'a décoré, on doit la lettre Phi.

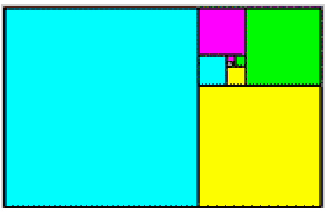
Au Dôme du Rocher à Jérusalem (aussi 3ème ville "sainte" de l'Islam) :
Dans la décoration en mosaïque des murs extérieurs, les Arabes du VIIIème siècle ont utilisé le rectangle $\sqrt{5}$ à l'intérieur du Rectangle d'or.

Michel-Ange, La Pieta

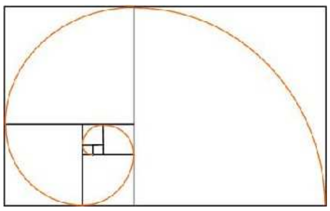
Léonard de Vinci



Rectangles d'or : $\frac{L}{l} = \varphi$



Spirale d'or dans rectangle d'or



Théatre d'Epidaure

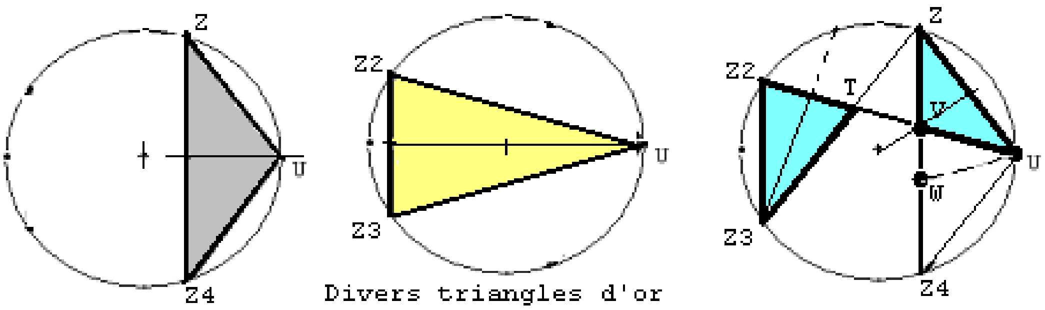
– en arithmétique/algèbre : ce qui précède. Et **la suite de Fibonnaci** $(0,\ 1,\ 0+1=1,\ 1+1=2,\ 1+2=3,\ 2+3=5,\ ...)$ $[u_{n+2} = u_{n+1} + u_n]$ en voyant que u_{n+1}/u_n s'approche du nombre d'or.

– en géométrie : Le pentagone régulier, ci-dessus. (Difficile/curieux : "l'ensemble de Mandelbrot".)

– et analyse : Les "fractions continues" $[1,1,1...] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$, égale au nombre d'or.

D'autres illustrations [1] :

Les deux triangles d'or (obtenus à partir du pentagone régulier) :



Et encore quelques oeuvres de peintres (ou sculpteurs déjà cités) en lien avec le nombre d'or :

- Vélasquez : l'adoration des Mages (Espagne)
- Léonard de Vinci : Sainte Anne, La Vierge et l'Enfant (Italie) [2]
- . dans la nature : le Nautile (en spirale), le tournesol, la pomme de pin
  . en architecture : Gaudi (en particulier La Sagrada Familia, à Barcelone)
  . et d'autres tableaux ... la plupart étant aussi des trésors concernant la perspective ! [3]

---

[1] Des fractions continues, on déduit que : "$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'irrationnel le plus éloigné des rationnels" (**Emile Borel**).

[2] Léonard de Vinci, qui a mis au point la technique du "sfumato" (= du "clair-obscur") "modèle vaporeux faisant imperceptiblement passer le colori ou le ton, **du clair à l'obscur**" : cf. la "Perspective atmosphérique", Jan Van Eyck.

[3] **Paolo Uccello, Alberti ... au début de la perspective (difficile)** ; cf. géométrie projective ...

6.2 Tranformations (applications) $M(z) \mapsto M'(az+b), a \neq 0$

6.2.1 Translations $M(z) \mapsto M'(z' = z+b)$

1. $\boxed{\text{La transformation } M(z) \mapsto M'(z'=z+b) \text{ est une translation de vecteur } (b_1,b_2) \text{ si } b = b_1 + ib_2.}$

2. Note. Mais il y a un autre point de vue intéressant et **déjà signalé :** $\boxed{Z = z - z_0}$ s'interpréte comme une translation de repère ; nouvelle origine (x_0, y_0) ; ou bien : $\boxed{X = x - x_0,\ Y = y - y_0}$

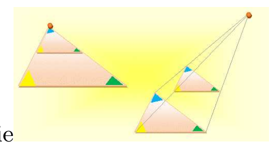
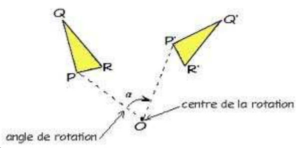
6.2.2 Similitude affine directe $M(z) \mapsto M'(z' = a.z + b)$ où $a = r.e^{i.\alpha} \neq 0$

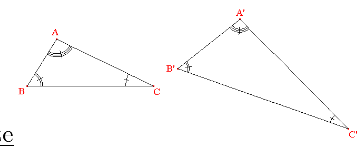
1. Si $a = 1$ c'est une translation connue. Si $a \neq 1$ une similitude "à centre" soit : la composée commutative d'une rotation affine d'angle $\alpha = Arg(a)$ et d'une homothétie de rapport $r = \mid a \mid$, chacune de centre le seul point fixe. Et la composée de similitudes affines directes en est une.

Démonstration. **Plutôt, bien expliquer un exemple du cas général** $a \neq 1$

- L'équation $z' = z$ (aux points fixes éventuels) ou $a.z + b = z$ ou $z(1-a) = b$ donne une et une seule solution : $z = z_0$, si $a \neq 1$. Par différence entre $\begin{cases} z' = az + b \\ z_0 = a.z_0 + b \end{cases}$ on a : $z' - z_0 = a.(z - z_0)$, $\boxed{z' - z_0 = r.e^{i\alpha}.(z - z_0)}$ qui s'interpréte comme une similitude à centre. Et cas $a = 1$ déjà vu.
- Si $f : z \longmapsto a.z + b$, $g : z \longmapsto c.z + d$, il est facile de voir que gof ($\neq fog$ en général) est du même type $gof : z \longmapsto a.c.z + cte$. Donc $\boxed{gof \text{ Translation} \iff a.c = 1.}$ Dessins à faire !

2. **Remarque**. Une homothétie de centre M_0, de rapport -2, **est** une similitude affine directe de centre M_0, de rapport $+2$, d'angle π. D'ailleurs on a une homothétie ou une translation $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^*$.

Homothétie  Rotation 

Similitude directe 

6.2.3 Déplacements $M(z) \mapsto M'(z' = e^{i.\alpha}.z + b)$: cas particulier où $\mid a \mid = 1$

1. **Description** : Si $\alpha = 0(2.\pi)$, $M(z) \mapsto M'(z' = e^{i.\alpha}.z + b)$ est une translation (vue) et si $\alpha \neq 0(2.\pi)$ une rotation de centre l'unique point fixe, d'angle α : $z' - z_0 = e^{i\alpha}.(z - z_0)$
Et : la composée de 2 déplacements est un déplacement (ou "isométrie affine positive").

Démonstration
Ci-dessus. $\boxed{\text{Si } a \neq 1 : z' - z_0 = e^{i\alpha}.(z - z_0)}$ interprété comme une rotation. Cas $a = 1$ connu.

2. **Remarques. Exercices**

1) La composée de 2 rotations affines planes est un déplacement : rotation **ou translation** !

2) Exemple. $f : z' = e^{i.\alpha}z + b$; $g : z' = e^{-i.\alpha}z + d$; gof : $z' = e^{-i.\alpha}(e^{i.\alpha}z + b) + d = ...$
$fog \neq gof$ en général ! et chacune est une **translation**.

3) Si $b = 0$, on dit rotation de centre O. On dira aussi : "rotation vectorielle" d'angle α.

4) La symétrie par rapport à M_0 est une isométrie affine directe facile : $rot(M_0, \pi)$ $\boxed{\dfrac{z + z'}{2} = z_0.}$

5) $z' = -j.z - j^2$: rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$, de centre M_0 : $z' = z \Rightarrow z = 1$. [Et $z' - 1 = -j.(z - 1)$]

6) (*) Exercice. Montrer qu'une "Condition nécessaire et suffisante" pour que $A(a), B(b), C(c)$ forment un triangle équilatéral direct est que $a + bj + cj^2 = 0$.

(On écrit : $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$ car C se déduit de B par la rotation de centre A, d'angle $\pi/3$ et on effectue ; on peut trouver aussi $c + aj + bj^2 = 0$) ...

6.3 Au sujet de $M(z) \mapsto M'(a.\overline{z}+b), a \neq 0$

6.3.1 Symétries orthogonales par rapport à une droite affine

1. Théorème. L'expression de la symétrie orthogonale / Ox est : $z' = \overline{z}$. Plus généralement :

   $\boxed{z' = e^{2.i.\alpha}.\overline{z} \text{ est la sym. orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire } \alpha,\ y = x.tan(\alpha).}$

   Démonstration
   Posons $z = \rho.e^{i\theta}$; $z' = \rho.e^{i\varphi}$; la symétrie par rapport à la droite voulue est telle que $\theta + \varphi = 2.\alpha$; (faire un dessin !) donc $\varphi = 2\alpha - \theta$; d'où le z' annoncé.

   Faire attention à l'exposant $2.\alpha$ et non pas α dans l'exponentielle ! Exemples :
   $z' = e^{i.\alpha}.\overline{z}$ est la symétrie orthogonale / à la droite d'angle polaire $\dfrac{\alpha}{2}$, $y = x.tan(\dfrac{\alpha}{2})$!
   La symétrie orthogonale/Oy : $z' = e^{i.\pi}.\overline{z} = -\overline{z}$. Et $z' = i.\overline{z}$: symétrie orthogonale/$y = x$.

2. **Par translation d'axes :** (*)

La symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D}$ passant par M_0, d'angle polaire α, est telle que $z' - z_0 = e^{2i\alpha}.(\overline{z - z_0})$ ou $z' - z_0 = e^{2i\alpha}.(\overline{z} - \overline{z_0})$.

3. Composition (exercice possible)

Si s_1 et s_2 sont 2 symétries orthogonales par rapport à des droites, $s_2 o s_1$ est : si parallèles, une translation de $2\overrightarrow{H_1H_2}$; si sécantes en I, une rotation $[I, 2.\widehat{D_1, D_2}]$.

   Démonstration
   Cas 1) Si $D_1 = Ox$ et $D_2 : y = h$. Mêmes abscisses et $y_1 + y = 0$, $y_2 + y_1 = 2h$, d'où $y_2 = y + 2h$.
   Cas 2) Si $D_1 = Ox$ et $D_2 : y = x.tan(\alpha)$. Alors $z_1 = \overline{z}$, $z_2 = e^{2.i.\alpha}.\overline{z_1}$ donc $z_2 = e^{2.i.\alpha}.z$. Fini.

   Remarque : La composition est "non interne" dans l'ensemble des symétries orthogonales.

6.3.2 (*) Complément : isométries et similitudes affines indirectes

Hors du cours. Au plus une source d'exercices si le reste est assimilé. Type : $z' = a.\overline{z} + b$. [4]

---

[4] Description géométrique :

1. $f : M(z) \mapsto M'(e^{2.i.\alpha}\overline{z} + b)$ (antidéplacements $\mid a \mid = 1$). Un antidéplacement est :
   - une symétrie orthogonale, si elle a au moins un point fixe M_0 ; (forme ci-dessus par différence).
   - sinon, une "symétrie-glissée" ; c'est-à-dire la composée commutative $sot = tos$ d'une telle symétrie avec une translation le long de son axe ; de plus cette décomposition est unique.

   . Unicité : Si $f = sot = tos$, $fof = tot$ d'où t ; puis s !
   . Existence : Soit $s_1 : M(z) \longmapsto M_1(e^{2.i.\alpha}\overline{z})$, t_1 une translation de direction $e^{i.(\alpha+\pi/2)}$ et $t_2 : e^{i.\alpha}$; on a $f = t_2 o t_1 o s_1$. Il suffit de voir que t_1 s'écrit $s_2 o s_1$, d'après la composition ci-dessus ; alors $f = t_2 o s_2 o s_1 o s_1 = t_2 o s_2$ et ici commutatif (c'est clair, géométriquement).

2. $f : M(z) \mapsto M'(a.\overline{z} + b), a \neq 0$. $z' = a.\overline{z} + b$, dite similitude indirecte est :
   - Si $\mid a \mid = 1$, on a une isométrie affine négative connue : le cas précédent.
   - Si $\mid a \mid \neq 1$, f a un et un seul point fixe I. C'est la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par I et d'une homothétie de centre I, de rapport positif.

   En effet, si $\mid a \mid \neq 1$; une fois le point fixe unique vu (calcul mal commode !), par différence :
   $z' - z_0 = a.(\overline{z - z_0})$; donc $Z' = a.\overline{Z}$ par translation de repère ; ou : $Z' = r.e^{i.\alpha}\overline{Z}$. Fini.

6.4 (*) Complément : au sujet de l'inversion géométrique

6.4.1 Définition :

$f: \quad M(z) \mapsto M'(z' = \dfrac{k}{\overline{z}}),\ k \in \mathbb{R}^*$ est définie pour $M \neq O$; et est telle que :
O, M, M' alignés et $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$; on l'appelle $\boxed{\text{inversion de pôle } O \text{ et de puissance } k.}$
f est bijective de $\mathcal{P}^*$ $(= \mathcal{P} \backslash O)$ dans $\mathcal{P}^*$ et $f^{-1} = f$. (=involutive) ; (souvent $k = 1$.)

En effet:
1) $z' = \dfrac{k}{\overline{z}}$ se traduit par $z' = \dfrac{k.z}{\mid z \mid^2}$ ou $\boxed{\overrightarrow{OM'} = \dfrac{k}{OM^2}.\overrightarrow{OM}}$ noté $(*)$;
2) d'où O, M, M' alignés ; et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$.

Pour f bijective de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}^*$: $fof = Id$ est clair géométriquement.

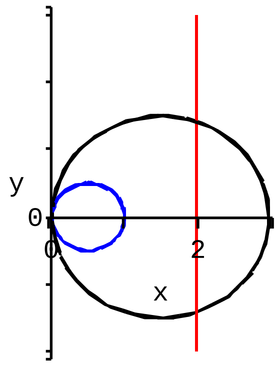
$\boxed{\text{Et donc}}$ avec $(*)$ $\begin{cases} x' = \dfrac{k.x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{k.y}{x^2+y^2} \end{cases}$ et comme $f^{-1} = f$, on a aussi : $\begin{cases} x = \dfrac{k.x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{k.y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}$

Remarque : changer k, c'est simplement faire une homothétie de centre O.

6.4.2 Image d'une droite : Théorème

Une droite passant par O, privée de O, est globalement invariante.
Une droite $\mathcal{D}$ ne passant par O a pour image un cercle passant par O, privé de O, noté $\mathcal{C}^*$. Et donc $\mathcal{C}^*$ a pour image $\mathcal{D}$!

En effet :
1) est clair ;
2) 1ère façon, calcul : $x = a \neq 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{k.x'}{x'^2+y'^2}$ ou $x'^2 + y'^2 - \dfrac{k}{a}x' = 0$: cercle passant par O.



Si C est le centre du cercle, on a $OC \perp \mathcal{D}$.

2ème façon géométrique : Soit $A(a, 0)$ et A' son image. On peut se limiter à $k > 0$. Alors :
$OA.OA' = OM.OM'$ donne $\dfrac{OM'}{OA'} = \dfrac{OA}{OM}$; les triangles $OA'M'$ et OMA sont semblables (par une similitude indirecte) ; et donc : on a un angle droit en M', comme en A. Dessin !

3) L'image d'un cercle passant par O est donc connue car $fof = Id_{\mathcal{P}^*}$. Note [5]

[5] Exercice hors cours : Pour l'image d'un cercle ne passant pas par O, on utilise : le théorème de "la puissance d'un point par rapport à un cercle" ... (vu plus tard).

M+ **Exercices: Complexes. Aspect géométrique.** **PTSI**

---

1. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que : $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}$.

2. Indiquer une condition nécessaire et suffisante (C.N.S.) pour que : $\dfrac{z+1}{\bar{z}-1}$ soit :
   (a) réel (b) imaginaire pur. [Ici, trouver : $x^2 - y^2 = 1$ hyperbole équilatère].

3. Soit $u = \dfrac{z+2i}{z-i}$. Quel est
   (a) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Arg(u) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$? [cercle]
   (b) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\mid u \mid = 2$? [cercle orthogonal au précédent : après !]

4. Montrer que si : $\mid z \mid = \mid a \mid = 1$ et $1 + z.a \neq 0$, alors : $\dfrac{z+a}{1+z.a} \in \mathbb{R}$.

5. Vérifier que : $\dfrac{\mid \Re e(z) \mid + \mid \Im m(z) \mid}{\sqrt{2}} \leqslant \mid z \mid \leqslant \mid \Re e(z) \mid + \mid \Im m(z) \mid$. (Poser $z = x + iy$)

6. Décrire les transformations
   (a) $z \mapsto i.z$;
   (b) $z \mapsto -j.z - j^2$;
   (c) $z \mapsto -2i.z + 10 - 5i$;
   (d) $z \mapsto i.\bar{z}$; (moins connue)
   (e) $z \mapsto j.\bar{z} + j - 1$ en observant que $M_0(-1)$ est invariant.

7. Avec le théorème du parallélogramme : $2.(\mid u \mid^2 + \mid v \mid^2) = \mid u+v \mid^2 + \mid u-v \mid^2$
   montrer qu'on obtient l'inégalité suivante : $\mid u \mid + \mid v \mid \leqslant \mid u+v \mid + \mid u-v \mid$.

8. Soit a, b complexes distints de module 1 et $z \in \mathbb{C}$. Montrer alors que : $\dfrac{z + ab\bar{z}}{a-b} \in \mathbb{R}.i$.

9. Soit a, b, c, d réels avec $ad - bc = 1$. Montrer que, pour $cz + d \neq 0$: $\Im m(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\Im m(z)}{\mid cz+d \mid^2}$.

10. Figures simples
    (a) C.N.S. pour que $A(a), B(b), C(c), D(d)$ dans cet ordre, forment un parallélogramme ?
    (b) (*) C.N.S. pour que $A(z), B(z^2), C(z^3)$ forment un triangle équilatéral direct ?

11. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $A(1), M(z)$ et $P(iz)$ soient alignés ? [cercle].

12. (*) Soit a, b, c réels tels que $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Montrer que $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$.
    [Indication : trouver $\{e^{ia}, e^{ib}, e^{ic}\} = \{e^{ia}, je^{ia}, j^2 e^{ia}\}$.]

13. (*) Hors cours. Soit l'inversion de pôle O, de puissance 1 : Image d'une droite (2 cas) ?
    d'un cercle (2 cas) ? [(*) Utiliser le théorème de la puissance d'un point/cercle : plus tard.]

Chapitre 7

Généralités sur les fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

7.1 Introduction

7.1.1 Recherche de symétries

1. $T > 0$ est une période de f si : $\forall x \in D_{def}, f(x+T) = f(x)$.

   Exemple $f(x) = cos(\omega.x - \varphi)$ a une plus petite période : $\boxed{T = 2.\dfrac{\pi}{\omega}.}$

2. f est paire si son domaine est symétrique par rapport à $x = 0$ et $f(-x) = f(x)$ tout le temps.

   $\boxed{\text{Remarque}}$ $x = a$ est axe de symétrie de f sur $(a - \alpha, a + \alpha) \Longleftrightarrow f(a+h) = f(a-h), \forall h \in [0, \alpha)$.

3. f est impaire si son domaine est symétrique par rapport à $x = 0$ et $f(-x) = -f(x)$ tout le temps.

   $\boxed{\text{Remarque}}$ Si f définie sur $(a - \alpha, a + \alpha)$: $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$centre de symétrie $\Leftrightarrow \dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$, $\forall h \in [0, \alpha)$. Qui s'écrit : $x = a+h,\ a-h = 2a-x;$ donc $f(x)+f(2a-x) = 2b(= cte), \forall x \in D_{def}$.

7.1.2 Domaine de définition. Domaine d'étude

Rappel : Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est une correspondance (ou relation) telle que chaque $x \in E$ ait au plus une image dans F.

Exemples **(Et bien voir certains exercices)**

1. $f :\ x \longmapsto 1/x$ est une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. C'est une application du domaine de définition $D_{def} = \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. Son domaine d'étude serait $D_{etude} =]0, +\infty[$ avec l'imparité.

2. $f :\ x \longmapsto [sin(x)]^{cos(x)}$. On connait a^r si $r \in \mathbb{Q},\ a > 0$ en général. Mais si $r \notin \mathbb{Q}$, on passe par le ln : $\boxed{a^b = e^{b.ln(a)}, a > 0.}$ Donc $f(x) = e^{cos(x).ln[sin(x)]},\ sin(x) > 0$. f est $2.\pi$ périodique.

   Aussi, on peut choisir un domaine d'étude $D_{etude} = [-\pi, \pi]$; alors $D_{def} \cap D_{etude} =]0, \pi[$.

7.1.3 Quelques définitions. Et opérations

1. On dit que f est majorée (par $M \in \mathbb{R}$) si $f(x) \leqslant M$ tout le temps (M est un majorant) ; minorée (par $m \in \mathbb{R}$) si $f(x) \geqslant m$ tout le temps ; et bornée si majorée et minorée.

   On a : $\boxed{f \text{ bornée} \Longleftrightarrow \mid f \mid \text{ bornée}}$ (car f bornée par m et $M \Longrightarrow \mid f \mid$ majorée $max(\mid m \mid, M)$.

   $\boxed{\text{Remarque}}$ Si $f(x) = 2x$ sur $[2, 3[$, $max(f)$ n'existe pas ; mais $sup(f) = 6$.

2. On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ (I, intervalle en général).

   On définit $f+g$ par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $(f.g)(x) = f(x).g(x)$; $f \leqslant g$ par $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in I$.

   Composition vue : toujours associative (quand elle est définie). $\boxed{\sqrt{x^2} = \mid x \mid ; \quad ln(x^2) = 2.ln \mid x \mid.}$

7.2 Limite en un point x_0 (généralités)

7.2.1 Hypothèses

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on supposera que f est définie au moins sur un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \alpha > 0$.
   Si $x_0 = +\infty$, on supposera f définie au moins sur un certain $]A, +\infty[, A > 0$.
2. $\boxed{\text{En résumé, on dira que } f \text{ est définie sur un voisinage de } x_0 \ \textbf{(mais } x_0 \textbf{ excepté, parfois).}}$

7.2.2 Définition de la limite

1. Cas x_0, l finis : $\boxed{\text{On dit que } f(x) \text{ tend vers } l \text{ quand } x \text{ tend vers } x_0 \text{ et on note } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \text{ ou plus souvent } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \text{ si : } \forall\epsilon > 0, \exists\alpha_\epsilon > 0 / \mid x - x_0 \mid < \alpha_\epsilon \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon}$

   Celà signifie que <u>toute</u> contrainte $\mid f(x) - l \mid < \epsilon$, $\epsilon > 0$ (ou encore $f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$) est réalisée dès que x est suffisamment près de x_0, proximité ($x \in]x_0-\alpha_\epsilon, x_0+\alpha_\epsilon[$) qui dépend du $\epsilon > 0$ choisi !

   Cas x_0 fini, l infinie : $\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty \text{ si : } \forall B > 0, \exists\alpha_B > 0 \ / \ \mid x - x_0 \mid < \alpha_B \Longrightarrow f(x) > B}$

   Cas x_0 infini, l finie : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ si : } \forall\epsilon > 0, \exists A_\epsilon \ / \ x > A_\epsilon \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon}$

   Cas x_0 et l infinis : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ si : } \forall B > 0, \exists A_B \ / \ x > A_B \Longrightarrow f(x) > B.}$

   <u>Remarques</u>
   - Analogue en $-\infty$. Faire des dessins (surtout le 1er cas) !
   - Avec les voisinages, les définitions sont unifiées.

2. <u>Propriété</u>. $\boxed{\text{Une application a au plus une limite en } x_0 \text{ (unicité de la limite).}}$ En exercice.

7.2.3 En pratique

1. <u>Limite à droite, limite à gauche</u>.

   <u>Exemples</u>. Dessins : en $x = 2$, $x \mapsto E(x)$. En $\pi/2^-$, tan tend vers $+\infty$; en $\pi/2^+$, vers $-\infty$.

   <u>Définition</u> $\boxed{\text{On dit que } f(x) \underset{x\to x_0-}{\longrightarrow} l_g \text{ si on impose de plus } \underline{x < x_0}\text{ ; analogue pour limite à droite } l_d.}$

   <u>Propriété</u> $\boxed{\text{Si } f \text{ a une limite à gauche } l_g \text{ et à droite } l_d : \ f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \begin{cases} l_g = l_d (= l) \ \ \textbf{et} \ \text{ si } f(x_0) \\ \text{existe : } l_g = l_d \underline{= f(x_0)}. \end{cases}}$

   En exercice.

2. <u>Remarques</u>
   - Lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut poser $\boxed{x = x_0 + h, h \longrightarrow 0}$; non pas $x = h + x_0$, dans ce contexte ! Et $h = (x - x_0)$ est **"l'infiniment petit de référence"**. En $\pm\infty$, c'est $h = 1/x$.
   - Si f est bornée au voisinage de x_0 et si $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x).g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ (facile)

   $\boxed{\text{Exemples}}$ $\dfrac{sin(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; $\quad x.(sin\dfrac{1}{x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$

3. <u>Cas essentiels de limite</u>
   - Dans la suite, on va utiliser $\boxed{ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \ ; \quad \dfrac{ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ (cf. ch. Fonctions élémentaires)
   - Et si f dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \text{ ou bien } \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0).}$

7.2.4 Théorèmes généraux

1. Somme, produit

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } f, g, f+g, f.g, \frac{f}{g} \text{ définies au voisinage de } x_0\,; \text{ si } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l,\ \ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} m, \text{ alors :}\\ (f+g)(x) \longrightarrow l+m \quad \text{sauf } +\infty-\infty \text{ (indéterminé)}\,; \quad \lambda.f(x) \longrightarrow \lambda.l\,;\\ (f.g)(x) \longrightarrow l.m \quad \text{sauf } 0.\infty \text{ (indéterminé)}\,; \quad \frac{f}{g}(x) \longrightarrow \frac{l}{m} \quad \text{sauf } \frac{0}{0}.\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{l}{0}.\end{array}}$$

Sur le dernier cas $l/0$:

On dit que $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0^+$, si de plus il existe un voisinage de x_0 sur lequel de plus : $g(x) \geqslant 0$.

Dans ce cas, si $l > 0$, "$\frac{l}{0^+}$" n'est pas indéterminé mais vaut : $\boxed{"\frac{(l>0)}{0^+} = +\infty"\ !}$

Vrai aussi pour les limites à gauche et à droite.

- Démonstration en exercice.
- Signalons l'équivalence $[f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l] \Leftrightarrow$ [Pour toute suite définie (u_n) : $u_n \to x_0 \Rightarrow f(u_n) \to l$]

  Equivalence à voir ; elle ramène (si l'on veut) la preuve au cas des suites.

2. Composition

$$\boxed{\text{Si } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l,\ \ g(x) \underset{x\to l}{\longrightarrow} m \ \text{ et si } gof \ \text{ est définie au voisinage de } x_0, \text{ alors : } gof \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} m.}$$

Exemple $\left\{\begin{array}{l}\text{Nous verrons que } \dfrac{ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1\\ \text{et } sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \ \text{ ici évident}\end{array}\right\}$ donc : $\dfrac{ln[1+sin(x)]}{sin(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$

Démonstration en exercice. [Note. Si $f = g :\ x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 0$, alors $D_{gof} = \emptyset$!]

7.2.5 Inégalités

1. Théorème : Prolongement des inégalités **(larges)** par passage à la limite

$$\boxed{\text{Si } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l,\ \ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} m \text{ et si } f \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0, \text{ alors on a : } l \leqslant m.}$$

2. Théorème : d'encadrement ou des gendarmes

$$\boxed{\text{Si } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l,\ \ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \text{ et si } f \leqslant h \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0, \text{ alors : } h \text{ a une limite qui vaut } l.}$$

- Ce dernier théorème donne **l'existence** de la limite ! - Démonstrations en exercice.

Exemple Montrons que $sin' = cos$. [Et $cos(x) = sin(x+\pi/2)$ la dérivée de cos en résultera].

Cherchons : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.[sin(x_0+h) - sin(x_0)] = \lim_{h\to 0}\ cos(x_0).\frac{sin(h)}{h} + sin(x_0).\frac{cos(h)-1}{h}.$

Pour $h > 0$ petit, soit : $M(cos(h), sin(h))$, $A(1,0)$, $P(cos(h), 0)$, $Q(0, sin(h))$, $T(1, tan(h))$.

On a $PM \leqslant Arc(AM)$ ou $sin(h) \leqslant h$ (car longueur de l'arc : $cte.h$; cercle total : $1.2\pi \Rightarrow cte = 1$).
Et $Aire(OAMcurviligne) \leqslant Aire(OAT)$; $(AireOAM = Cte.h, Cte = 1/2)$ d'où $1/2.h \leqslant 1/2.tan(h)$.

Donc $cos(h) \leqslant \dfrac{sin(h)}{h} \leqslant 1$. Ceci est vrai même si $h < 0$, petit en valeur absolue, par parité.

D'où par encadrement $\boxed{\dfrac{sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1}$ (d'ailleurs clair). On déduit $\boxed{\dfrac{1-cos(h)}{h^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}}$

En effet : $\dfrac{1-cos(h)}{h^2} = \dfrac{1-cos^2(h)}{[1+cos(h)].h^2} = \dfrac{sin^2(h)}{[1+cos(h)].h^2}$ **ou bien :** $1 - cos(h) = 2sin^2(\dfrac{h}{2})$ ...

D'où : $\dfrac{1-cos(h)}{h} = \dfrac{1-cos(h)}{h^2}.h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}.0 = 0.$ Qui montre donc que $sin'(x_0) = cos(x_0)$.

M+ **Exercices: Généralités sur les fonctions:** $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **PTSI**

---

1. Composition : On définit, si c'est possible, la composée des applications par $\boxed{gof(x) = g[f(x)].}$
Vérifier que la composition est associative. Cas où $gof \neq fog$ en se limitant à $f,\ g$ affines ?

2. (a) **Quel est le domaine de :** $f(x) = ln\ \dfrac{x}{1-x}$? Possède-t-elle un centre de symétrie ?
(b) Mêmes questions pour les fonctions : $g(x) = ln\ \dfrac{1+x}{x(1-x)}$ (et : $h(x) = ln \mid \dfrac{1+x}{1-x} \mid$.)

3. $\boxed{\text{Graphes}}$: $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x^2-2}{x+1}$, sin, cos, tan, cot, $\mid sin \mid$ (π-périodique)
$h(x) = \dfrac{x}{1+\mid x \mid}$ (impaire, inj. non surj. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ; $i(x) = x^3 - x$ (impaire, surj. non inj. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ;
(*) $j(x) = e^{-1/x^2}$; $k(x) = x + sin(x)$; $l(x) = sin(\dfrac{1}{x})$; $x \mapsto E(\dfrac{1}{x})$; $x \mapsto x.E(\dfrac{1}{x})$.

4. Une fonction à bien voir. Tracer le graphe de : $f(x) = - \mid 1-x \mid + \mid 2.x+2 \mid$ [petite échelle].

5. $\boxed{\text{Cours}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sin(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0} x.sin\dfrac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x}$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{sin(h)}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cos(h)-1}{h^2}$.

6. (a) $x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique : partie de $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ appelée graphe) n'est pas **une** une fonction : pourquoi ? Que dire sinon ?
(b) Idem : $x \mapsto y$ tel que $x = y^2$ est-elle **une** fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Graphe ?

7. Notations Si $A \subset E$, on définit $\boxed{f(A) \text{ comme la partie de } F \text{ suivante } \{f(x), x \in A\}.}$
De même, si $B \subset F$, on définit $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}}$ f application.
(a) Préciser $sin(\mathbb{R})$. Préciser $sin^{-1}(\{0\})$.
(b) Pour $f(x) = x^2 - 1$, préciser $f(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}(\{0\})$.
(c) Cas où $f \neq Id_{\mathbb{R}}$ et $fof = Id_{\mathbb{R}}$? (Se limiter à $f(x) = a.x + b$.)
(d) (*) Montrer en général que le domaine de gof vaut : $D_{gof} = D_f \cap f^{-1}(D_g)$.

8. Monotonie : Pourquoi est-il faux de dire que "$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^*$" ? Que dire à la place ?

9. Pour f, g croissantes, lequel est-il faux parmi : (a) $f + g$ est croissante (b) $-f$ décroissante
(c) $f.g$ croissante (d) Si f est de signe strictement constant, $1/f$ décroissante ?

10. Si f et g sont monotones et que gof existe, montrer que gof est monotone avec la règle des signes.

Chapitre 8

Calcul de limite des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

8.1 Comparaison des fonctions

8.1.1 f négligeable devant g noté: $f << g$, $(x \longrightarrow x_0)$

1. Définition: f est "négligeable" par rapport à g (ou infiniment petite ou g infiniment grande par rapport à f) si $\dfrac{f}{g} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ ou $\left|\dfrac{g}{f}\right| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$. On note $f = o(g)$ ou $f << g$ $(x \to x_0)$.

   Remarques :
   1) Si on ne peut pas écrire le rapport, on dit $f(x) = g(x).\epsilon(x)$, $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.
   2) Quand $x \longrightarrow \infty$, $x^2 << x^3$. Mais quand $x \longrightarrow 0$, $x^3 << x^2$.
   3) Si on a seulement $\dfrac{f}{g}$ bornée, on note $f = O(g)$: notations de Landau.

2. **Théorème** $\boxed{\text{Quand } x \longrightarrow +\infty,\quad 1 << ln^{\beta}(x) << x^{\alpha} << a^{x},\quad \beta > 0,\ \alpha > 0,\ a > 1.}$
   - Pour celà, on dit : "l'exponentielle l'emporte sur la puissance".
   - Et : "la puissance l'emporte sur le logarithme".

   Démonstration Sur des exemples pour mieux comprendre !

   1) Montrons : $y = \dfrac{ln^{1000}(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On a : $y = [\dfrac{ln(x)}{x^{1/1000}}]^{1000} = [\dfrac{1000.ln(x^{1/1000})}{x^{1/1000}}]^{1000} = cte.(\dfrac{ln(t)}{t})^{1000}$, avec $t = x^{1/1000}$

   et on est ramené à la limite fondamentale $\dfrac{ln(t)}{t}$ en $+\infty$.

   2) Montrons : $y = \dfrac{x^{1000}}{1,01^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On a : $ln(y) = 1000.ln(x) - x.ln(1,01) = x.[1000.\dfrac{ln(x)}{x} - ln(1,01)]$; $[...] \to -ln(1,01) < 0$

   donc $ln(y) \to -\infty$, et $y = \dfrac{x^{1000}}{1,01^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3. Remarques

   1) ln en 0^+, est en lien avec ln en $+\infty$ car : $ln(1/t) = -ln(t)$. Ainsi : $\boxed{x.ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^-}$

   (Poser $x = 1/t$, $t \to +\infty$. Puis $ln(t)/t$ ...)

   2) De même exp en $-\infty$ est en lien avec exp en $+\infty$ car : $exp(-t) = \dfrac{1}{exp(t)}$.

8.1.2 f équivalente à g, quand $(x \longrightarrow x_0)$

1. Définition

f est équivalente à g, noté : $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$, si $f-g << g$ ou $f(x)-g(x)=g(x).\epsilon(x)$ ou $\boxed{f(x)=g(x).[1+\epsilon(x)], \epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0}$ ce qui signifie chaque fois qu'on peut diviser par g

$\boxed{f \underset{x\to x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1.}$ Attention : ce n'est pas la différence qui tend vers 0 !

Ainsi

$2x^3-10x^2+12x \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x^3$; la différence tend vers $-\infty$!

$2x^3-10x^2+12x \underset{x\to 0}{\sim} 12x$; le but des équivalents est de simplifier.

$2x^3-10x^2+12x \underset{x\to 1}{\sim} 4$ (la fonction constante 4) !

$2x^3-10x^2+12x = 2.x(x-2)(x-3) \underset{x\to 2}{\sim} -4(x-2)$: à bien voir !

2. **Equivalents fondamentaux, Théorème**

On a : $sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $1-cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ ou bien : $cos(h)-1 \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-h^2}{2}$

$ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ou $ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} (u-1)$; $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$; $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha.x$ (α fixe) $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$

Démonstration

1) et 3) vus. 2) Ecrire $\frac{tan(x)}{x} = \frac{sin(x)}{x}.\frac{1}{cos(x)}$ ou bien $\frac{tan(x)-tan(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} tan'(0)=1$.

4) 5) 6) Idem : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$; et par exemple $[(1+x)^\alpha]' = \alpha.(1+x)^{\alpha-1}$ à voir.

3. Propriétés

1) La relation $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ est une relation R.S.T. (relation d'équivalence, cf. ch 0)

2) Si $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel f et g ont même signe.
En particulier, elles sont nulles simultanément. (Car $f(x)=g(x).[1+\epsilon(x)]$, $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.)

3) Si $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ et si $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, alors f aussi.

4) Il y a compatibilité des équivalents avec le produit : $f_1 \underset{x\to x_0}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{x\to x_0}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1.f_2 \underset{x\to x_0}{\sim} g_1.g_2$ et le quotient, mais pas avec la somme (cf. après) $\boxed{\text{Un résultat}}$ si $g << f$, $f+g \underset{x\to x_0}{\sim} f$.

5) Si $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ et si $f \geqslant 0$, alors $\sqrt{f} \underset{x\to x_0}{\sim} \sqrt{g}$. (En exercice).

4. **Trois fautes à éviter**

1) Il n'y a que la fonction f identiquement nulle au voisinage de x_0 qui est équivalente à 0.
Comme ce n'est jamais le cas en pratique, dire : "$f \underset{x\to x_0}{\sim} 0$" est une FAUTE.
De même dire : "$f \underset{x\to x_0}{\sim} \infty$ " est un NON SENS.

2) SOMME d'équivalents. Un cas où c'est faux : $x+x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $-x \underset{x\to 0}{\sim} -x+3.x^3$ (ridicule, mais c'est juste) ; par contre $x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 3.x^3$ est faux.

3) ln et exp d'équivalents : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, mais e^{x+1} non équivalent à e^x : le rapport vaut e !
Et : $1+x \underset{x\to 0}{\sim} 1-x^8$, mais : $ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, tandis que : $ln(1-x^8) \underset{x\to 0}{\sim} -x^8$!
D'ailleurs, on dirait : $1+x \underset{x\to 0}{\sim} 1$!

5. Remarque de rédaction (pour la pratique) $\boxed{\text{Si } l \neq 0, \pm\infty, \text{ on a : } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \iff f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} l.}$

8.2 Exercices corrigés

8.2.1 Avec <<

1. Montrer qu'en 0, $\quad ln^{10}(x) << \dfrac{1}{x} \quad$ (Dans $\ f(x) = x.ln^{10}(x)\ $ poser $\ t = 1/x$.)
2. Montrer qu'en $-\infty$, $\quad e^x << \dfrac{1}{x^{123}} \quad$ (Dans $\ f(x) = x^{123}.e^x$, poser $\ t = -x$.)
3. (Facultatif) Trouver en $+\infty$, $f,\ g$: $1 << g(x) << ln^{\beta}(x) << x^{\alpha} << a^x << f(x)$, $\ \alpha, \beta > 0$, $a > 1$.

   (Par exemple $\ f(x) = x^x\ $ et $\ g(x) = ln(ln(x))$; il fallait y penser !)

8.2.2 Avec les équivalents

1. Donner un équivalent en 0 de $\ ln(1 + sin(x))$. En déduire $\ \lim\limits_{x\to 0} ln(x).ln(1 + sin(x))$.

   Non pas : $\ 1 + sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x\ $ (somme d'équivalents) puis $ln(1 + sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} ln(1 + x)$ (2ème faute : ln d'équivalents) [qui donnerait un résultat juste avec $\ ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x$]

   Mais : $\ ln(1 + sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} sin(x)\ $ (avec $h = sin(x) \to 0$) et donc $\ ln(1 + sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x.$

   On en déduit par produit : $\ f(x) = ln(x).ln(1 + sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x.ln(x)\ $ et ici, on a une forme indéterminée connue (**et à savoir**) qui a pour limite 0 ; donc $\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ $ existe et vaut 0.

2. Equivalent de $\ f(x) = ln(x) - ln(2)\ $ au point 2. (Bien sûr : $\ ln(x) \underset{x\to 2}{\sim} ln(2)$.)

   1ère façon. Avec $x = 2 + h$ (donc $\ h \to 0$), $\ ln(x) - ln(2) = ln\dfrac{2+h}{2} = ln(1 + \dfrac{h}{2}) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{2} = \dfrac{x-2}{2}$.

   2ème façon. Beaucoup d'équivalents ont été trouvé par la dérivée en un point. Ici, si on veut :
   $\dfrac{ln(2+h) - ln(2)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} ln'(2) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\ \dfrac{ln(2+h) - ln(2)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\ $ et $\ \boxed{ln(x) - ln(2) \underset{x\to 2}{\sim} \dfrac{x-2}{2}.}$

3. Equivalent en 0 de $\ 2^x - 1$? $\quad$ $\boxed{\text{On a}}$: $\ 2^x - 1 = e^{x.ln(2)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.ln(2)$!

4. (*) Equivalent en $\dfrac{\pi}{2}$ de $\ sin(x) + cos(x) - 1 = y$? Avec $\ x = \dfrac{\pi}{2} + h\ $ on a $\ y = cos(h) - sin(h) - 1$ (attention : somme !) Dire : $1 - cos(h) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{2} << sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h\ $ donc $\ y \underset{h\to 0}{\sim} -h = -(x - \dfrac{\pi}{2})$.

5. (*) Equivalent quand $\ x \to +\infty\ $ de $\ tan\dfrac{2.\pi.x}{4.x+3}$?

   Attention : la fraction tend vers $\dfrac{2.\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ (donc lui est équivalente) mais "tan" n'existe pas en $\dfrac{\pi}{2}$!

   Notons $\ () = \dfrac{2.\pi.x}{4.x+3}$. Alors $\ tan() = \dfrac{sin()}{cos()} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{cos()}$!

   Et comme () tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, une façon facile est de dire : $\ cos() = sin\left(\dfrac{\pi}{2} - ()\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{\pi}{2} - ()\right)$ ...

   Or : $\ \dfrac{\pi}{2} - () = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2.\pi.x}{4.x+3} = \dfrac{3.\pi}{2.(4x+3)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3.\pi}{8.x}$. $\quad$ Finalement : $\ f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{8}{3.\pi}.x$

8.2.3 Divers

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$?
   Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.
   Posons $x = 1+h,\ h \longrightarrow 0$; alors n fixé, $(1+h)^n - 1 \underset{h\to 0}{\sim} n.h$ d'où la limite <u>existe</u> et vaut $\dfrac{1}{n}$.
   <u>Plus simple</u> : $\dfrac{x^n-1}{x-1} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} f'(1)$...

2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$? [puis faire de même : $\lim\limits_{x\to\infty} (1-\dfrac{1}{x})^x$?]
   Forme indéterminée 1^∞.
   $(1+\dfrac{1}{x})^x = e^{x.ln(1+\frac{1}{x})}$. Avec les équivalents fondamentaux, l'exposant : $x.ln(1+\dfrac{1}{x}) \underset{x\to\infty}{\sim} x.\dfrac{1}{x}$, tend vers 1. Par continuïté de l'exponentielle en 1, la limite cherchée <u>existe</u> et vaut $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x = e.}$

3. $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} ln(x)$? Aussi une question de limite si l'on veut : le rapport tend-il vers 1 ?
   De plus, bien dire $x+1$ et non pas $1+x$ en l'infini...
   On a : $x+1 = x.\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; d'où $ln(x+1) = ln(x) + ln(1+\dfrac{1}{x})$;
   or : $ln(1+\dfrac{1}{x}) << 1 << ln(x)$! donc $\boxed{ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} ln(x).}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$?
   Forme indéterminée $+\infty - \infty$; ils sont de plus équivalents, car $\sqrt{x} << x \Longrightarrow x+\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ puis $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$. Alors $f(x) = g(x) - \sqrt{x} = \dfrac{g^2(x)-x}{g(x)+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{g(x)+\sqrt{x}} = \dfrac{N}{D}$. On sait que $N \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$; <u>on pense</u> que $D \underset{x\to+\infty}{\sim} 2.\sqrt{x}$. Pour contourner cette somme d'équivalents, on écrit $\dfrac{N/\sqrt{x}}{D/\sqrt{x}}$: qui ramène à une somme de LIMITES ! Bref, la limite cherchée existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Autre solution : Mettre $\sqrt{x}$ en facteur et utiliser $(1+h)^\alpha - 1$, si $h \to 0$!

5. (*) $\lim\limits_{x\to 0} [\dfrac{1+x}{1-x}]^{1/sin(x)}$?
   En 0^+ forme indéterminée déjà ...
   On a $f(x) = e^{\frac{1}{sin(x)}.ln[...]}$. Puis exposant $\underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}.ln[...] \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}.([...]-1)$, car $ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} (u-1)$. Ainsi : l'exposant tend vers 2. Par continuïté de l'exponentielle en 2, la limite cherchée existe et vaut e^2.

6. **Complément :** Un cas où la somme d'équivalents est permise (ne pas savoir) :
   Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a.x,\ g(x) \underset{x\to 0}{\sim} b.x$ et si <u>$a+b \neq 0$,</u> alors : $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{\sim} (a+b).x$ car :
   on fait le rapport $\dfrac{f(x)+g(x)}{(a+b).x} = \dfrac{f(x)}{(a+b).x} + \dfrac{g(x)}{(a+b).x}$; il tend vers $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1.$

8.3 Questions théoriques

8.3.1 Continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$

Si x_0 est finie, et si f est définie en x_0, la limite ne peut être que $f(x_0)$ si elle existe (facile).

Donc $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit la limite n'existe pas : voir l'exemple suivant} \quad (x_0 = 0 : \text{cf. exercice}).\\ \text{Soit } \underline{\text{la limite existe et vaut } f(x_0) \text{ : c'est la définition de la continuïté en } x_0}.\end{array}\right.$

Exemple Voir la fonction caractéristique de la partie $\{0\}$, notée $1_{\{0\}} : \left\{\begin{array}{l} x = 0 \mapsto 1;\\ x \neq 0 \mapsto 0.\end{array}\right.$ Dessin ?

8.3.2 Cas où f est continue sur $]a, +\infty[$

Celà veut dire que f est continue en chaque point (cf. ch. Continuïté).
Donc en chaque point x_0 tel que $a < x_0 < +\infty$ (a est fini ou $-\infty$), f a une limite : $f(x_0)$.

Mais **attention** : on ne dit pas, ici, que f possède une limite en $+\infty$; ni en a^+ !

$\boxed{\text{Exemples}}$ 1) $x \longmapsto sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais ne possède pas de limite en $+\infty$!

2) Soit $f(x) = sin(1/x)$, $x > 0$. Valeurs où $f(x) = 0$, où $f(x) = 1$,... Dessin ? Sans limite en 0^+.

8.3.3 Théorème de la limite monotone

- Cas f est croissante sur $]0, +\infty[$: f a forcément une limite en $+\infty$. Et L finie $\Longleftrightarrow f$ est majorée.
- Cas où f croissante sur (a, b) [intervalle fermé ou ouvert en a et b] et $a < x_0 < b$. Alors f possède en x_0 une limite l_g à gauche et l_d à droire avec : $l_g \leqslant f(x_0) \leqslant l_d$.
  De même f possède une limite à droite en a et à gauche en b. Idem si décroissante.

Démonstration (*) **en complément** : Pour la limite à gauche en x_0 :
Soit $l_g = sup\{f(x),\ x < x_0\}$; on a bien sûr : $\forall x < x_0,\ f(x) \leqslant l_g$. D'autre part :
si $\epsilon > 0$; $\exists\ c : a < c < x_0$ tel que $f(c) > l_g - \epsilon$ par définition du sup (sinon $l_g - \epsilon$ majorant).
Et comme f croissante : $c < x < x_0 \Longrightarrow l_g - \epsilon < f(x) \leqslant l_g$; ceci suffit.

$\boxed{\text{Exemples}}$ 1) Comme ln est croissante, sur $]0, +\infty[$, l'existence d'une limite en $+\infty$ est certaine !

2) Donner une fonction définie sur $]0, +\infty[$ croissante non continue ; une fonction non monotone ?

3) Fonction définie sur $\mathbb{R}$ ayant une limite à droite ou à gauche en aucun point.

Donc ni monotone ! ni continue !

Ainsi : la fonction caratéristique de la partie $\mathbb{Q}$, notée $1_Q : \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \longmapsto 1;\\ x \notin \mathbb{Q} \longmapsto 0.\end{array}\right.$ Dessin ?

(On utilise le résultat qu'entre 2 réels distincts, il y a toujours un rationnel et un irrationnel.)

8.3.4 Quelques propriétés

- $\boxed{\text{Si } f \text{ a une limite FINIE en } x_0, \text{ alors } f \textbf{ est bornée} \text{ au voisinage de } x_0.}$ En effet :
  Soit $\epsilon = 1 > 0$: possible. Il existe V, voisinage de x_0 : $x \in V \Longrightarrow f(x) \in]l - 1, l + 1[$; bornée !

- Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l > 0$, en se limitant à l finie : $\exists V$, voisinage de x_0 tel que : $x \in V \Longrightarrow f(x) > \dfrac{l}{2}$
  En particulier, non seulement $\dfrac{1}{f}$ existe sur V, **mais encore** elle est bornée : $0 < \dfrac{1}{f} < \dfrac{2}{l}$.

Démonstration (Si on avait $l = +\infty$, dire : $f > 1$ sur V !) [Ceci sert à **certaines preuves**.]
Soit $\epsilon = l/2 > 0$. Alors, $\exists V$, voisinage de x_0 tel que sur V, $f(x) \in]l - \dfrac{l}{2}, l + \dfrac{l}{2}[$ ce qui termine.

M+ **Exercices: Limites des fonctions: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Calculer les limites suivantes}}$

$\dfrac{(x^3+x^2).sin(x)}{(1-cos(x)).(1-exp(x))}$, en 0 ; $\dfrac{1-sin(x)}{(\pi/2-x)^2}$, en $\pi/2$; $\dfrac{x^3}{tan(x)-sin(x)}$, en 0 ;

$sin(\dfrac{\pi}{4}-x).tan(2x)$, en $\pi/4$; $\dfrac{x.tan(x-\pi/3)}{1-2.cos(x)}$, en $\pi/3$; $\sqrt{x^2-2x-1}-x$, en $+\infty$;

$ln(x).ln[1+tan(x)]$, en 0 ; $\sqrt{\dfrac{1+x}{x^3}}/sin(\dfrac{1}{x})$, en $\pm\infty$; $sin(\dfrac{1}{x}).tan\dfrac{2\pi x}{4x+3}$, en $+\infty$;

$(cos(x))^{1/x^2}$, en 0 ; $\dfrac{x^x-1}{sin(\pi x)}$, en 1 ; $x.E(\dfrac{1}{x})$, en 0 ; $\dfrac{sin(x)-x}{x^3}$, en 0 : <u>plus tard</u>.

2. $\boxed{\text{Donner un équivalent de}}$

(a) $ln(3+h)$ en 0 ; puis $ln(3+h)-ln(3)$ [c'est ln au voisinage de 3] ; (b) $sin[ln(1+x)]$, en 0 ;

(c) $e^{cos(x)}-e$, en 0 ; (d) $[ln(1+x)/ln(x)]^{x.ln(x)}$, en $+\infty$; (e) $tan[\pi x/(2x+1)]$, en $\pm\infty$.

3. (*) <u>Autres limites</u> : Rappel $\boxed{\text{si } f'(x_0)\neq 0, \text{ alors } f(x)-f(x_0)\sim f'(x_0).(x-x_0)\,;\ \text{faux sinon.}}$

$\dfrac{x}{a^x-b^x}$, en 0 ; $x^2.[e^{1/x}-e^{1/(x+1)}]$, en $\pm\infty$; $\dfrac{1-sin(x)+cos(x)}{sin(x)+cos(x)-1}$, en $\pi/2$;

(Difficiles) $\dfrac{x^a-a^x}{x-a}$, en a ; $\dfrac{sin(\pi x)-cos(\pi x/4)}{2^x-x^2}$, en 2 .

4. <u>Quelques fonctions</u> : (a) Faire le graphe de $f(x)=x+cos(x)$ (b) $g(x)=x.cos(x)$

(c*) Montrer que $x\longmapsto sin(x^2)$ est non périodique (avec ses racines par exemple).

5. (*) Soit f définie croissante sur $]0,+\infty[$, telle que $x\longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante.

Montrer que f est continue en chaque point. [<u>Théorème de la limite monotone</u>].

6. (*) Autre cas où la somme d'équivalents est possible [Ne pas savoir ; on verra les DL au ch.30].

Si $f_1(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$, $f_2(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$, $g_1\geqslant O$, $g_2\geqslant O$, alors : $(f_1+f_2)(x)\underset{x\to x_0}{\sim}(g_1+g_2)(x)$.

Chapitre 9

Continuité des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

9.1 Généralités

9.1.1 Continuité en un point

Définition : $\boxed{f \text{ est dite continue en } x_0, \text{ si } f \text{ est définie en } x_0\ (\Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}) \text{ et } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0).}$

Remarques

1) Soit $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x},\ x \neq 0$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

On pose $\left\{\begin{array}{l} \widetilde{f}(x) = f(x),\ x \neq 0 \\ \text{et } \ \widetilde{f}(0) = 1 \end{array}\right.$ on dit qu'on a $\boxed{\text{effectué un prolongement par continuité de } f \text{ en } 0.}$

2) La fonction $x \mapsto E(x)$ (partie entière) n'est pas continue en 0 ; continue à droite, mais pas à gauche.

9.1.2 Continuité sur un intervalle I

Attention : $x \longmapsto E(x)$ (partie entière) n'est pas continue en chaque point de [0,1[car non continue en 0.
Mais sa restriction à $I = [0, 1[$ notée $E_{/[0,1[}$ est, elle, continue en chaque point de [0,1[.

Définition : $\boxed{f \text{ est "continue sur un intervalle } I\text{" si sa restriction } f_{/I} \text{ est continue en chaque point de } I.}$

Exemples 1) Si f est continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors elle est continue sur $[a, c]$.
2) La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

9.1.3 Opérations sur les fonctions continues

1. Opérations linéaires. Produit , quotient

$$\boxed{\begin{array}{c} f, g \text{ continue en } x_0 \Longrightarrow f + g \text{ aussi} ;\ \ \lambda.f \text{ aussi} ; \\ f.g \ \text{ aussi} ; \quad \text{ et si } \ g(x_0) \neq 0, \quad f/g \text{ aussi} \end{array}}$$

Démonstration de 4) **en complément** (*)

Il suffit de voir pour $\dfrac{1}{g}$. Or, si $g(x_0) \neq 0$, g est non nulle dans un voisinage V de x_0, et même $\mid 1/g \mid$ y est bornée par $\mid 2/g(x_0) \mid$ (cf. $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \neq 0$ au ch. Limites).

Donc : $\mid \dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)} \mid = \mid \dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x).g(x_0)} \mid \leqslant \dfrac{2. \mid g(x) - g(x_0) \mid}{g^2(x_0)}$.

Or, $\forall \epsilon > 0,\ \exists$ un voisinage V' de x_0 sur lequel $\mid g(x) - g(x_0) \mid < \epsilon.g^2(x_0)/2$.

Sur $V \cap V'$ on a, en conséquence, $\mid \dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)} \mid < \epsilon$; ce qui termine.

Exemples

$\boxed{\text{Les fonctions polynômes } x \longmapsto P(x) \text{ sont continues sur } \mathbb{R}. \text{ Les fractions rationnelles } x \mapsto P(x)/Q(x) \text{ sont continues sur leur domaine (là où le dénominateur est non nul).}}$

2. Composée $\boxed{\text{La composée de fonctions continues est continue}}$ (conséquence des limites).

   Deux exemples
   1) $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$. soit voir après : Fonction réciproque.
   . soit directement : $0 \leqslant x,\ y \ \Rightarrow |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y-x|}$.
   D'où $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition.
   2) De même, comme $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$: Donc si f continue, alors $|f|$ aussi. [1]
   Ensuite 3 théorèmes fondamentaux ADMIS :

9.2 Théorème des valeurs intermédiaires

9.2.1 1er énoncé

Soit f **continue** sur un intervalle I ; $a, b \in I$. Toute valeur y entre (intermédiaire) $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte pour **au moins** un x entre a et b : $\forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists\, x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

ADMIS. [la dém. utilise la propriété de la borne sup ; on prend : $x = sup\{t$ tel que $f(t) \leqslant y\}$.]

9.2.2 Exemples essentiels

1. Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
2. Tout polynôme de degré impair à coefficients réels, s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
   En effet si $P(x) = a_0.x^{2p+1} + ..., a_0 \neq 0$, $\dfrac{P(x)}{a_0}$ est positif pour x suffisamment "proche de $+\infty$" :
   $\exists A > 0 : x \geqslant A \Longrightarrow P(x) \geqslant 1$; et négatif si x suffisamment "proche de $-\infty$" ; donc :
   $\exists B < 0 : x \leqslant B \Longrightarrow P(x) \leqslant -1$; enfin toute application polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$, alors $\exists l \in [a,b]$ tel que $f(l) = l$ (l=point fixe de f). Dessin ?
   En effet, $g(x) = f(x) - x$ est continue comme f ; et vérifie $g(a) \geqslant 0,\ g(b) \leqslant 0$; donc g s'annule !
4. **Conséquence** du Théorème des valeurs intermédiaires. Si f continue sur $[a,b]$; et si de plus f est strictement monotone, alors $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists\,!$ (unicité en plus) $x \in [a,b] : f(x) = y$. (Clair).

9.2.3 2ème énoncé

1. Définition pour commencer : une partie $\mathcal{C}$ (de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$...) est dite convexe si :
   $\mathcal{C} = \emptyset$ ou si $\forall A, B \in \mathcal{C}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathcal{C}$.
   Exemples de partie convexe de $\mathbb{R}^2$: l'intérieur d'une ellipse ; de partie non convexe de $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^*$!
   Propriété : Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles [laissé en exercice].
2. Autre rappel : Ayant une application $f : E \longrightarrow F$, on appelle $Im(f)$ (image de f) $\{f(x), x \in E\}$.
   Par exemple, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction sin est exactement : $Im(f) = f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Le théorème dit donc que tout point entre $f(a)$ et $f(b)$, est dans $Im(f)$, donc que $Im(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\text{L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.}}$

---

[1] Note en complément (*) : Pour f, g données, on vérifie que $\begin{cases} sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2} \\ \text{et} \quad inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2} \end{cases}$;
(utile à certaines démonstrations). En effet, prendre x tel que $f(x) \geqslant g(x)$; puis x où $f(x) \leqslant g(x)$.
$\boxed{\text{Donc}}$ f, g continues $\Longrightarrow |f-g|$ continue ; puis $sup(f,g)$ et $inf(f,g)$ continues !
Cas particulier. On définit :
f^+ par $f^+(x) = sup[f(x), 0] = max[f(x), 0]$ et f^- par $f^-(x) = -inf[f(x), 0] = -min[f(x), 0]$.
(Voir le cas $f(x) = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$; dessiner $f,\ f^+,\ f^-$.) Voir aussi que :
$f^+ \geqslant O,\ f^- \geqslant O;\ f^- = sup[-f(x), 0]$; surtout : $\begin{cases} |f| = f^+ + f^- \\ f = f^+ - f^- \end{cases}$ car $\begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)\ . \end{cases}$

9.3 Continuité sur un segment

9.3.1 Théorème des bornes atteintes

Enoncé : Toute application **continue** sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes.

ADMIS.

Donc $m = inf(f)_{[a,b]}$ est FINI ; et $\exists x_1 \in [a,b] : m = f(x_1)$. Idem pour $M = sup_{[a,b]}(f) = f(x_2)$.

Voir, par divers dessins, que les hypothèses sont utiles :

1) $f(x) = 1/x$ sur $]0,1]$; 2) $g(x) = 1/x$ sur $[1,+\infty[$; 3) $h(x) = 1/x$ sur $]0,1]$ et $h(0) = 0$.

9.3.2 En combinant les 2 théorèmes précédents

Conséquence : L'image d'un segment, par une application continue, est un segment.

En effet : $f([a,b]) \subset [m = inf(f) = f(x_1),\ M = sup(f) = f(x_2)]$.

Inclusion inverse : Toute valeur entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ est dans $f([a,b])$ par le théorème des valeurs intermédiaires. A bien comprendre.

9.4 Continuité de la bijection réciproque

9.4.1 Rappels sur injection, surjection

Déjà, on part d'une application f de E dans F. On note $f(E) = \{f(x), x \in E\}$.

1) f est **surjective de** E **dans** $f(E)$, par définition de $f(E)$! Et :

2) Si E est une partie de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, on a clairement : f **strictement monotone** $\Rightarrow f$ **injective.**

3) Pour f bijective de E sur F (quelconques ici), on peut définir une application de F (et non pas $\mathcal{P}(F)$) dans E, notée $f^{-1} : y \mapsto$ son unique antécédent x ; elle est aussi bijective et $f^{-1}of = Id_E, fof^{-1} = Id_F$.

9.4.2 Théorème de la bijection

Soit f une application : $\left\{ \begin{array}{c} \text{définie sur un intervalle } I \\ \text{strictement monotone} \\ \text{et continue;} \end{array} \right.$ **alors** : $\left\{ \begin{array}{c} f(I) \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } f(I) \\ \text{et } f^{-1} \text{ est continue: } f(I) \rightarrow I \end{array} \right.$

Démonstration

$f(I)$ intervalle : connu ;

f surjective de I sur $f(I)$! et injective car strictement monotone ; donc bijective.

Est ADMIS : f^{-1} continue. Ici on voulait (en plus de la bijectivité) que f et f^{-1} soient continues !

Deux exemples

1) $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ vérifie les hypothèses ; celà donne $f^{-1}(...) = \sqrt{...}$ continue sur $\mathbb{R}^+$. Dessin ?

2) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses ; celà donne $f^{-1}(...) = \sqrt[3]{...}$ continue sur $\mathbb{R}$! Dessin ?

9.4.3 Arcsin (cf. dessins plus loin)

$f = sin/_{[-\pi/2,\pi/2]}$ vérifie les hypothèses du théorème. Sa réciproque est, par définition, l'application $Arcsin$.

Donc : $y = f(x) = sin(x),\ x \in [-\pi/2, \pi/2] \iff x = Arcsin(y) = f^{-1}(y),\ y \in [-1,1]$.

Dessin de $x = Arcsin(y)$? déjà fait : le même que celui de $y = sin(x), x \in [-\pi/2, \pi/2]$!

Dessin de $y = Arcsin(x)$? on met x variable de f^{-1} ; **symétrique** $/(y = x)$ **de celui de** f.

Attention 1) $Arcsin$ est la fonction inverse (on préfère dire "réciproque") de $sin_{/[-\pi/2,\pi/2]}$ pour la composition et non pour la multiplication. Ainsi $Arcsin(x) \neq \dfrac{1}{sin(x)}$!

2) On a $sin(Arcsin(x)) = x$ sur $[-1,1]$ c'est-à-dire tout le temps. Par contre $Arcsin(sin(x)) = x$ que sur $[-\pi/2, \pi/2]$; alors que $Arcsin(sin(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$: cf. exercices corrigés.

9.4.4 Arccos

$f = cos/_{[0,\pi]}$ vérifie les hypothèses du théorème. Dessin ?

Sa réciproque est $Arccos$. $Arccos$ est donc la réciproque de cosinus-restreinte à $[0,\pi]$.

Soit : $y = f(x) = cos(x),\ \underline{x \in [0,\pi]} \iff x = Arccos(y) = f^{-1}(y),\ y \in [-1,1]$.

Dessin de $y = Arccos(x)$? (on met x comme variable de f^{-1} ; symétrique de celui de f).

Propriété : $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies, continues, sur $[-1,1]$ et $Arcsin(x) + Arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Démonstration (Autre dém. au chapitre Dérivation)

Si $a = Arcsin(x)$, $b = Arccos(x)$, $sin(Arcsin(x)) = x, \forall x \in [-1,1]$; $cos(Arccos(x)) = x, \forall x \in [-1,1]$;

et : $sin(b) = +\sqrt{1 - cos^2(b)}$ car $b = Arccos(...) \in [0,\pi]$; de même $cos(a) = +\sqrt{1 - sin^2(a)}$;

donc : $sin(a+b) = x^2 + (1 - x^2) = 1$. Comme $a + b \in [-\pi/2, 3.\pi/2]$, forcément $a + b = \pi/2$.

9.4.5 Arctan

$Arctan$ est la fonction réciproque de $tan/]-\pi/2, \pi/2[$. Dessin ?

Remarques : $tan(Arctan(x)) = x$ tout le temps, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$;

alors que : $g(x) = Arctan(tan(x)) = x$ que sur $]-\pi/2, \pi/2[$; ailleurs ? π-périodique !

Propriété : $Arctan$ est donc définie, continue sur $\mathbb{R}$; impaire, strictement croissante.
Et $Arctan(x) + Arctan(1/x) = \epsilon.\dfrac{\pi}{2}$, $\epsilon = sign(x)$: $+1$ si $x > 0, -1$ si $x < 0$.

Démonstration

La relation : soit G le membre de gauche. $tan(G) = \dfrac{...}{1-1}$ n'existe pas ; donc $G(x) = \dfrac{\pi}{2} + k_x.\pi$.

D'autre part : $x > 0 \Longrightarrow 0 < G < \pi$ et $x \longmapsto G(x)$ impaire. Terminé.

9.4.6 Arccot

$Arccot$ est la fonction réciproque de $cot/]0,\pi[$. Dessin ?

Propriété $Arccot$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante et $Arctan(x) + Arccot(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration (Autre dém. au chapitre Dérivation)

La relation : soit G le membre de gauche. On a : $tan(Arccot(x)) = \dfrac{1}{cot(Arccot(x))} = \dfrac{1}{x}$.

Donc $tan(G) = \dfrac{...}{1-1}$ n'existe pas ; d'où $G(x) = \dfrac{\pi}{2} + k_x.\pi$. Voici une autre finale plutôt que d'encadrer :

$x \mapsto G(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; d'où $x \longmapsto k_x = \left(G(x) - \dfrac{\pi}{2}\right)/\pi$ aussi et à valeurs dans $\mathbb{Z}$: donc k_x est constant sur $\mathbb{R}$, par le Théorème des valeurs intermédiaires ! et $x = 0 \Longrightarrow k_0 = 0$.

Notes en compléments [2]

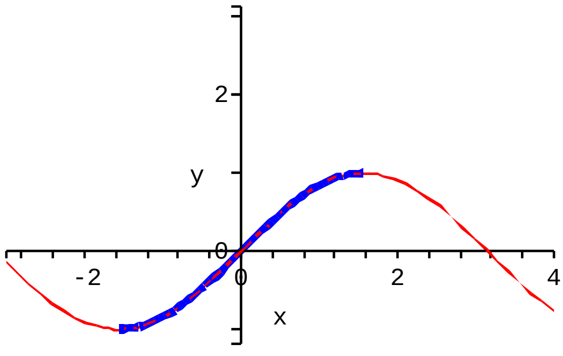
---

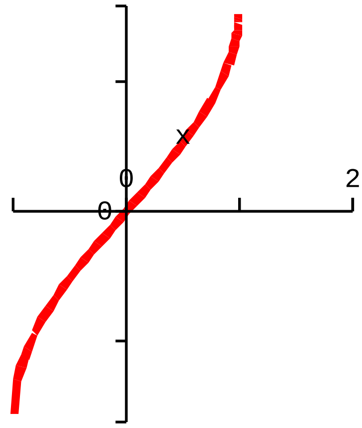
[2] 1) Un exercice assez facile. Soit f définie sur un intervalle I ; strictement monotone ; telle que $f(I)$ soit un intervalle : montrer que f est continue (avec le théorème de la limite monotone).

2) Les 3 théorèmes fondamentaux n'ont pas été démontrés (*).

3) Un autre énoncé : (*) Si f est bijective ; continue ; sur un intervalle I ; alors f est strictement monotone. (Et donc f^{-1} est continue. Contre-exemple si non intervalle : $f(-1) = 0$ $f(x) = 1/x,\ x > 0$). [$(x,y) \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ continue sur le demi plan "connexe" $x < y$; donc l'image est connexe et inclue dans $\mathbb{R}^*$!]

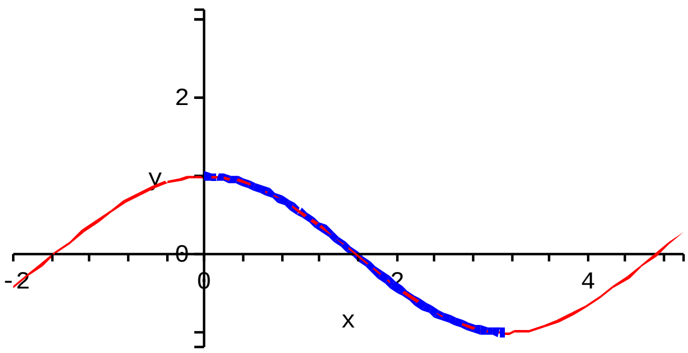
sinus__et__sinus_restreint_[-Pi/2,Pi/2]_en_vue_de_son_inverse

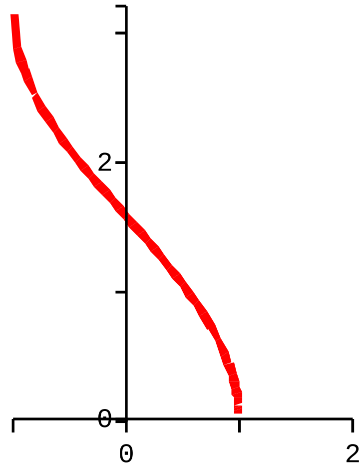




---

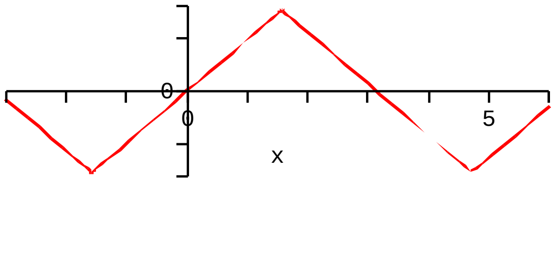
cosinus__et__cosinus_restreint_[0,Pi]_en_vue_de_son_inverse



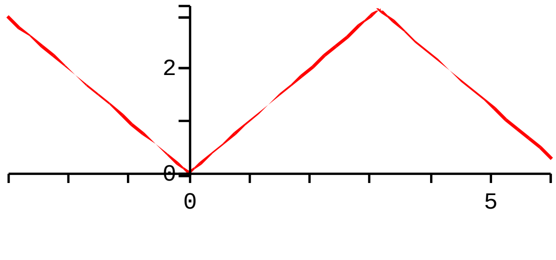


---

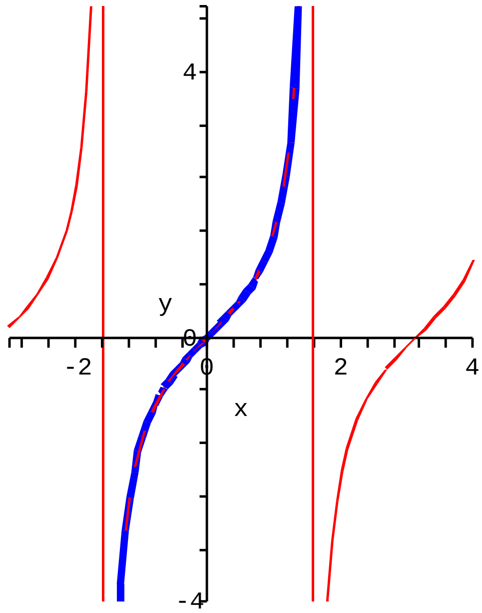
puis : $Arcsin(sin(x))$

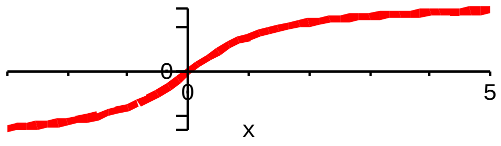


et : $Arccos(cos(x))$



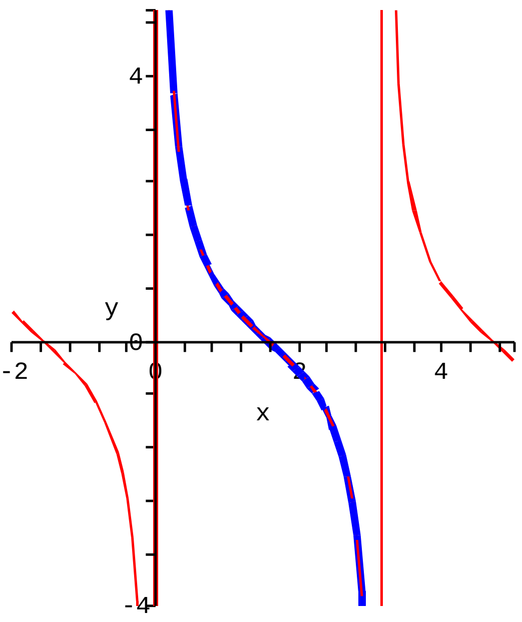
tangente__et__tangente_restreinte_[-Pi/2,Pi/2]_en_vue_de_son_inverse

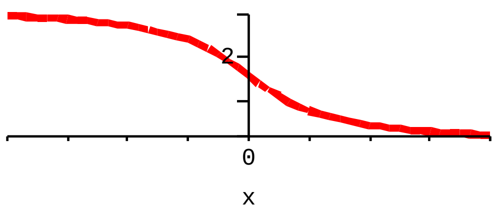




---

cotangente__et__cotangente_restreinte_(0,Pi)_en_vue_de_son_inverse





$\boxed{\text{Exercices}}$ **Dessiner** aussi : $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (et $() \mapsto ()^2$ sur $\mathbb{R}^+$)

Et encore **dessiner** : $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ sur $\mathbb{R}$! (et idem : **observer la sym**$/(y=x)$ **!...**)

9.5 Exercices corrigés

9.5.1 Simplifier $sin(Arctan(x))$

D'abord : $tan(Arctan(x)) = x$ tout le temps (= sur $\mathbb{R}$). Et : $sin(a) = \pm\dfrac{tan(a)}{\sqrt{1+tan^2(a)}}$.
Avec $a = Arctan(x)$ prendre "+" car $cos(a) > 0$ donc sin et tan de même signe !

D'où : $sin(Arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.5.2 Montrer que $Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi$

Notons $f(x) = Arccos(x)$, qui est définie, continue sur $[-1, 1]$.

1) Le résultat à prouver $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ signifie exactement que $(0, \dfrac{\pi}{2})$ est centre de symétrie pour le graphe de f. Résulte de la symétrie du graphe de $cos_{/[0,\pi]}$ (à prouver !) : 1ère solution.

2) Autre solution : $0 < G = f(x) + f(-x) < 2.\pi$ (pourquoi ?) puis ... $sin(G) = 0$, donc $G = \pi$.

9.5.3 Simplifier $f(x) = Arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

On se rappelle que $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = cos(2a)$, si $t = tan(a)$.
Aussi, on pose $x = tan(a)$, $a \in]-\pi/2, \pi/2[$ $(\Rightarrow a = Arctan(x).)$
On a alors : $y = Arccos(cos(2a))$; mais ceci ne vaut $2a$ que si $2a \in [0, \pi]$, c'est-à-dire que si $x \geqslant 0$.
Donc si $x \geqslant 0$, $f(x) = 2.Arctan(x)$; et si $x \leqslant 0$, on a : f paire ! D'où $f(x) = 2.\mid Arctan(x) \mid$.

9.5.4 Préciser $Arcsin(sin(x))$ et $sin(Arcsin(x))$

$Arcsin$ est la réciproque : non de sin ; mais de $sin_{/[-\pi/2,\pi/2]}$. D'où

1) $sin(Arcsin(x)) = x$ tout le temps, soit sur $[-1, 1]$. Tandis que

2) $Arcsin(sin(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais $Arcsin(sin(x)) = x$ que sur $[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$; ailleurs ?

$x \mapsto g(x) = Arcsin(sin(x))$ est $2.\pi$ périodique. Et sur $[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3.\pi}{2}]$, posons $x = \pi + h$, $h \in [\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.
Alors : $Arcsin(sin(\pi + h)) = Arcsin(-sin(h)) = -Arcsin(sin(h)) = -h$! (pourquoi ?) $= \pi - x$.
Donc, pour $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3.\pi}{2}]$, $g(x) = \pi - x$. On finit aisément. Faire le dessin complet (de g sur $\mathbb{R}$) !

De même, en plus facile : $Arccos(cos(x))$ puis $Arctan(tan(x))$...

9.5.5 Trouver f continue sur $\mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, équation de Cauchy

1) On voit que $f(x) = a.x$ convient ; on va voir que ce sont les seules.

2) Soit donc f telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$; on note $f(1) = a$. Alors :

- 1ère étape : Avec $y = 0$, aisément $f(0) = 0$; puis pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$; en particulier $f(n) = a.n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2ème : Avec $y = -x$, on a aisément f impaire et donc $f(n) = a.n$ est vraie aussi sur $\mathbb{Z}^-$.
- 3ème : Calcul de $f(1/q)$, $q \in \mathbb{N}^*$. On a $q.f(1/q) = f(1/q) + ... + f(1/q) = f(1/q + ... + 1/q) = f(1)$!
  Donc $q.f(1/q) = a$. ou $f(1/q) = a.1/q$. Puis : $f(p/q)$?
  Si $p \in \mathbb{N}^*$ $p.f(1/q) = a.p/q$ et si $p \in \mathbb{Z}^-$, imparité de f. A ce stade : $f(r) = a.r, \forall r \in \mathbb{Q}$.
- 4ème : Cas $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. C'est ici qu'on utilise la continuité.
  Il existe une suite de rationnels convergeant vers x (prendre r_n dans $]x - 1/n, x[$.) $f(r_n) = a.r_n$: tend vers $a.x$ d'une part ; et tend vers $f(x)$ car f continue ! Par unicité de la limite : $f(x) = a.x$.

M+ **Exercices: Continuité des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$** **PTSI**

---

1. Trouver f continue en aucun point avec $\mid f \mid$ continue sur $\mathbb{R}$. (Modifier $1_{\mathbb{Q}}$.)

2. Continuïté (et dessins !) de :
   (a) $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, E étant la partie entière. (Noter que $f(x+1) = f(x) + 1$.)
   (b) $g(x) = E(x) + E(2-x)$; (ici voir que : $g(x+1) = g(x)$ puis étude soigneuse sur [0,1[.)
   (c) $h(x) = e^{-1/x^2}$: domaines (avec parité) ? graphe ? peut-on la prolonger par continuïté en 0 ?

3. Rappeler avec précision le cours :
   (a) Le théorème des valeurs intermédiaires. Utilisations ?
   (b) Le théorème concernant la continuité sur un segment. Dessin ?
   (c) Le théorème usuel assurant la bijectivité de f avec : f et f^{-1} continues. Exemples ?

4. Soit f définie sur $[a, b]$ telle que $\forall x,\ f(x) > 0$. Donc $inf(f) \geqslant 0$.
   (a) Peut-on affirmer ici que : $inf(f) > 0$?
   (b) Même question si f est continue ?

5. (a) Préciser les fonctions : $cos(Arccos(x))$ et $Arccos(cos(x))$.
   (b) Idem avec $sin(Arcsin(x))$ et $Arcsin(sin(x))$ (moins facile).
   (c) Puis $tan(Arctan(x))$ et $Arctan(tan(x))$ (facile ici).

6. Simplifier $f(x) = Arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ à l'aide de la trigonométrie.

7. On cherche f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ / $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour toutes valeurs :
   (a) Donner des exemples. Maintenant, on étudie le cas général et on note $f(1) = a$:
   (b) Calculer $f(0)$. Puis $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. (*) Puis si $n \in \mathbb{Z}$. Puis $f(1/q)$. Enfin $f(r)$ si $r \in \mathbb{Q}$.
   (c) (*) Conclusion ? Remarque : la continuïté en 0 suffisait pour conclure !

8. Avec des fonctions rationnelles ?
   (a) Vérifier que $x \in]-1, 1[\longmapsto x/(1-x^2) \in \mathbb{R}$ est bijective, croissante, rationnelle donc continue.
   (b) (*) Mais qu'il est impossible de trouver f bijective croissante rationnelle de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
   (c) Vérifier que $x \longmapsto x/(1+ \mid x \mid)$ est impaire, bijective, croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.
   [Au ch. Dérivation, on améliorera l'exemple par une application dérivable à tout ordre].

9. (a) f continue $[a, b] \longrightarrow [a, b]$ a au moins un point fixe ; id est [=i.e.=c'est-à-dire] l tel que $f(l) = l$.
   (b) (*) Même conclusion à démontrer avec "f croissante" au lieu de "f continue".

10. Soit $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto x$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \mapsto 1 - x$.
   (a) Vérifier que $fof = Id$ sur $\mathbb{R}$ et donc f bijective ; puis que f est continue en un seul point.
   (b) (*) Trouver g bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue nulle part (plusieurs idées possibles).
   [Ainsi : continuïté et bijectivité n'ont rien à voir ! En pratique, on souhaite f bijective **avec de plus** f et f^{-1} continues ; d'où le théorème usuel.]

Chapitre 10

Dérivation des fonct. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: calculs

10.1 Dérivation en un point

10.1.1 Généralités

1. Définition $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est dite dérivable en } x_0, \text{ si } f \text{ est définie en } x_0\,; (\Longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}) \text{ et} \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ a une limite } \textbf{FINIE,} \text{ quand } x \longrightarrow x_0, \text{ notée } f'(x_0). \end{array}}$

   Ou bien, en posant : $x = x_0 + h$, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0)$.

2. Interprétation géométrique. $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le coefficient directeur de (M_0, M). Quand $x \to x_0$, on a, à la limite, le coefficient directeur de la tangente en M_0 : $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0).(x-x_0).}$

   Si de plus le repère est orthonormé, $f'(x_0) = tan(\alpha)$=pente de la tangente ; la pente de la normale est $tan(\alpha + \pi/2) = \dfrac{-1}{tan(\alpha)}$; l'équation de la **normale** est donc : $\boxed{y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).}$

   Remarques

   . Si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite INFINIE, la fonction n'est pas dérivable ; on a une tangente $//Oy$.

   . Une droite passant par M_0, non parallèle à Oy a pour équation $y - y_0 = k.(x-x_0)$.

3. Pour une courbe de $\mathbb{R}^3$, si $\widetilde{AM} = f(t)$, $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \dfrac{\widetilde{M_0M}}{t-t_0}$; donc $f'(t_0)$=vitesse algébrique au temps t_0. Le vecteur vitesse est alors $\vec{v} = v.\vec{T}$, $\vec{T}$ unitaire orientant la tangente à la courbe.

10.1.2 Propriété

1. **On a :** $\boxed{\text{Toute application dérivable en } x_0 \text{ est continue en } x_0. \quad \textbf{Réciproque fausse.}}$

   Démonstration. On a : f dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.
   Bien observer ce changement d'écriture ! c'est un "développement limité" :
   $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0).\epsilon(x)$, $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. A-t-on : $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$? clair !

2. Réciproque fausse :

   $f(x) = \mid x \mid$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0 : dérivées à droite et à gauche distinctes !
   $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = \sqrt{\mid x \mid}$ non dérivables en 0, mais continues. Dessins ? (arcs de parabole)

10.2 Opérations

10.2.1 Théorèmes généraux

1. $\boxed{x \longmapsto u(x), x \longmapsto v(x)$ dérivables $\Longrightarrow$ $u+v$ aussi ; $\lambda.u$ aussi ; $u.v$ aussi avec $(u.v)' = u'.v + u.v'$ et, là où $v(x)$ ne s'annule pas, $\dfrac{u}{v}$ aussi : $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.$}$ En exercice.
2. Conséquences
   - **A voir :** $(x^n)' = nx^{n-1}$ même si $n \in \mathbb{Z}$! $[1/v(x)]' = -v'(x)/v^2(x)$.
   - $(tan(x))' = \dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$ et $(cot(x))' = \dfrac{-1}{sin^2(x)} = -[1 + cot^2(x)]$.

10.2.2 Composition

1. Notations nouvelles : Si f dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$, alors gof est dérivable en x_0 et $(gof)'(x_0) = g'[f(x_0)].f'(x_0)$. **Ou bien autres notations :** $\big(\varphi[u(x)]\big)' = \varphi'(u(x)).u'(x)$.

   Démonstration en compléments.
2. Conséquence
   - **Dérivées de :** $cos^3(x)$; $e^{cos(x)}$; $cos(e^x)$; $ln[1+tan^2(x)]$? $\big(cos^3(x)\big)' = 3.cos^2(x).\big(-sin(x)\big)$
   - **Aussi** $\boxed{[ln \mid u(x) \mid]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}.}$ (En prenant x tel que $u(x) > 0$; puis x tel que $u(x) < 0$)
3. Remarque (*). Un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que f' soit continue (c'est rare !)

   Soit $f(x) = x^2.sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors :
   - Pour $x \neq 0$, f est dérivable par composition et $f'(x) = 2x.sin(1/x) - cos(1/x)$.
   - En 0 : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x.sin(1/x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$; donc $f'(0)$ existe et vaut $f'(0) = 0$. Ainsi f' existe sur $\mathbb{R}$.

     Mais f' n'est pas continue en 0 car $f'(x) \nrightarrow 0$ quand $x \to 0$: f' n'a pas de limite en 0.

10.3 Dérivation de la bijection réciproque

10.3.1 Enonce (preuve en compléments)

1. Théorème $\boxed{\text{Soit } f \text{ continue ; strictement monotone ; sur un intervalle } I. \text{ Si de plus : } f'(x_0) \text{ existe et } f'(x_0) \neq 0, \text{ alors } f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 = f(x_0) \text{ et } (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}.}$

   Interprétation : **Dessin de** $f : () \longmapsto ()^2$ et de $f^{-1} = \sqrt{...}$? $\sqrt{...}$ '(4)=1/4.
2. Nouvelle écriture, nouvel énoncé. Si maintenant x variable de f^{-1}, $y = f^{-1}(x)$: x et y permutés.

   Alors : si f est dérivable (donc continue), sur un intervalle I, avec $f' > O$ ou $f' < O$ (donc strict. monotone) on a : f bijective de I sur $f(I)$, f^{-1} est dérivable sur J ; et

   $\boxed{(f^{-1})'(x) = 1/f'(y) = 1/f'[f^{-1}(x)]}$ $f'(y)$, non pas $[f(y)]'$: on ne saurait si on dérive $/x$ ou $/y$!

10.3.2 Exemples (de réciproque)

1. Ainsi $(\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = \dfrac{1}{n}.\ x^{\frac{1}{n}-1}$ (car $\dfrac{1}{n.y^{n-1}}$ ...) sur $\mathbb{R}^*$ si n impair ; sur $]0, +\infty[$ si n pair.

   (Rappelons bien le cas $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$.) Et à partir du cas général $\boxed{(x^r)' = r.x^{r-1} \text{ pour } r \in \mathbb{Q}.}$
2. Si on sait que $ln'(x) = 1/x$ alors on déduit que : $\boxed{exp'(x) = exp(x).}$ En exercice.

   De ceci, on en déduit aussi que : $(x^a)' = [e^{a.ln(x)}]' = ...$, $a \notin \mathbb{Q}$. **Dérivée de** 2^x ? x^x ?

3. $\boxed{Arcsin \text{ est continue sur } [-1,1], \text{ dérivable sur }]-1,1[\text{ et } Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$

En effet
Notons $y = Arcsin(x)$ ou $x = sin(y), y \in [-\pi/2, +\pi/2]$. sin' ne s'annule pas sur $]-\pi/2, +\pi/2[$.
Donc $Arcsin$ dérivable sur $]-1,1[$ et $Arcsin'(x) = 1/sin'(y) = 1/cos(y)$; mais
$y = Arcsin(x) \in]-\pi/2, +\pi/2[$; donc $cos(y) > 0$. $cos(y) = +\sqrt{1-sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$. Fini.

4. $\boxed{Arccos \text{ est continue sur } [-1,1], \text{ dérivable sur }]-1,1[\text{ et } Arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$

En exercice.
Conséquence
Si $f(x) = Arcsin(x) + Arccos(x)$; f est donc dérivable sur $]-1,1[$ et $f' = O$. Nous verrons que ceci entraine f constante sur $]-1,1[$. Par **continuité,** f constante sur le segment $[-1,1]$ et **on retrouve :** $Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1,1]$.

5. $\boxed{Arctan \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$

En exercice.
$Arctan$ est donc une fonction compliquée à dérivée facile : rationnelle, définie sur $\mathbb{R}$!
En déduire
$[Arctan(\frac{1}{x})]' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$? **On retrouve que** $Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = ?$ cf. ch. précédent.

6. $\boxed{Arccot \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } Arctan'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.}$

En exercice.
Conséquence
$f(x) = Arctan(x) + Arccot(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = O$. Nous verrons que ceci entraine f constante (comme dit). On **retrouve que** : $Arctan(x) + Arccot(x) = \frac{\pi}{2}$.

Deux démonstrations en compléments (*) Note [1] Note [2]

[1] Dérivée de gof :
On aurait envie d'écrire : $\frac{gof(x) - gof(x_0)}{x - x_0} = \frac{gof(x) - gof(x_0)}{f(x) - f(x_0)} . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
mais f peut s'annuler une infinité de fois si $x \to x_0$ comme pour $x^2 sin(1/x)$ vers 0.

Aussi on écrit les "développements limités"
(1) $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \epsilon_1(x)], \epsilon_1(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$
(2) $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)[g'(y_0) + \epsilon_2(y)], \epsilon_2(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$. On remplace y_0 par $f(x_0)$, y par $f(x)$.
Il ne se pose plus qu'une question , à cause de ϵ_2 : a-t-on $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$?
La réponse est oui, car f dérivable en $x_0 \Longrightarrow$ continue en x_0.

[2] Dérivablité de f^{-1} :
D'abord, f^{-1} désigne l'inverse pour la composition (usuellement) et non pas pour la multiplication.
Ainsi : $ln^{-1} = exp$ (réciproque) mais ce n'est pas : $x \longmapsto 1/ln(x)$!

Ensuite, si on savait f^{-1} dérivable, il suffirait de dériver $f[f^{-1}(x)] = x, \ \forall x \in J$ si $f^{-1} : J \longrightarrow I$.
Mais nous devons montrer la dérivabilité de f^{-1}.

Prenons x comme variable de f^{-1}. $\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$.
Quand on fait tendre x vers x_0, on a besoin de savoir que y tend vers y_0 ; donc on a besoin de savoir que f^{-1} est continue.
Ceci est assuré par les hypothèses : f définie sur un intervalle/ strictement monotone/ continue/ [ceci assure l'existence et la continuité de f^{-1}] ; de plus $f'(y_0)$ existe et est non nul ; etc.

M+ **Exercices: Dérivation des fonct. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calculs** **PTSI**

---

1. (a) Rappeler les dérivées de : $Arcsin$, $Arccos$, $Arctan$, et $Arccot$.
   (b) Prouver 3 relations entre $Arcsin(x)$, $Arccos(x)$, $Arctan(x)$, $Arctan(\frac{1}{x})$ et $Arccot(x)$.

2. Dérivées de : $cos(e^{-2.x})$, 2^x, a^x, $x^{\sqrt{2}}$, x^x, $sin(x)^{cos(x)}$, $Arctan(x^2)$, $sin(Arctan(1/x))$ $Arccos(\sqrt{1-x^2})$, après avoir ici indiqué les domaines (de définition, continuïté, dérivabilité).

3. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
   (a) f paire $\Longrightarrow f'$impaire. f impaire $\Longrightarrow f'$ paire.
   (b) f périodique $\Longrightarrow f'$ périodique. (*) Examiner les réciproques.

4. Par des tableaux de variations, montrer que
   (a) $x - \frac{x^3}{3!} \leqslant sin(x)$ si $x \geqslant 0$ [et $sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, idem si $x \geqslant 0$.]
   (b) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, p, $q \in \mathbb{R}$; $x^n + px + q = 0$ possède au plus 3 racines réelles.

   (**On admet - cf. chapitre suivant -**
   [f dérivable sur $[a, b]$, $f' \geqslant 0$, nulle qu'un nombre fini de fois] $\Rightarrow f$ croissante **strictement**.)

5. Idem Montrer que, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\frac{2}{\pi}.x \leqslant sin(x) \leqslant x$.

6. Montrer pour $x \geqslant 0$ que : $x - \frac{x^2}{2} \leqslant ln(1+x) \leqslant x$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ln(1 + \frac{k}{n^2})$.

7. (*) Etudier la dérivabilité de
   (a) $f(x) = cos(\sqrt{x})$ et de
   (b) $g(x) = x^2.sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$.

8. Etudier : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (trouver $g'(x) = f(x)$, $f'(x) = g(x)$.)

9. Etudier la fonction : $f(x) = \frac{1}{2}.ln \mid \frac{1+x}{1-x} \mid$ (elle est impaire, de dérivée $\frac{1}{1-x^2}$.)

10. (*) Montrer que $\left(ln \mid tan\frac{x}{2} \mid\right)' = \frac{1}{sin(x)}$. Idem $\left(ln \mid tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \mid\right)' = \frac{1}{cos(x)}$.

11. (*) Etudier la fonction $f(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (impaire, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.)

12. (*) Etudier la fonction $f(x) = ln \mid x + \sqrt{x^2-1} \mid$ (impaire, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.)

13. (*) Soit f une fonction dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. [On peut noter : $a = f'(0)$.]
    Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$. Montrer que la suite (S_n) possède une limite finie si $n \to +\infty$.

Chapitre 11

Dérivation des fonct. de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: théorèmes

11.1 Théorèmes fondamentaux

11.1.1 Lemme(=propriété auxiliaire) : Dérivée en un extremum local.

On dit que f présente un maximum local en x_0 si f est définie sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$, et $f(x) \leqslant f(x_0)$ sur cet intervalle (idem minimum local) .
Si f présente un extrémum local en x_0 et est dérivable en x_0 alors : $f'(x_0) = 0$.

Démonstration Faire un dessin !
Le taux d'accroisement $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est $\geqslant 0$ si $h < 0$, dans le cas d'un maximum local.
Comme les inégalités largent se prolongent en passant à la limite (par Théorème) $f'(x_0) \geqslant 0$.
De même $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est $\leqslant 0$ si $h > 0$; ainsi $f'(x_0) \leqslant 0$ en faisant $h \longrightarrow 0^+$ $(\mid h \mid < \alpha)$.
En résumé, forcément $f'(x_0) = 0$.

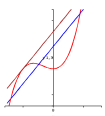
11.1.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $a \neq b$; avec $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in)a, b[$: $f'(c) = 0$

Démonstration Faire un dessin !
On sait que f, continue sur un segment a des bornes $M = sup f_{[a,b]}$ et $m = inf f_{[a,b]}$ atteintes.
Si $m = M$, f est constante ; résultat acquis.
Si $m < M$, M ou m est atteint hors des bords a, b car $f(a) = f(b)$; par exemple : $M = f(c), c \in]a, b[$.
Alors M, qui est le maximum absolu, est aussi local. Le lemme termine.

11.1.3 Théorème des accroissements finis [ou de "la pente moyenne"]

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $a \neq b$. Alors, $\exists c \in)a, b[$: $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$.



Autre énoncé : $b = a + h$; $\exists \theta \in]0, 1[$ / $f(a + h) - f(a) = h.f'(a + \theta.h)$.

Démonstration. Posons $g(x) = f(x) - [f(a) + k(b - a)]$ où k est choisi tel que $g(b) = g(a)$; c'est possible en prenant exactement (à voir) $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $a \neq b$! [En fait, on sait que **la droite** (A, B) **a pour équation** $y = f(a) + k.(x - a)$ **où justement** $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$**]**. Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; $\exists c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$: donc $f'(c) = k$; ce qui termine.

11.1.4 Inégalités des accroissements finis

. Soit $m_1 \leqslant f' \leqslant M_1$ sur $[a,b]$. Alors $a \leqslant b \Longrightarrow m_1.(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M_1.(b-a)$.
. Autre énoncé : Soit $\mid f' \mid \leqslant k$ sur $[a,b]$. Alors : $\mid f(b)-f(a) \mid \leqslant k. \mid b-a \mid$.

Evident à partir de l'égalité des accroissements finis.

Pourquoi ne se limite-t-on pas à une **égalité** des Accroissements finis ? Car pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, on a seulement une inégalité des accroissements finis. (Exemple si : $t \mapsto e^{it}$ sur $[0,\pi]$)

11.1.5 Exemples

1. $f(x) = \alpha.x^2$ sur $[a,b]$. On trouve $c = \dfrac{a+b}{2}$: propriété de la parabole si $\alpha \neq 0$. Dessin ?
2. $f(x) = \alpha/x$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}^*$. On trouve que $c = \sqrt{ab}$ = Moyenne géométrique de a, b. Dessin ?
3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ (polynôme à coefficients réels), de degré $n \geqslant 1$. On dit que P est "scindé" sur $\mathbb{R}$ si P possède n racines réelles. Montrer alors que P' est aussi "scindé" sur $\mathbb{R}$.

   Corrigé :
   – C'est le cas de $P(x) = 5.(x+2).x.(2x-1).(x-2).(x-4).(x-5)$.
   Indication : Il suffit de bien connaitre et d'appliquer le Théorème de Rolle !
   – (*) En fait, le résultat est encore vrai si P a des racines multiples comme pour $P(x) = 5.(x+1)^4.x.(x-2)^3.(2.x-7)$. En effet, si a est racine de P à l'ordre $k \geqslant 1$ ou si on a $P(x) = (x-a)^k.Q(x)$, alors **en dérivant,** on voit que a est racine de P' à l'ordre $k-1$. A finir.

11.2 Trois conséquences fondamentales (–du "TAF"–)

11.2.1 Sens de variation des fonctions dérivables

1) Si $f' \geqslant 0$ (et existe !) sur un intervalle I, alors f croissante (sens large).
2) $f' \leqslant 0$ sur $I \Longrightarrow f$ décroissante. 3) $f' = 0$ sur $I \Longrightarrow f$ constante. De plus :
Si $f' \geqslant 0$ et nulle sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle, f est strictement croissante.

1. Démonstration
   1) Si $x < y$ dans I, le théorème des accr. finis sur $[x,y]$ (bien voir les hypothèses), donne $f(x) \leqslant f(y)$.
   2) Il suffit de considérer $-f$. 3) Provient de 1) et 2).
   A ce stade : Si une fonction g admet des primitives G_1, G_2 sur un intervalle : $G_2 - G_1 = cte$.
   "De plus" : On sait déjà que f est croissante au sens large ; et :
   s'il existait $x < y$ tel que $f(x) = f(y)$, f serait constante sur $[x,y]$; f' nulle sur $[x,y]$; exclus.
   Exemple $f(x) = x^3$ **est donc strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
2. Remarque. La réciproque de 1) 2) 3) est vraie (f étant dérivable) : c'est un prolongement des inégalités (larges) par passage à la limite. **Mais le sens essentiel** est celui indiqué.

11.2.2 Théorème de la limite de la dérivée

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b], a \neq b$. Si $f'(x)$ a une limite l quand $x \longrightarrow a$:
Si l finie, alors $f'(a)$ existe et vaut l; si $l = \infty$, tangente $//Oy$ en $x = a$.
Attention : si pas de limite, on ne sait pas ! Faire une étude directe du taux d'accroissement !

1. Démonstration
   f vérifie les hypothèses du théorème des accr. finis sur $[a,x], x \neq a$; donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$, avec $c_x \in]a,x[$. Quand $x \longrightarrow a$, le taux d'accroissement tend vers l ; fini.

2. Exercices corrigés

 1) Revoir l'exemple $f(x) = x^2.sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ où $f'(0)$ existe quand même.

 2) Etudier la dérivabilité de $g : x \longmapsto cos(\sqrt{x})$.

 1ère solution. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ par composition ; en 0^+ : $\dfrac{cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{2.x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{2}$.
 Donc $g'(0)$ existe aussi et vaut $g'(0) = -1/2$. Ici, nous ne savons pas si g' continue en 0.

 2ème solution. g est continue sur $[0, +\infty[$ (composition) et si $x \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{-sin(\sqrt{x})}{2.\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{2}$.
 Le théorème de la limite de g' s'applique : $g'(0)$ existe et $g'(0) = -1/2$. Ici, on a plus travaillé, mais on sait en plus que g' est continue en 0 (donc sur $[0, +\infty[$) car on a : $g'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} g'(0)$.

 3) Pourquoi le théorème de la limite de la dérivée est-il **aussi** appelé théorème du prolongement C^1 ? **Bien revoir le cas de** $x \mapsto cos(\sqrt{x})$, C^1 **sur** $[0, +\infty[$.

11.2.3 (*) Fonctions lipschitziennes de rapport k

On dit que f est k-lipschitzienne sur un intervalle I si : $\forall x, y \in I, | f(y) - f(x) | \leqslant k. | y - x |$

1) Une telle appplication est continue [si $y \longrightarrow x$, $f(y) \longrightarrow f(x)$; réciproque fausse]

2) mais pas forcément dérivable [car $x \longmapsto | x |$ est 1-lipschitzienne cf. ch. $\mathbb{R}$]

3) Par contre, si f dérivable, (f k-lipschitzienne) $\Longleftrightarrow | f' |$ bornée par k

Démonstration

1) Réciproque ? $x \longmapsto x^2$ continue, mais non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ [f' non bornée, avec 3).]

2) On a vu que $x \longmapsto | x |$ est 1-lipschitzienne $\big| | x | - | y | \big| \leqslant | x - y |$ et non dérivable en 0.

3) $\Longrightarrow$: Si pour $x \neq x_0$, $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant k$, par passage à la limite, on obtient $| f'(x_0) | \leqslant k$.
 $\Longleftarrow$: Avec f dér. sur I, donc continue, le théorème des accroissements finis donne, si $x \neq y$:
 $\exists c \in]x, y[: | f(y) - f(x) | = | y - x | . | f'(c) | \leqslant k. | y - x |$. Cqfd (ce qu'il fallait démontrer)

1. (Exercices) Vérifier que $x \longmapsto a.x + b$ est lipschtitzienne de rapport $| a |$.
2. On dit que que f **est contractante si** f **est lipschtitzienne de rapport** $(0 \leqslant)$ $k < 1$.
 Dans quel cas $x \longmapsto a.x + b$ est-elle "contractante" ? (Bien sûr "ssi" $| a | < 1$.)
3. $x \longmapsto x + e^{-x}$ est-elle contractante sur $\mathbb{R}^+$? (Justifier qu'on aurait : $sup | f' | \leqslant k < 1$.)
4. Que dire de $\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$? (non lipschitz.) sur $[1, +\infty[$? (là, contractante : $k = 1/2$).

11.3 Dérivées successives

11.3.1 Définitions. Notations : $f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$; $f^{(k)}$ dérivée $k$ième

f est dite de classe C^k si $f^{(k)}$ existe et est continue (C^0 si f continue). C^∞ si f est $C^p, \forall p \in \mathbb{N}$.

Exemples

1. Les fonctions polynômes, exp, sin, cos sont de classe C^∞.
2. La fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$ est C^∞ sur son domaine et $\boxed{\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x+a)^{n+1}}}$
 Par récurrence en dérivant $[\dfrac{1}{(x+a)^k}]' = [(x + a)^{-k}]' = -k.(x + a)^{-k-1}$!

11.3.2 Formule de Leibnitz

$$\boxed{u,\ v \text{ de classe } C^n \implies u.v \text{ aussi, } \textbf{et :} \quad (u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.u^{(n-k)}.v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}.}$$

Récurrence sur n ; avec $(u.v)' = ...$

Exemple

$[(2x+1)^2.cos(x)]^{(7)} = (2x+1)^2.[cos(x)]^{(7)} + C_7^1[(2x+1)^2]'[cos(x)]^{(6)} + C_7^2[(2x+1)^2]"[cos(x)]^{(5)}$

avec $[cos(x)]^{(p)} = cos(x + p.\frac{\pi}{2})$; $[(2x+1)^2]' = 2.(2x+1).2$; $C_7^1 = 7$ et $C_7^2 = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{2.1} = 21$.

11.3.3 Composition

On a : $\boxed{(f : I \longrightarrow J\ C^n;\ \ g : J \longrightarrow \mathbb{R}\ C^n) \implies gof\ C^n.}$

$n = 0$: connu.

$n = 1$: on sait $(gof)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$; il reste à voir $(gof)'$ continue : d'après son expression !

$n = 2$: ... La formule générale est difficile : formule de Faa Di Bruno.[1]

11.3.4 Fonction réciproque C^1 ?

Dans les hypothèses où f^{-1} dérivable (**à revoir**), on sait que : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Donc : Si **de plus** f est C^1, alors f^{-1} sera C^1 par composition, **d'après son expression.**

11.4 Fonctions convexes

11.4.1 Parties convexes (PSI)

1. Rappel : une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe si elle est vide ou : $M, N \in \mathcal{C} \implies [MN] \subset \mathcal{C}$.
   Dessiner une partie convexe et une partie non convexe !
2. Cas d'un segment $[a, b], a \neq b$, de $\mathbb{R}$: $x \in [a, b] \iff \dfrac{x-a}{b-a} = \beta \in [0, 1] \iff x = (1-\beta)a + \beta.b$.
   Avec $\alpha = 1 - \beta \in [0, 1]$, on écrit : $x = \alpha.a + (1-\alpha).b$. Voir Note [2]

11.4.2 Définition. Interprétation (PSI)

$\boxed{f \text{ est dite convexe sur } I \text{ si } \forall a, b \in I(\text{interv.}), \forall \alpha \in [0, 1] :\ f(\alpha.a + (1-\alpha).b) \leqslant \alpha.f(a) + (1-\alpha).f(b)}$

Dessin : Pour $\alpha = \frac{1}{3}$; placer $A(a, f(a)); B(b, f(b))$; $x = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$; et $y = \frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f(b)$ sur Oy ;

$A, B, N(x, y)$ sont alignés ! enfin : $f(x) \leqslant y = \frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f(b)$! Donc **(avec les cordes) :**

$\boxed{f$ **est convexe sur** $I \iff$ **Tout arc est situé sous toute corde de la courbe.**$}$

[1] Né à Alessandria (Italie) le 9 mars 1825, dernier de 12 enfants et orphelin de mère à 9 ans, Francesco Faà di Bruno entra en 1840 à l'Académie militaire de Turin et devint officier d'état-major en 1846. L'armée l'envoya à Paris pour poursuivre des études de physique et de mathématiques avec Cauchy. De retour en Italie, deux ans plus tard, il abandonna la carrière militaire et continua ses études à Turin, où il se distingua comme professeur et chercheur. Ami de Don Bosco et influencé par son exemple, il se consacra au bien spirituel des jeunes travailleuses et fonda de nombreuses œuvres pour la protection et la promotion de la femme, parmi lesquelles la Congrégation des Petites Sœurs de Notre-Dame du Suffrage. Ordonné prêtre sur le tard en 1876, il mourut à Turin le 27 mars 1888. Seul mathématicien béatifié (le 25.09.1988 par Saint Jean-Paul II).

[2] Barycentre ou principe de la balance romaine : En a, poids $\alpha \geqslant 0$; en b, poids $1 - \alpha \geqslant 0$; x point d'égalité des moments $(x-a).\alpha = (b-x).(1-\alpha)$. D'où : $\alpha = k.(b-x)$, $1 - \alpha = k(x-a)$ ainsi que : $k = \dfrac{1}{b-a}$ en ajoutant ! Dessin ?

Remarques 1) $x \mapsto |\, x \,|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (non dérivable en 0).

2) On a aisément : f convexe $\Leftrightarrow$ le "surgraphe" $\{(x,y), y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

11.4.3 Résultats énoncés : PSI

1. Caractérisation **avec les pentes**

   $\boxed{\text{On a}}$: f convexe sur I, intervalle $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I, p(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I - \{x_0\}$

   Conséquence. Avec le théorème de la limite monotone : Si f convexe sur (a,b) et $x_0 \in]a,b[$,

   alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0 ! donc C^0 sur $]a,b[$!

2. **Pour f dérivable, reconnaitre une fonction convexe**

   Si de plus f est dérivable sur $]a,b[$, alors : f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante ;
   donc si f" existe, on a : f convexe $\Leftrightarrow$ $f" \geqslant O$ (c'est la pratique !)

3. **Pour f dérivable, caractérisation avec les tangentes**

   Si f est dérivable sur $]a,b[$: f convexe $\Leftrightarrow$ Tout arc est au dessus de toute tangente.

11.4.4 Exemples (par étude de fonctions en PT)

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$ (convexité de exp). On en déduit en changeant x en $-x$:

   $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geqslant 1 - x$; donc pour $x < 1$ par division : $1 + x \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$. Dessin ?

2. $x \longmapsto ln(1+x) = f(x)$ est concave, **c'est-à-dire $-f$ est convexe** dessin de f ?

   Donc $\boxed{ln(1+x) \leqslant x \quad \text{pour} \quad x > -1}$ ou bien $\boxed{ln(x) \leqslant x - 1 \quad \text{pour} \quad x > 0.}$

3. sin est concave sur $[0, \pi/2]$ (dérivée seconde : $-sin \leqslant O$) ; dessin ?

   Donc $\boxed{\forall x \in [0, \pi/2] \quad \dfrac{2.x}{\pi} \leqslant sin(x) \leqslant x}$ $y = \dfrac{2.x}{\pi}$ étant la corde $O(0,0)$ $B(\dfrac{\pi}{2}, 1)$.

   tan est convexe sur $[0, \pi/2[$; dessin ? Donc $\boxed{x \leqslant tan(x) \quad \text{sur} \quad [0, \pi/2[}$

11.4.5 Inégalités de convexité en complément (PSI)

Par récurrence, l'inégalité de base $\forall a, b \in I, \forall \alpha \in [0,1], f(\alpha.a + (1-\alpha).b) \leqslant \alpha.f(a) + (1-\alpha).f(b)$ se généralise ainsi : inégalité de Jensen

$$\boxed{\alpha_k \geqslant 0,\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = 1,\ f \text{ convexe sur } I,\ a_k \in I \Rightarrow f(\alpha_1.a_1 + ... + \alpha_n.a_n) \leqslant \alpha_1.f(a_1) + ... + \alpha_n.f(a_n)}$$

Exemples 1) $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Prenons $\alpha_k = \dfrac{1}{n}$, alors : $(a_1+a_2+...+a_n)^2 \leqslant n.[a_1^2+a_2^2+...+a_n^2]$.

Inégalité vue au ch. Espaces vectoriels euclidiens, cas particulier d'inégalité de "Cauchy-Schwartz".

2) Avec la **concavité du** ln ($\Leftrightarrow$ **convexité de** $-ln$) on obtient :

$$\boxed{\text{Pour } a_1, ...a_n \in]0, +\infty[, \text{ on a : Moy-géométrique} = \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \text{Moy-arithmétique}}$$

Car $ln(\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n}) \geqslant \dfrac{1}{n}.[ln(a_1)+...+ln(a_n)] = ln[(a_1.a_2....a_n)^{1/n}]$. Et exponentielle de chaque membre.

M+ **Exercices: Dérivation des fonct. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, théorèmes** **PTSI**

---

1. Rappeler le Théorème de Rolle, le Théorème des accroissements finis **et** des conséquences.

2. Calculer la dérivée $n$ième de
   (a) $\dfrac{1}{x^2-1}$ en trouvant deux constantes telles que : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.
   (b) $cos(x).sin^2(x)$ [**linéariser**]. (Et $cos^{(p)}(x) = cos(x + p.\pi/2)$.)

3. Avec le théorème des accroissements finis, montrer, pour $n > 0$: $\dfrac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln(n) < \dfrac{1}{n}$.

4. Graphe de $f(x) = x.Arctan(x) - \dfrac{ln(1+x^2)}{2}$. [En $+\infty$, voir que $f(x) = \dfrac{\pi.x}{2} - ln(x) - 1 + \epsilon(x)$, $\epsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.]
   [Note. Avec $\mid f'(x) \mid = \mid Arctan(x) \mid \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, f est $\dfrac{\pi}{2}$-lipschitzienne ; et avec $f" \geqslant O$, f est convexe.]

5. (*) Soit f deux fois dérivable sur $[a-h, a+h]$, $h > 0$. Montrer que :
   $\exists c \in]a-h, a+h[$ tel que $f(a+h) + f(a-h) - 2.f(a) = h^2 f"(c)$.
   [Considérer : $g(x) = f(a+x) + f(a-x) - 2.f(a) - k.x^2$, k choisi tel que $g(h) = 0$].

6. Un raccord C^∞. Soit f telle que $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. Dessin ?
   (a) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. [f C^0 ? f C^1 : théorème de la limite de la dérivée.]
   (b) (*) Puis voir $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}.e^{-1/x}$, où P_n est un polynôme à ne pas expliciter et f C^∞.]

7. (*) Soit $P_n(x) = \left([x^2-1]^n\right)^{(n)}$. Montrer que P_n possède n racines réelles distinctes.
   (Il suffit de montrer : P scindé sur $\mathbb{R} \Longrightarrow P'$ scindé sur $\mathbb{R}$ comme vu après le Théorème de Rolle).

8. (*) Soit f C^0 sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que : $\exists c \in]a, b[$ tel que la tangente en $(c, f(c))$ passe par $O(0, 0)$. [Considérer $f(x)/x$]

9. A partir de la concavité du ln, montrer que :
   (a) (* pour PSI) Pour $x_i > 0$: $\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.
   (b) (*) Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $u > 0$, $v > 0$: $u^\alpha.v^{1-\alpha} \leqslant \alpha.u + (1-\alpha).v$.
   En déduire pour $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, p, q positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$: $x.y \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

10. (*) Soit f C^∞ sur $]0, +\infty[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[t^{n-1}.f(\dfrac{1}{t})]^{(n)} = (-1)^n.t^{-n-1}.f^{(n)}(\dfrac{1}{t})$.
    Cas de $[x^{n-1}.ln(x)]^{(n)}$? de $[x^{n-1}.ln(1+x)]^{(n)}$? de $[x^{n-1}.e^{1/x}]^{(n)}$ (formule d'Halphen) ? Application : Dérivée d'ordre n de $g(x) = e^{1/x}$?

Chapitre 12

Les fonctions élémentaires

12.1 Fonctions log, exp

12.1.1 Fonction ln [John Napier, en France "Neper". Grégoire de Saint Vincent ...]

1. Deux rappels

   • Soit f une fonction C^0 sur un segment $[a,b]$; alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe (aire).

   • Soit f continue sur I, un intervalle et $a, x \in I$. Alors **(bien voir les lettres)** $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$

   est une primitive de f : $\boxed{F \text{ dérivable et } F' = f \text{ ou } \underline{F'(x) = f(x)}.}$

   Ou bien, pour f continue, intégrale $\equiv$ primitive. Cf. chapitre Intégrales.

2. Définition **Bien voir les lettres aussi comme modèle**

   $$\boxed{ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ est définie pour } x > 0\,;\ ln(1) = 0\,;\ ln'(x) = \frac{1}{x}\,;\ \text{ donc } ln \text{ strictement croissante.}}$$

3. Théorèmes fondamentaux

   $$\boxed{ln(a.b) = ln(a) + ln(b), \text{ si } a > 0, b > 0. \text{ D'où } ln(1/a) = -ln(a) \text{ et } ln(a^r) = r.ln(a) \text{ pour } r \in \mathbb{Q}.}$$

   Démonstration (On utilise $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$!)

   • Soit $g(x) = ln(ax) - ln(x)$; alors g est dérivable par composition et $g'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$.
   Donc : $g = Cte = g(1) = ln(a)$; ou $ln(ax) = ln(a) + ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

   • Puis, faire $b = \dfrac{1}{a}$; qui donne $ln(a^{-1}) = -ln(a)$.

   • Enfin ici, on va procèder par étapes :
   pour $r = n \in \mathbb{N}$, celà vient de la formule fondamentale.
   pour $r = -n \in \mathbb{Z}^-$, on a $ln(a^{-n}) = ln[(a^n)^{-1}] = -ln(a^n) = -n.ln(a)$.
   pour $q \in \mathbb{N}^*$, $q.ln(a^{1/q}) = ln(a)$ donc $ln(a^{1/q}) = \dfrac{1}{q}.ln(a)$. Enfin $ln(a^{p/q}) = p.ln(a^{1/q}) = \dfrac{p}{q}.ln(a)$.

4. Prouvons les limites $\boxed{ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \text{ D'où } ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty. \quad \text{Puis : } \dfrac{ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

   Démonstration :

   • Comme ln est croissante (strictement même), elle a forcément une limite finie ou infinie $l > 0$, si $x \to +\infty$. Or $ln(2x) = ln(2) + ln(x)$; par passage à la limite $l = ln(2) + l$: donc $l = +\infty$.

   • Déduction avec : $ln(x) = -ln(1/x)$.

   • Puis (*), avec un peu de calcul intégral (faire un dessin). Sur $[1, \underline{x \geqslant 1}]$: $\sqrt{t} \leqslant t$, donc $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$;

   donc $ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \leqslant \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.[\sqrt{x} - 1]$. Ainsi : $x \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2.\sqrt{x}}{x}$ ...

   $\boxed{\text{Note}}$ $\dfrac{ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ se dit : ln admet "une branche parabolique de direction (asymptotique) Ox".

Dessin et Remarques

- $(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ (Très important et à bien savoir).
- $ln(e) = 1$ où $e = 2,71828$ ... La tangente en $(e,1)$ passe par O.
- Comparaison en $+\infty$ avec x^r connue : $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ $\boxed{\text{ou}}$ $ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} (u-1)$ (cf. dérivée en $x_0 = 1$)
- Enfin la dérivée $(ln \mid u(x) \mid)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$. $\boxed{\underline{\text{Primitives}} \text{ de } \frac{u'(x)}{u(x)} : ln \mid u(x) \mid + C.}$

12.1.2 Fonction $exp = ln^{-1}$

1. Définition

   ln est C^0 strict. croissante, surjective $]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$. La réciproque exp est donc C^0. De plus, ln est dérivable et $\forall x > 0,\ ln'(x) > 0$; donc exp est dérivable et on a : $exp' = exp$.

   Voir chapitres précédents !

2. Propriétés fondamentales

   $\boxed{exp(\alpha+\beta) = exp(\alpha).exp(\beta)\,; \quad exp(-\alpha) = 1/exp(\alpha)\,; \quad [exp(\alpha)]^r = exp(r.\alpha) \quad \text{ceci pour } r \in Q.}$

   Il suffit de prendre le ln (tout est donc ramené au ln).

   Notation nouvelle (conséquence)

   On a donc $[exp(1)]^r = exp(r)$ ou bien $e^r = exp(r)$ mais seulement pour $r \in \mathbb{Q}$.

   On note $e^x = exp(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$: C'est une définition si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3. Limites (Prendre le ln)

   $\boxed{e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,; \text{ d'où } e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty : \text{Branche "parabolique" de direction (asympt.) } Oy.}$

   Dessin et Remarques

   - La tangente en $(1,e)$ à exp passe par O.
   - $(1+\frac{\lambda}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\lambda$ $[n >\mid \lambda \mid \Rightarrow (1+\frac{\lambda}{n}) > 0.]$
   - On a l'équivalent : $e^h - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h$.
   - Comparaison avec x^r connue : $e^x/x^{100} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Question. $(e^\alpha)^r = e^{r.\alpha}$, si $r \in \mathbb{Q}$. A-t-on $(e^\alpha)^\beta = e^{\alpha.\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$? Rép. a^β pas encore défini !

12.1.3 Autres fonctions exponentielles

1. Définition

   Pour généraliser $(e^\alpha)^r = e^{r.\alpha}$: en posant $e^\alpha = a$, $\alpha = ln(a)$, on définit : $a^\beta = e^{\beta.ln(a)}$

   Ainsi on définit : $\boxed{a^x = e^{x.ln(a)},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0\,; \qquad \textbf{ou bien :} \quad ln(a^x) = x.ln(a).}$

2. Théorèmes. On peut alors répondre à la question précédente et même (en exercices) :

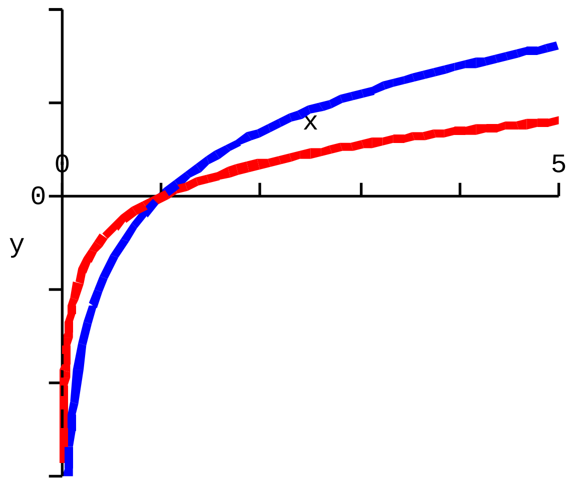
   $\boxed{\text{Pour } x,\ y \in \mathbb{R},\ a > 0 : \quad a^{x+y} = a^x.a^y;\ \ a^{-x} = 1/a^x;\ \ a^{xy} = (a^x)^y;\ \ (ab)^x = a^x.b^x;\ \ (\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}.}$

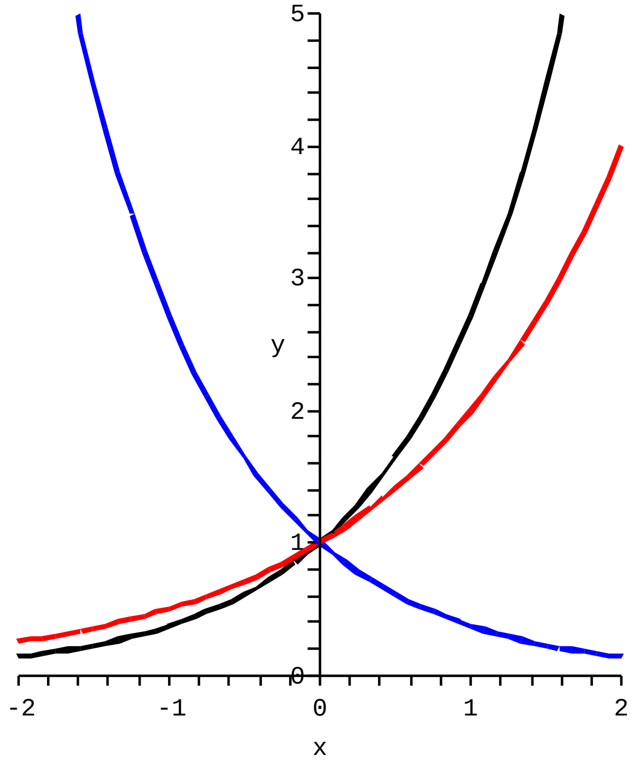
   $\boxed{(a^x)' = ln(a).a^x. \text{ D'où, si } a \neq 1,\ x \mapsto a^x \text{ bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,+\infty[\text{, de réciproque dérivable.}}$

3. Dessin et Remarque

   Faire les cas : 2^x ; $(\frac{1}{e})^x = e^{-x}$; 1^x. On aura 3 formes indéterminées : ∞^0; 0^0; 1^∞.

Les logarithmes et les exponentielles :





12.1.4 Autres fonctions log

1. Définition

$$\boxed{log_a \text{ est la réciproque de } exp_a \quad \text{donc } a>0,\ a\neq 1 \quad \text{et : } \ log_a(x)=\frac{ln(x)}{ln(a)}}$$

Car : $y=log_a(x) \Leftrightarrow a^y=x \Leftrightarrow e^{y.ln(a)}=x \Leftrightarrow y.ln(a)=ln(x)$.

2. Rappel et remarque. Soit $\mathcal{P}=\mathbb{R}^2$ le plan affine.

   - L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ $\quad f_k:\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ telle que : $\ x'=x,\ y'=\frac{b}{a}.y=k.y$

     est appelée **dilatation (ou affinité) de base Ox de direction Oy, de rapport** $k=\frac{b}{a}$.

     [Vue au sujet de l'ellipse]. Elle est bijective ($k\neq 0$) et de réciproque $f_{1/k}$.

   - Voir que l'on passe de la courbe du ln à celle de log_a par une telle dilatation de raport $k=\frac{1}{ln(a)}$.

3. Dessins

   Cas $a=10$? (ci-dessus) Cas $a=\frac{1}{e}$?

Notes (peu importantes) :

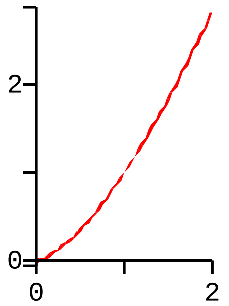
$log_a(a)=1$.

$log_{10}(x)=\frac{ln(x)}{ln(10)}$; et donc : $log_{10}(e)=\frac{1}{ln(10)}$.

On a une certaine relation de Chasles : $log_a(c)=log_a(b).log_b(c)$.

12.1.5 Fonctions puissances : $y = x^\alpha, \alpha \notin \mathbb{Q}$

1. **Si** $\alpha \notin \mathbb{Q}$**,** $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha.ln(x)}}$ (Si $\alpha \in \mathbb{Q}$: connu sans ln)
2. Exemple : $y = x^{\sqrt{2}}$
   - **Prolongement continu en** $x = 0$ (car $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$). On note encore f
   - Dérivée ? si $x > 0$, **trouver** $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ et fonction prolongée dérivable en 0 car $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 si $x \to 0$ (et même $C^1([0, +\infty[)$ avec le Théorème de la limite de la dérivée).
   - Branche infinie ? $\dfrac{y}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: **branche "parabolique " de direction (asympt.)** Oy**.**

Graphe : 

12.1.6 (*) Equations fonctionnelles usuelles (compléments)

1. Les applications C^0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ / $f(x + y) = f(x) + f(y)$ [équation de Cauchy] sont $f(x) = a.x$.
   Vu en exercice. On en déduit :
2. Les applications C^0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ / $f(x + y) = f(x).f(y)$ sont $f(x) = a^x, a > 0$ ou $f = O$.
3. Les applications C^0 de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ / $f(x.y) = f(x) + f(y)$ sont $f(x) = k.ln(x)$.
4. Les applications C^0 de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ / $f(x.y) = f(x).f(y)$ sont $f(x) = x^\alpha$ ou $f = O$.

12.2 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

12.2.1 Voir chapitres précédents

2 relations vues :

$$Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2} \text{ sur } [-1, 1].$$

$$\text{et } \ Arctan(x) + Arccot(x) = \frac{\pi}{2}, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

12.2.2 Si $a.b = 1$, $Arctan(a) + Arctan(1/a) = \pm\pi/2$ avec $+1$ si $a > 0$, -1 si $a < 0$.

En exercice : Pour $ab \neq 1$, $Arctan(a) + Arctan(b) = Arctan\dfrac{a + b}{1 - ab} + k.\pi$, $k = -1, 0$ ou 1.

Solution :
G étant le membre de gauche, $tan(G) = \dfrac{a + b}{1 - ab}$ car $tan(Arctan(x)) = x$ tout le temps sur $\mathbb{R}$.
A ce stade, $G = Arctan\dfrac{a + b}{1 - ab} + k.\pi$; mais par encadrement facile : $\dfrac{-3.\pi}{2} < k.\pi < \dfrac{3.\pi}{2}$. Fini.

Un cas particulier (laissé en exercice)

$\boxed{\text{Si } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \text{ alors : } \ Arctan(a) - Arctan(b) = Arctan\dfrac{a-b}{1+ab} \quad [\text{un cas où } k=0].}$

12.2.3 Symbole e^z

On définit $e^z = e^{x+iy}$ par $\boxed{e^z = e^x.[cos(y) + isin(y)]}$.

$\boxed{\text{Alors (à voir)}}$

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$.
- et $\dfrac{d}{dt}(e^{a.t}) = a.e^{a.t}$, même si $a \in \mathbb{C}$, t réel (utilisé avec les primitives).

12.3 Fonctions hyperboliques

12.3.1 Théorème de décomposition

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Toute application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ s'écrit d'une et d'une seule façon comme somme :}\\ \text{d'une application paire et d'une application impaire.}\end{array}}$

On peut réfléchir au cas (facile) où $f(x) = 3 - x + x^2 - x^4 + 3x^5$.

Démonstration

1) Analyse et unicité :

Si on a une écriture $f(x) = p(x) + i(x)$ (1) [notations claires], forcément $f(-x) = p(x) - i(x)$ (2) ;

donc : $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$; $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

2) Synthèse et existence :

pour f donnée, choisissons les seuls candidats : $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$; $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$;

vérifions qu'ils conviennent : $f(x) = p(x) + i(x)$ [oui] ; p est paire [oui] ; i est impaire [oui]. Fini.

12.3.2 ch, sh cosinus et sinus hyperbolique

1. Définitions $\boxed{ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2};\quad sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.}$ $ch(x)$ étant donc la partie paire de e^x ; $sh(x)$ la partie impaire de e^x. Ou : $\boxed{e^x = ch(x) + sh(x);\quad e^{-x} = ch(x) - sh(x)}$ **par équivalence.**

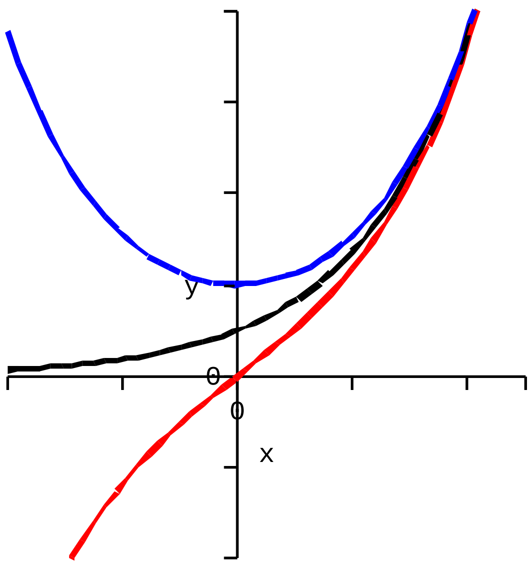
   Aussi à noter : $\boxed{e^x + e^{-x} = 2.ch(x); \qquad e^x - e^{-x} = 2.sh(x)}$

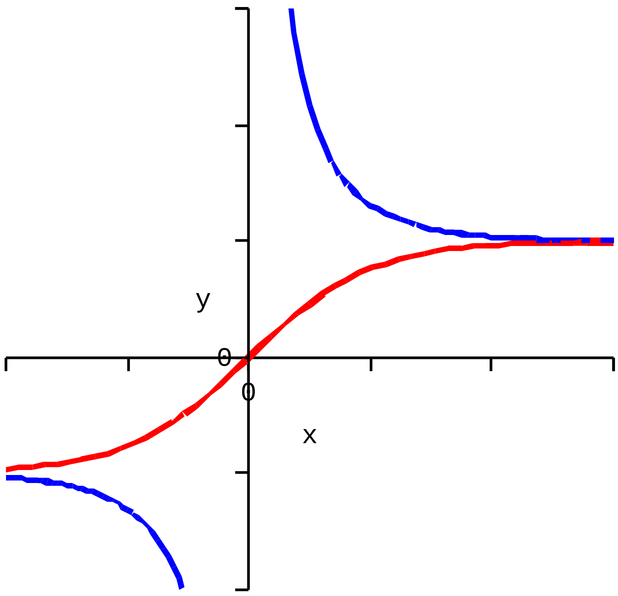
2. Etude
   - **D'abord** $e^x.e^{-x} = 1$ **donne** $\boxed{ch^2(x) - sh^2(x) = 1.}$ **Puis** $\boxed{ch' = +sh;\quad sh' = +ch.}$
   - Donc sh est croissante (strictement, sur $\mathbb{R}$, car $ch > 0$; mais on étudie pour $x \geqslant 0$ parité).
   - $sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (dérivée en 0) et $sh(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$. D'où sh ... Puis :
   - ch croissante sur $\mathbb{R}^+$ car $sh \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$; va de 1 à $+\infty$; $ch(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$. D'où ch ...

3. **Remarques à bien voir**
   - Non seulement $ch(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} sh(x)$, mais encore $ch(x) - sh(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $[ch(x) - sh(x) = e^{-x}]$
   - En fait : $ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; en multipliant haut et bas par $ch(x) + 1$ (...) par exemple.

4. Dessin de ch, sh et $x \mapsto e^x/2$.

sinus et cosinus hyperboliques avec $x \mapsto e^x/2$; puis tangente et cotangente hyperboliques :





12.3.3 th, coth

1. Définition

$$\boxed{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \text{ impaire, } C^\infty(\mathbb{R}) ; \; coth(x) = \frac{1}{th(x)} \text{ impaire, définie et } C^\infty(\mathbb{R}^*)}$$

2. Dérivées

$$\boxed{\begin{array}{c} th'(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x) \quad \text{donc} \quad \mid th(x) \mid < 1; \\ coth'(x) = \dfrac{-1}{sh^2(x)} = -[coth^2(x) - 1] \quad \text{donc} \quad \mid coth(x) \mid > 1. \end{array}}$$

3. Courbes (ci-dessus)

Remarques $\quad th(x) \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad th(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{-2}{e^{2x}}.$

Ce qui suit est Hors programme. (En exercice)

12.3.4 Trigonométrie hyperbolique

1) En plus des définitions et de $\boxed{ch^2(x) - sh^2(x) = 1}$ avec $e^{a+b} = e^a.e^b$ et $e^{-(a+b)} = e^{-a}.e^{-b}$, on a :

2) **Hors progr. (bis)** $\left\{ \begin{array}{l} sh(a+b) = sh(a).ch(b) + sh(b)ch(a) \\ sh(a-b) = sh(a)ch(b) - sh(b)ch(a) \\ ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) \\ ch(a-b) = ch(a)ch(b) - sh(a)sh(b) \end{array} \right.$ D'où $\left\{ \begin{array}{l} th(a+b) = \dfrac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)} \\ th(a-b) = \dfrac{th(a)-th(b)}{1-th(a)th(b)} \end{array} \right.$

(Formules d'addition.)

3) D'où : $\begin{cases} ch(2a) = 2ch^2(a) - 1 = 1 + 2sh^2(a) = ch^2(a) + sh^2(a) \\ sh(2a) = 2sh(a)ch(a) \quad \text{et donc } th(2a) \end{cases}$

en particulier $\boxed{ch^2(a) = \dfrac{ch(2a)+1}{2}; \quad sh^2(a) = \dfrac{ch(2a)-1}{2}}$ (Duplication)

4) Et $\begin{cases} sh(a+b) + sh(a-b) = 2sh(a)ch(b) \\ sh(a+b) - sh(a-b) = 2ch(a)sh(b) \\ ch(a+b) + ch(a-b) = 2ch(a)ch(b) \\ ch(a+b) - ch(a-b) = +2sh(a)sh(b) \end{cases}$ ou $\begin{cases} sh(p) + sh(q) = 2.sh(\frac{p+q}{2}).ch(\frac{p-q}{2}) \\ sh(p) - sh(q) = 2.ch(\frac{p+q}{2}).sh(\frac{p-q}{2}) \\ ch(p) + ch(q) = 2.ch(\frac{p+q}{2}).ch(\frac{p-q}{2}) \\ ch(p) - ch(q) = +2.sh(\frac{p+q}{2}).sh(\frac{p-q}{2}) \end{cases}$

Que l'on peut retenir par l'ordre choisi avec "si co co si co co + si si" (pour Somme ↔Produit).

5) En posant : $\boxed{t = e^x}$, on a $sh(x)$, $ch(x)$, $th(x)$ fraction rationnelle en t :

$$sh(x) = \frac{t - 1/t}{2} = \frac{t^2-1}{2t}; \quad ch(x) = \frac{t+1/t}{2} = \frac{t^2+1}{2t}; \quad th(x) = \frac{t-1/t}{t+1/t} = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

(A cause de celà, les relations à l'aide de $th(x/2)$ moins utiles ; juste en exercice

$sh(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $ch(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $th(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ fractions rationnelles en $t = th(\frac{x}{2})$.)

6) Signalons enfin (et à ne pas confondre avec ce qui précède)

$sh^2(x) = \dfrac{th^2(x)}{1-th^2(x)}$ $\quad ch^2(x) = \dfrac{1}{1-th^2(x)}$ (cf. Dérivée de th...).

Démonstration Les formules d'addition sont vues. Toutes les autres en résultent !

Par exemple : $sh^2(a) = \dfrac{sh^2(a)}{ch^2(a) - sh^2(a)}$ et en divisant par $ch^2(a)$, on trouve la 1ère de 6).

Attention : $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$ **ne se généralise pas ici ! (et** $sh^2(x) \neq sh(2x)$ **!)**

12.3.5 Exercices et remarques

1. On a ou on vérifie que : $ch(x) - 1 = +2.sh^2(\frac{x}{2})$; on en re-déduit : $ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

2. Ensuite : A-t-on l'analogue de la formule de Moivre ?

   Oui ! $(e^x)^n = e^{nx}$! ou $\boxed{[ch(x) + sh(x)]^n = ch(nx) + sh(nx) \ \textbf{et parité} \ \text{(rappelée après)}}$

3. Exercice corrigé

   . Simplifier $C = \sum_{k=0}^{n} ch(kx)$. Analogue à $\sum_{k=0}^{n} cos(kx)$ pour revoir la trigonométrie circulaire !

   . Solution

   Posons $F = \sum_{k=0}^{n} e^{kx}$ $\boxed{C \text{ sera la partie } \textbf{paire} \text{ de } F(x) \ \textbf{ou bien} \ C = \dfrac{F(x)+F(-x)}{2} \text{ si besoin.}}$

   On a : $F = \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}}.\dfrac{2.sh[(n+1)x/2]}{2.sh(x/2)} = \dfrac{sh[(n+1)x/2]}{sh(x/2)}[ch(\frac{nx}{2}) + sh(\frac{nx}{2})]$.

   Donc : $C = \dfrac{sh[(n+1)x/2]}{sh(x/2)}.ch(\frac{nx}{2})$ Voir quelques vérifications ($n = 0$, $n = 1$, $x = 0$).

4. Resterait les hyperboliques **réciproques** $Argsh, Argch, Argth, ...$

M+ **Exercices: Fonctions élémentaires** **PTSI**

---

1. Fonction ln et exp : $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{\lambda}{n})^n$? Définition de a^x, $a>0$? $log_a(x)$, $a>0$, $a\neq 1$?

2. (*) Simplifier, grâce à de la trigonométrie ici, qui évite de dériver :
   (a) $Arccos(1-2x^2)$ (b) $Arcsin(2x.\sqrt{1-x^2})$
   (c) $Arctan(\dfrac{2x}{1-x^2})$ (d) Représenter : $Arctan[\dfrac{1+tan(x)}{1-tan(x)}]$. [Voir : $tan(\dfrac{\pi}{4}+x)$]

3. $\boxed{\text{Calculer}}$ $th'(x)$ [$=1/\ ch^2(x)$ ou $1-th^2(x)$; donc $\mid th(x)\mid <1$.] $coth'(x)$ idem.

4. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{ch(x)}{1+sh(x)}]^x$ (b) Equivalent de $ln[ch(x)]$ en $+\infty$ (c*) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[ch(x)]^{1/sh(x)}-1}{ln[th(1/x)]}$?

5. Inégalités. Prouver $x+\dfrac{x^3}{3}\leqslant tan(x)\leqslant x+\dfrac{14x^3}{25}$ sur [0,1]. Et $\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant Arctan(x)$ sur $[0,+\infty[$.

6. (*) Dériver et trouver chaque fois $\dfrac{cte}{ch(x)}$; en déduire des relations entre les 3 fonctions suivantes !
   $Arctan(e^x)$ $Arctan[sh(x)]$ $Arctan\left(th(x/2)\right)$ **Note** : $th=sh/ch$; $ch(2a)=ch^2(a)+sh^2(a)$.
   [F. de Gunderman : $\theta=gd(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{ch(t)}=Arctan(sh(x))=2.Arctan(th(\frac{x}{2}))=2Arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}=Arcsin(th(x))$;
   F. inverse : $x=arcgd(\theta)=gd^{-1}(\theta)=Argth(sin(\theta))=\dfrac{1}{2}.ln\dfrac{1+sin(\theta)}{1-sin(\theta)}=ln(tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}))=Argsh(tan(\theta))$. Ex 9]

7. (*) Montrer l'égalité : $Arctan\dfrac{x}{x+1}-Arctan\dfrac{x-1}{x}=Arctan\dfrac{1}{2.x^2}$, pour $x>0$.

8. Interprétation géométrique de t dans $ch(t), sh(t)$. Tracer la courbe d'éq. $x^2-y^2=1$ en repère o.n.
   (*) Soit $A(1,0)$ $M(x=ch(t),y=sh(t)), t\geqslant 0$. Montrer que t =2.Airealgébrique(OAM)curviligne //Cercle.

9. (*) Soit $x=ln[tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2})]$, $x\in\mathbb{R}$, $\theta\in]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ [D'où $x=\displaystyle\int_0^\theta\frac{dt}{cos(t)}$, fonction inverse de Gunderman.]
   Montrer que : $sin(\theta)=th(x)$; $dx/d\theta=1/cos(\theta)=ch(x)$; $tan(\theta)=sh(x)$; $tan(\theta/2)=th(x/2)$.
   [Intervient dans les "loxodromies" de la sphère : si φ =longitude, $\theta=OX,OM$ =latitude et si, avec $\dfrac{\pi}{2}-V$ azimut, $V=cte$ =angle(trajectoire,méridien), loxodromie, $tan(V)=\dfrac{d\theta}{cos(\theta).d\varphi}$: $\boxed{(\varphi-\varphi_0).tan(V)=gd^{-1}(\theta).}$ Ainsi, dans les cartes de Mercator : $Ox=\varphi$, $Oy=gd^{-1}(\theta)$, les loxodromies sont des droites ! *Longueur* $=\dfrac{\pi.R}{2.sin(V)}$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.]

10. (*) Montrer : $\dfrac{\pi}{4}=4.Arctan\dfrac{1}{5}-Arctan\dfrac{1}{239}=Arctan\dfrac{1}{2}+Arctan\dfrac{1}{5}+Arctan\dfrac{1}{8}=Arctan\dfrac{1}{2}+Arctan\dfrac{1}{3}...$
    (La 1ère formule est de John Machin 1680-1752, qui obtint 100 décimales pour π ;
    la 2ème 1844 Johan Dase : 205 décimales ; puis William Shanks 1812-1882 : > 500
    puis Fergusson avec calculette, en 1947 ; puis les ordinateurs ...)
    Note : $Arctan(x)$ est bien connu si $\mid x\mid <1$, surtout si x proche de 0 (Spé).

Chapitre 13

Equations différentielles (ordre 1 et 2)

13.1 Généralités

13.1.1 Equations du 1er ordre

1. La forme théorique est (1) $y' = f(x, y)$ où $f : I \text{ x } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Elle admet pour solution toute fonction φ dérivable sur $J \subset I$ telle que $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$.
   Exemple très simple : $y' = \dfrac{1}{x}$, pour $x > 0$, donne : $y = ln(x) + \lambda$.

2. Problème de Cauchy : Existence et unicité de solution "maximale" de (1) vérifiant les conditions initiales (x_0, y_0), soit telles que $\varphi(x_0) = y_0$.
   Ainsi : soit (2) $xy' - 2y = 0$. La forme (1) est $y' = \dfrac{2y}{x}$; **donc** ennuis attendus pour $x = 0$.
   D'ailleurs, pas de solution passant par $\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{pmatrix}$. [Et une infinité passant par $\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{pmatrix}$, cf. II.]

---

3. **Compléments :**
   - Une solution est un couple (J, φ). La courbe : $x \in J, y = \varphi(x)$ est dite "courbe intégrale".
   - Comparaison de solutions : $(J_1, \varphi_1) \prec (J_2, \varphi_2)$ si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_{2/J_1} = \varphi_1$.
   - Soit φ dérivable telle que $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$ avec f continue (fonction de deux variables). Alors, par composition, le membre de droite est continue ; donc φ' sera continue : φ C^1.
   - On ne sait pas résoudre les équations compliquées. Aussi on considère $\{(x, y)/f(x, y) = k\}$ appelé isocline I_k : lieu des points où les courbes intégrales ont une pente (inclinaison) k. cf. II.

13.1.2 Equation du 2ème ordre

1. La forme théorique est (1) $y" = f(x, y, y')$, $f : I\text{x}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2. Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y" \end{pmatrix}$. Voyons qu'en théorie, on peut se ramener au 1er ordre :
   On a : (1) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ f(x, y, y') \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = g(x, Y)$ où g est une autre fonction (compliquée) !
   Exemple : $y" + y' + y = sin(x) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ sin(x) \end{pmatrix}$ (avec le produit matriciel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$) ou : $Y' + A.Y = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ sin(x) \end{pmatrix}$.
   Pour celà, on dit que cette équation différentielle est linéaire à coefficients constants (vue au III).

3. **Retenons :** les conditions initiales sont (x_0, Y_0) ; **donc :** (x_0, y_0, y'_0).

13.2 Résolution d'équations du 1er ordre : 2 types §1 et 2

13.2.1 Equations à variables séparées, du type : $f(y).y' = g(x)$

1. Si F est une primitive de f, G de g, alors par équivalence : $F(y) = G(x) + \lambda$.

   Démonstration. On vérifie que : $\frac{d}{dx}[F(y) - G(x)] = 0$ est vrai car $\frac{d}{dx}F(y) = F'(y).y' = f(y).y'$.

   Retenir : Ecrire $\int f(y).y'.dx = \int g(x).dx \qquad y' = \frac{dy}{dx}$, **donc :** $\int f(y).dy = \int g(x).dx$ ...

   A noter : $\int cos(x).dx = sin(x) + \lambda$, $\int cos(t).dt = sin(t) + \lambda$, $\int cos(y).dy = sin(y) + \lambda$

   Exemple : $cos(y).y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow sin(y) = Arcsin(x) + \lambda$. Ne jamais oublier les constantes !

2. Eq. "incomplètes" en y : (1er cas particulier) $y' = g(x)$. Tout revient à une primitive de g.

   Ainsi : $y' = 1 + tan^2(x)$ a pour solutionS $y = tan(x) + \lambda$.

3. Eq. "incomplètes" en x : (2ème cas particulier) $f(y).y' = 1$.

   Sur un exemple : $y' = y^2 + 1$. Ici $\frac{y'}{y^2+1} = 1$ ou $Arctan(y) = x + \lambda$.

Complément : Résoudre $y' = y^2 - 1$, avec $\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{-1}{2}.ln \mid \frac{t+1}{t-1} \mid$. **La rédaction :**

- $y = 1$ est une solution ($y' = 0$) ; • $y = -1$ en est une autre.
- Autres solutions, c'est-à-dire on se place sur un intervalle où $(y-1)(y+1)$ ne s'annulle pas ; c'est possible car y continue : en effet, elle est même dérivable !

Ici $\frac{y'}{y^2-1} = 1$ ou $\frac{-1}{2}.ln \mid \frac{y+1}{y-1} \mid = x + \lambda$; $\mid \frac{y+1}{y-1} \mid = e^K.e^{-2x}$; $\frac{y+1}{y-1} = k.e^{-2x}$, $k = \pm e^K \in \mathbb{R}^*$

ou $y = \frac{k.e^{-2x}+1}{k.e^{-2x}-1}, k \in \mathbb{R}^*$. Résumé : $y = +1$ et $y = \frac{k.e^{-2x}+1}{k.e^{-2x}-1}, k \in \mathbb{R}$; $k = 0$ redonnant $y = -1$.

Remarque. On signalera, **autre complément,** les équations du type $y' = h(\frac{y}{x})$ [se ramenant aux variables séparées] ; mais les cas fondamentaux sont les équations linéaires vues maintenant.

13.2.2 Equations linéaires : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $x \mapsto a(x), b(x), c(x)$ continues

1. Définitions. $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est dite "équation avec second membre" notée EASM

   $a(x)y' + b(x)y = 0$: "équation sans second membre" notée ESSM ou "équation homogène associée" : C'est ici homogène en y, y' c'est-à-dire, si on multiplie y et y' par λ quelconque, rien de changé.

   Exemples
   - $y' + 2y = x$ est une éq. linéaire "à coeff. constants" pour ESSM.
   - $y' + 2y = e^{ix}$ idem ; seul le second membre a changé. (On la verra)
   - $xy' - 2y = 0$ est une éq. linéaire sans second membre, mais coeff. non constants.
   - $xyy' + y^2 = 3x^2$ non linéaire ! Mais si $Y = y^2$, linéaire en Y : $\frac{x}{2}.Y' + Y = 3x^2$.
   - $y' = sin(x.y)$ non linéaire, non à variables séparées ... Infaisable de manière exacte ?

2. **Théorème pour ESSM** $a(x)y' + b(x)y = 0$.

   Sur un intervalle où $a(x)$ ne s'annulle pas, ESSM $y' = \frac{-b(x)}{a(x)}.y$ a pour solution $y(x) = k.e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$

   $\int$ étant **une** primitive. On dit que les solutions forment une droite vectorielle ($\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$).

Démonstration On peut faire un calcul ($y = O$; puis $y'/y = -b(x)/a(x)$ ...) avec des primitives, cependant les ln posent un souci puisque, pour $y' + 2y = e^{ix}$, les solutions vont : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Voici :

$$[y(x).e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}]' = [y'(x) + y(x).\frac{b(x)}{a(x)}].e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx} = \frac{a(x)y' + b(x)y}{a(x)}.e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$$

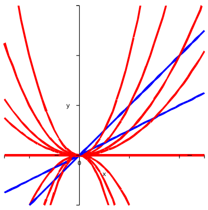
d'où : ESSM $\Leftrightarrow$ $y(x).e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx} = k$, k arbitraire. Fini.

(Note : On a donc multiplié ESSM par $\dfrac{1}{a(x)}.e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$; ceci est appelé "un facteur intégrant".)

3. Exemple : Résoudre $xy' - 2y = 0$ $\boxed{\text{une primitive de } f(x) = 1/x \text{ étant } F(x) = ln \mid x \mid.}$

Pour $x \neq 0$, $y = k.e^{\,2\int \frac{dx}{x}} = k.e^{ln(|x|^2)} = k.x^2$: $\boxed{\text{Précisement}}$ $\begin{cases} \text{pour } x > 0, & y = K.x^2 \\ \text{pour } x < 0, & y = L.x^2 \end{cases}$!

En complément : Problème de Cauchy : Solutions passant par (1,1) ?
Avec la condition initiale, on a une et une seule solution sur $]0, +\infty[$, $y = x^2$. Sur $[0, +\infty[$, idem.
Mais ici, infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, $y = x^2$ pour $x \geqslant 0$, $y = l.x^2$ pour $x < 0$: une famille de courbes C_l ($l = 0$ par exemple...). En effet raccord dérivable en 0 et équation satisfaite !



Isoclines (pour voir) $I_0 : y = 0$; $I_1 : y = x/2$; $I_2 : y = x$; $I_{-1} : y = -x/2$ ...

---

4. **Théorème pour EASM** $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

> EASM a toujours des solutions : elles sont somme d'une solution particulière de EASM et de "la sol. générale" de ESSM. On peut utiliser la méthode de 'variation de la constante' ci-après.

On dit que les solutions forment une droite affine ($\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ ou $M = A + k.\overrightarrow{u}$) **dirigée par la droite vectorielle des solutions de ESSM.**

Démonstration. On a vu que : $y(x) = k.e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$ est la sol. générale de ESSM.

$\boxed{\textbf{On pose } y(x) = k(x).e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}\textbf{, } k(x) \textbf{ fonction inconnue} \text{ pour EASM}}$ (Méthode de Lagrange).

Alors EASM : $a(x).[k'(x) - \dfrac{b(x)}{a(x)}.k(x)].e^{\cdots} + b(x).k(x).e^{\cdots} = c(x)$. Qui s'écrit (simplification) :

$k'(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}.e^{+\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$; $k(x) = k_0(x) + k$ (primitive) ; $y(x) = k_0(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx} + k.e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$

du type : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{u}$, k arbitraire, comme annoncé.

13.2.3 Méthodes pour EASM donc : linéaires (1er ordre)

1. Exemples simples (cf. III.)

$(*)$ $y' + 2y = x$ $(**)$ $y' + 2y = e^{ix}$ $(***)$ $y' + 2y = e^{-2x}$

Chacune a même ESSM de solutions $y = k.e^{-2x}$ (à bien voir).

$(*)$ Pour EASM, cherchons $\boxed{\text{une solution "à vue" :}}$ posons $y = ax + b$; on dérive, on reporte : $y = x/2 - 1/4$ convient. D'où les solutions : $y(x) = x/2 - 1/4 + ke^{-2x}$.

$(**)$ Pour EASM $\boxed{\text{idem}}$ avec $y = a.e^{ix}$; possible si $a = \dfrac{2-i}{5}$. Donc : $y(x) = \dfrac{2-i}{5}e^{ix} + ke^{-2x}$

$(***)$ Pour EASM $y = a.e^{-2x}$ **ne peut convenir** (on a vu que : $y' + 2y = 0$, ESSM).
Essayons $y(x) = e^{-2x}(ax + b)$: (cf. III : $a.y" + by' + cy = e^{mx}.P(x)$.)
Convient avec $a = 1$, b quelconque. Donc : $y(x) = (x + K)e^{-2x}$.

2. Théorème de superposition des solutions de EASM

Soit l'équation (Eq) $y' + 2y = sin(x)$. ESSM vue. Pour EASM, on écrit $sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2.i}$ et utilisons le

Théorème: $\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } y_1(x) \text{ est solution de } a(x)y' + b(x)y = c_1(x)\,;\ \ y_2(x) \text{ sol. de } a(x)y' + b(x)y = c_2(x) \\ \text{alors : } \lambda y_1(x) + \mu.y_2(x) \text{ est solution de } a(x)y' + b(x)y = \lambda.c_1(x) + \mu.c_2(x).\end{array}}$

Vérification facile.

Utilisation

$(**)$ $y' + 2y = e^{ix}$ [déjà vue] a pour solution particulière : $y_1(x) = \dfrac{2-i}{5}e^{ix}$. Puis
$y' + 2y = e^{-ix}$ a pour solution (en changeant i en $-i$) $y_2(x) = \dfrac{2+i}{5}e^{-ix} = \overline{y_1(x)}$. Donc
$y' + 2y = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2.i}$ doit avoir pour solution $\dfrac{y_1(x) - y_2(x)}{2.i} = \Im m(y_1(x)) = \dfrac{-cos(x) + 2sin(x)}{5}$
Vérifié ! D'où les solutions de (Eq) : $y(x) = \dfrac{-cos(x) + 2sin(x)}{5} + ke^{-2x}$.

3. Exemple d'utilisation de **la "variation de la constante"**

$y'cos(x) + y.sin(x) = 2.x.cos^2(x)$, sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

ESSM : $y = k.cos(x)$ aisément avec le résultat connu.

EASM : Posons $y(x) = k(x).cos(x)$; arriver à $k'(x) = 2.x$; $k(x) = x^2 + \lambda$. D'où : $y(x) = ...$

4. Remarque complémentaire

- Pour l'équation différentielle non linéaire définie sur $\mathbb{R}$: $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$, à variable séparée, on a vu : $y(x) = tan(x)$, $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$: de façon imprévisible, apparait une barrière en $x = \dfrac{\pi}{2}$!
- Ceci n'a pas lieu pour une équation linéaire : Sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annulle pas (et est continue), les solutions sont définies sur I entier. Et le problème de Cauchy a une unique solution (un et un seul k telle que $y(x_0) = y_0$) car $y(x) = \varphi_0(x) + k.e^{\cdots}$: bien voir comment intervient la constante [le schéma $M = A + k.\overrightarrow{u}$] ! (EASM et ESSM n'a de sens que pour une éq. linéaire.)

13.2.4 (*) En complément : équation différentielle $y' = h(\dfrac{y}{x})$

On dit que cette équation est "homogère en x, y" car si on multiple x, y par λ, rien de changé.

Exemple : $y^2 + (x^2 - xy).y' = 0$ qui devient $y' = \dfrac{y^2}{x(y-x)}$ ou $y' = \dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1}$

car $x = 0$ exclus (si droite verticale, y' n'existe pas) ; $y = x$ non solution .

Méthode :

On pose $t = \dfrac{y}{x}$ nouvelle variable, sans oublier des cas éventuels où $t = t_0$ constant. L'exemple :

- $y = t_0.x$, $y' = t_0$ donne $t_0^2x^{2\circ} + x^2(1-t_0)t_0 = 0$; donc si $x \neq 0$, $t_0 = 0$ et donc une droite solution $y = O$.
- Sinon $y = t.x$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = t + x.\dfrac{dt}{dx}$ (et $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ dérivation des fonctions réciproques). Donc :

$t^2x^2 + x^2(1-t)(t + x.\dfrac{dt}{dx}) = 0$; si $x \neq 0$, $t^2 + (1-t).(t + x.\dfrac{dt}{dx}) = 0$ ou encore $t + (1-t).x.\dfrac{dt}{dx} = 0$ ou
$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{t-1}{t}.dt$. D'où $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{t-1}{t}.dt$; $ln \mid \dfrac{x}{k} \mid = t - ln \mid t \mid ...$ $x(t) = K.\dfrac{e^t}{t}$; $y(t) = K.e^t$ (et $y = O$).

Ainsi on est donc ramené à des variables "séparées" ; on aura $x = x(t)$; puis $y = t.x(t)$ soit : les courbes intégrales (homothétiques) en paramétriques. Ici ne pas oublier, aussi, la droite $y = O$. Finir.

13.3 Résolution d'équations du 2ème ordre

13.3.1 Remarques

1. Il y a beaucoup d'équations différentielles du 1er ordre que l'on ne sait pas résoudre.
   Donc bien davantage ici !
   Quelques cas connus [incomplètes en y ou en x, par exemple $y".y = y'^2$: hors programme].
2. Même les équations linéaires : $a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ posent de graves problèmes.
   - En théorie, on peut donner quelques résultats : 2 constantes qui intervenant de manière connue.
   - En pratique, cas fondamental de Sup : Eq. diff. linéaires à coefficients constants et second membre du type exponentielle-polynôme : $\boxed{a.y" + b.y' + c.y = e^{mx}.P(x)}$ $a, b, c, m \in \mathbb{C}$ (donc les sinus ...)

13.3.2 ESSM à coefficients constants $a.y" + b.y' + c.y = 0$; $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$

1. Théorème: Pour ESSM à coefficients constants, on forme : $a.r^2 + b.r + c = 0$ $(*)$ "l'équation caractéristique" : si $\Delta \neq 0$, $y(x) = k.e^{r_1 x} + l.e^{r_2 x}$; si $\Delta = 0$, $y(x) = e^{r_0 x}(k.x + l)$.

   Une démonstration : Poser $y(x) = e^{r.x}.z(x)$ et reporter ...

   Exemple: $y" + y' + y = 0$.
   . On a $r = j,\ j^2$; d'où les solutions $y(x) = k.e^{jx} + l.e^{j^2 x}$.
   . A noter : une solution est dérivable 2 fois, par définition. Donc :
   Même si on ne savait pas résoudre l'équation, on serait sûr que les solutions seraient C^∞.
   En effet : $y" = -y' - y$ dit que, le membre de droite étant dérivable, le membre de gauche aussi !
   Et : $y^{(3)} = -y" - y'$; on recommence pour $y^{(4)}$... sans fin !

2. Cas des coefficients réels (comme dans l'exemple).
   . Si $\Delta \geqslant 0$, rien de changé (les ou la racine sont réelles)
   . Si $\Delta < 0$, 2 racines non réelles conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Ici $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}.[A.cos(\beta x) + B.sin(\beta x)]}$
   A, B ctes (choisies réelles si l'on veut des solutions réelles). Car $e^{i\beta.x} = cos(\beta.x) + i.sin(\beta.x)$...
   Exemple précédent : $j = \dfrac{-1 + i.\sqrt{3}}{2}$; donc $y(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(A.cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B.sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$.

   Remarques

   1) Rappel : $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) = C.cos(\omega t - \varphi)$, avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$: toujours 2 constantes.
   2) On montre que pour les équations linéaires sans second membre même à coefficients non constants [$a(x), b(x), c(x)$ continues sur I et $a(x)$ ne s'annulant pas], on a $y(x) = k.y_1(x) + l.y_2(x)$ **analogue à** $\overrightarrow{y} = k.\overrightarrow{u} + l.\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires.
   On dit que les solutions de ESSM forment un plan vectoriel.

13.3.3 EASM $ay" + by' + cy = d(x)$

1. Théorème (Comment interviennent les constantes, ici). On montre que :

   Pour l'équation différentielle linéaire $a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, d aussi continue sur I, EASM a au moins une solution φ_0. Et la sol. générale de EASM est somme de φ_0 sol. part. de EASM et de la sol. générale de ESSM : $y(x) = \varphi_0(x) + k.y_1(x) + l.y_2(x)$, **analogue à** $M = A + k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{v}$. "Les sol. forment un plan affine associé au plan vect. des sol. de ESSM".

2. Théorème de superposition pour l'équat. diff. linéaire $a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = \lambda.d(x) + \mu.\delta(x)$

   Exactement comme vu pour le 1er ordre. Utilisé largement ensuite.

3. Cas particulier $a.y" + b.y' + c.y = e^{mx}.P(x)$, $m \in \mathbb{C}$, $m = 0$ permis !
   ESSM connue, ici (coeff. constants).
   EASM : On cherche une sol. particulière de la même forme $y(x) = e^{mx}.Q(x)$ $Q(x)$ polynôme.
   Théorème: C'est possible avec : $d^o(Q) = d^o(P)$ si m non racine de l'équation caractéristique ; $d^o(Q) = d^o(P) + 1$ si m racine simple et $d^o(Q) = d^o(P) + 2$ si m racine double.
   Démonstration. Poser : $y(x) = e^{mx}.z(x)$ et reporter.

13.3.4 Exemples (EDL à coeff. constants ...)

1. $y" - y = 4x^2e^x$.
   ESSM. l'éq. car. est $r^2 - 1 = 0$ de racine ± 1 (non pas $r^2 - r$!) ; sol. de ESSM $y(x) = ke^x + le^{-x}$.
   EASM. $m = 1$, donc racine simple de l'éq. car. Une sol. part. est $y(x) = e^x(\alpha.x^3 + \beta.x^2 + \gamma.x + \delta)$.
   Dériver 2 fois, reporter : $\alpha = 2/3$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, δ arb. D'où les solutions de EASM :
   $y(x) = e^x(2/3.x^3 - x^2 + x + K) + l.e^{-x}$ (**exactement 2 constantes**).

2. $y" - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$
   ESSM a pour sol. $y(x) = e^{3x}(kx + l)$ car 3 racine double de l'équation caractéristique $(r - 3)^2 = 0$.
   EASM : Soit (1) $y" - 6y' + 9y = 4e^x$. Cherchons une sol. part. $y(x) = e^x.\alpha$. Aisé, **trouver** $\alpha = 1$.
   Soit (2) $y" - 6y' + 9y = 16.e^{3x}[= P(x)e^{mx}]$: $m = 3$ est racine double de l'éq. caract. d'où sol. part.
   $y(x) = e^{3x}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$; $y' = e^{3x}\begin{pmatrix} 3\alpha.x^2 + 3\beta.x + 3\gamma \\ +2\alpha.x + \beta \end{pmatrix}$, $y" = \begin{pmatrix} 9\alpha.x^2 + 9\beta.x + 9\gamma \\ + 6\alpha.x + 3\beta \\ + 6\alpha.x + 3\beta \\ + \ 2\alpha \end{pmatrix}$ voir la **disposition**, d'où :
   $16.e^{3x} = e^{3x}\begin{pmatrix} 9\alpha.x^2 + 9\beta.x + 9\gamma \\ +12\alpha.x + 6\beta + 2\alpha \\ -18\alpha.x^2 - 18\beta.x - 18\gamma \\ -12\alpha.x - 6\beta \\ +9\alpha x^2 + 9\beta x + 9\gamma \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} \alpha = 8 \\ \beta, \gamma \text{ arb.} \end{pmatrix}$. Solutions de EASM $y(x) = e^x + e^{3x}(-8x^2 + Kx + L)$.

3. $y" + y = sin(x)$.
   Pour ESSM, l'éq. car. est $r^2 + 1 = 0$ de racine $\pm i$. Donc $y(x) = k.e^{ix} + l.e^{-ix} = Acos(x) + Bsin(x)$.
   Pour EASM, considérons (1) $y" + y = e^{ix}$:
   Elle a donc une sol. part. du type $y_1(x) = e^{ix}(\alpha.x + \beta)$. En fait $\alpha = \frac{-i}{2}$, β arbitraire, choisi nul ici.
   Puis (2) $y" + y = e^{-ix}$: a pour sol. part. $\overline{y_1(x)} = e^{-ix}.(\frac{i.x}{2})$ (changeant i en $-i$). Superposition :
   EASM $y" + y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ a pour sol. part. $\frac{y_1(x) - \overline{y_1(x)}}{2i} = \Im m(y_1(x)) = \frac{-x.cos(x)}{2}$. Ainsi
   $y" + y = sin(x)$ a pour solutions $y(x) = \frac{-x.cos(x)}{2} + Acos(x) + Bsin(x)$. Vérifié !

4. $y" - 2y = sh^2(x)$ [Cas où $m = 0$; superposition]. Sol. : $y(x) = \frac{1 + ch(2x)}{4} + k.e^{\sqrt{2}x} + l.e^{-\sqrt{2}x}$.

5. $y" + 3y' + 2y = 6.x.sh(x)$. Solutions : $y(x) = \frac{6x - 5}{12}.e^x + (\frac{-3x^2}{2} + 3x + K)e^{-x} + l.e^{-2x}$.

6. $y" - 2.y' = e^{mx}$ [Aussi une équation du 1er ordre en $Y = y'$!]
   ESSM : solution$\boxed{\text{s}}$ $y(x) = k.e^{2x} + l$. EASM : selon les cas $m = 0$ (possible !) $m = 2$ et $m \notin \{0, 2\}$...

13.3.5 Résumé

- Redisons que les éq. diff. les plus importantes sont les linéaires $\boxed{\text{1er ordre } a(x)y' + b(x)y = c(x)}$ connues : ESSM $y = k.e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$; EASM : une solution à vue ou variation de la constante.
- $\boxed{\text{2ème ordre du type } ay" + by' + cy = e^{m.x}.P(x).}$ ESSM avec éq. caractéristique : 2 constantes !
  EASM : on cherche une solution de type analogue au membre de droite : voir la valeur de m ...
- (*) Il y a des équations diff. linéaires du deuxième ordre à coefficients $\boxed{\text{non}}$ constants : $xy" - y = O$!
- (*) Enfin, il y a aussi des équation $\boxed{\text{non}}$ linéaires : $y' = y^2 + x$, $y" = y^2 + x$ ...

13.4 (*) Applications des équations différentielles

13.4.1 Le problème $\underline{y' = y,\ y(0) = 1}$ a pour solution $\underline{exp}$ sur $\mathbb{R}$

13.4.2 Courbes telles que $\overline{OP} = 2.\overline{OT}$, $P = proj_{\perp}(M, Ox)$, $T =$Tangente$\cap\ Ox$

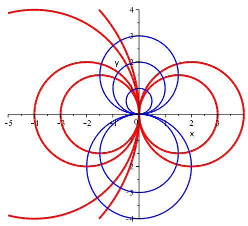
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} x - \ y/y' \\ 0 \end{pmatrix}$: car la tangente : $Y - y(x) = y'(x).(X - x)$ et T : faire $Y = 0$.

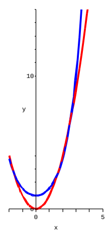
D'où l'éq. diff. $xy' - 2y = 0$ déjà vue ! Solutions : Paraboles de sommet O : $y = k.x^2$ ...

13.4.3 (*) Complément : Trajectoires orthogonales aux (C_μ) : $x^2 + y^2 - 2\mu.y = 0$

1) (C_μ) est la famille de cercles tangents en O à Ox. Equation différentielle dont sont solutions les (C_μ) : Isoler la constante $\dfrac{x^2+y^2}{y} = 2\mu$ et on dérive : $(\dfrac{x^2+y^2}{y})' = 0$ ou $\underline{2xy + (y^2 - x^2).y' = 0}$ $(*)$: (C_μ).

2) On cherche maintenant s'il existe Γ telle qu'en $M \in \Gamma \cap C_\mu$, $y'_\Gamma.y'_{C_\mu} = -1$. Donc $y'_\Gamma = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ ou bien : $\underline{2xy.y' - y^2 = -x^2}$ $(**)$ pour Γ. [Règle : remplacer y' par $\dfrac{-1}{y'}$ dans $(*)$]. On sait résoudre cette équation car linéaire en $Y = y^2$. On trouve Γ_λ : $x^2 + y^2 - 2\lambda.x = 0$; les cercles tangents en O à Oy !





(Parabole+Chainette)

13.4.4 (*) Complément : Surface d'un liquide en rotation uniforme autour de Oz

On fait une coupe dans le plan xOz $(y = 0)$. L'élément dm de liquide à la surface est en équilibre sous son poids $dm.g$, la force centrifuge $dm.\omega^2.x$ $(x > 0)$ et la réaction R.

On projette sur la tangente ($\perp$ à la réaction) de pente $\dfrac{dz}{dx}$. Alors $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\omega^2}{g}x$; $z = z_0 + \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$ parabole.

La surface s'appelle paraboloïde de révolution autour de Oz, d'équation $z = z_0 + \dfrac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$. Note [1]

---

[1] $\boxed{\text{Exercice } \textbf{complémentaire}}$ (*) On cherche la courbe décrite par un cable :

a) Homogène pesant : dm proportionnel à la petite longueur [à connaitre ici] notée ds. (Cable électrique).

b) Tel que dm est proportionnel, non pas à la petite longueur ds, mais à dx. (Cas d'un pont suspendu avec suspensions verticales équidistantes ; seul le poids du pont étant considéré).

Solution Soit M (tangente de pente α), M' (tangente de pente $\alpha + d\alpha$), un arc soumis au poids $dm.g$ et aux tensions (portées par les tangentes) $\overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{T}(s + ds)$. A l'équilibre :

. en projettant sur $x'Ox$: $T(s + ds)cos(\alpha + d\alpha) = T(s)cos(\alpha)$ (1)

. en projettant sur $y'Oy$: $T(s + ds)sin(\alpha + d\alpha) = T(s)sin(\alpha) + dm.g$ (2)

(1) donne $T(s)cos(\alpha) = Cte = T_0$.

D'où (2)/(1) donne $tan(\alpha + d\alpha) - tan(\alpha) = \dfrac{dm.g}{T_0}$. Avec $\underline{tan(\alpha) = y'}$, **on a :** $\underline{d(y') = \dfrac{dm.g}{T_0}}$

Cas b) $\underline{dm = \mu.dx}$. $\boxed{\text{On peut voir un tel pont à Vernaison(69) ou à "Lisboa"(Lisbonne, Portugal)}}$

Dans ce cas, on a : $\dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{\mu.g}{T_0}$ ou $y" = cte$: Parabole.

Cas a) $\underline{dm = \mu.ds}$. $\boxed{\text{Ici, il faut savoir (cf. Longueur des courbes) ou voir que : } ds = \sqrt{1 + y'^2}.dx}$

$dm = \mu.ds$ donne $\dfrac{y"}{\sqrt{1 + y'^2}} = K$ (paramètre fixe). Posons $y' = sh(t)$ alors $y" = ch(t).\dfrac{dt}{dx}$.

D'où $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{a}$; $y' = sh(\dfrac{x - x_0}{a})$ avec $a = \dfrac{1}{K}$ $y - y_0 = a.ch(\dfrac{x - x_0}{a})$: "Chainette".

M+ **Exercices: Equations différentielles** **PTSI**

Premier ordre. Les primitives n'étant pas vues, on utilise des primitives faciles ...

1. Equation différentielles **linéaires.** Résoudre
   (a) $y' + y = 2x.e^{-x}$.
   (b) $x.y' + y = x^3$.
   (c) $x^2.y' - y = 1 - x + x^2$.
   (d) $y' + 2x.y = 2x.e^{-x^2}$.
   (e) $x.y' + (x-1)y = x^2.cos(x)$.

2. (*) Equations **se ramenant aux linéaires.** Résoudre
   (a) $x.y' = y + 3xy^3$. [Observer que 0 est solution ; pour les autres, poser $z = 1/y^2$]
   (b) $y' + y.sin(x) = y^2.sin(x)$. [Idem : poser $z = 1/y$. Aussi à variables séparées]
   (c) $y' - 2xy + 2xy^2 = 0$. [Comme la précédente]
   (d) $(x^2 - x).y' = y^2 + y$. [Comme la précédente]
   (e) $(x^2 - x).y' = -y^2 + (2x+1).y - 2x$. [$y = x$ solution ; les autres : poser $z = 1/(y-x)$].

3. Equations **à variables séparées.** Résoudre
   (a) $y'.cos(y) = x$. [rép. $2.sin(y) = x^2 + \lambda$.]
   (b) (*) Refaire, à l'aide de $\dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y}$: 2b) 2c) 2d).
   (c) (*) $y' = (x+y-1)^2$: poser $Y = x + y - 1$. Solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Note [2]

Deuxième ordre.

1. **Résoudre** :
   (a) $y" - y = x^2 - x$; (b) $y" - 2y' = sh^2(x)$; (c) $y" + y' + y = 13.cos(2x)$;
   (d) $y" + y = x.cos(x)$; (e) $y" + 10y' + 25y = 4.e^{-5x}$; (f) $y" + 2y' + 5y = e^{-x}.cos(2x)$;
   (g) $y" + y' + y = (2x+1).sin(x)$; $y = 2sin(x) + (3-2x)cos(x) + e^{\frac{-x}{2}}[A.cos\dfrac{\sqrt{3}.x}{2} + B.sin\dfrac{\sqrt{3}.x}{2}]$.
   (h) (*) Trouver f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'(x) = f(-x)$.

2. Un cas de coefficients non constants. Soit $(x-1).y" - x.y' + y = (x-1)^2$ linéaire :
   Voir que $y = e^x$ est solution de l' "ESSM" ; poser ensuite $y = e^x.z(x)$ [Changement de fonction].

---

[2] (**) **Compléments.** Equations homogènes en x, y : Type $y' = h(\dfrac{y}{x})$ (i.e. si x et y sont multipliés par λ, l'équation est invariante). On pose $t = \dfrac{y}{x}$, nouvelle variable ; mais il peut y avoir quelques solutions $t = cte$.
Alors, on a une équation différentielle facile entre x et dx/dt ; d'où $x = x(t)$ puis $y = t.x(t)$

(a) (*) $y^2 - 3x^2 + xy.y' = 0$.
(b) (*) $2xy.y' = y^2 - x^2$.
(c) a) et b) sont linéaires en y^2 !
(d) (*) $y^2 + (x^2 - xy).y' = 0$.
(e) (*) $y + x.(y')^3 = 0$. [Trouver $y = O$ et des astroïdes].

Chapitre 14

Suites de réels (et complexes)

14.1 Généralités (cf. aussi ch.15, 28)

14.1.1 Définitions

1. Une suite de réels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $0 \mapsto u_0, 1 \mapsto u_1, ..., n \mapsto u_n, ...$

   On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

2. On dit que la suite est majorée par $M \in \mathbb{R}$ si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant M$; minorée par $m \in \mathbb{R}$ de même.

   Et bornée si majorée et minorée ($\Leftrightarrow$ $| u_n |$ majorée : en exercice).

3. Remarques. . Parfois on commence à $n = 1$ $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou bien à n_0 !

   . Ne pas confondre la suite avec l'ensemble des valeurs prises par la suite $[((-1)^n)_{n\geqslant 0} \neq \{-1, 1\}]$

   . Pour une suite à termes complexes, on peut poser : $u_n = a_n + ib_n = \rho_n.e^{i.\theta_n}$.

14.1.2 Premiers exemples essentiels

1. (u_n) arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$ [rel. de récurrence] $\Leftrightarrow u_n = u_0 + n.r$ [rel. explicite].

   La somme $\boxed{S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2} \text{ : chaque terme valant } \dfrac{u_0 + u_n}{2} \text{ en moyenne.}}$

2. (u_n) géométrique de raison $q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n.q$ [rel. de réc.] $\Leftrightarrow u_n = u_0.q^n$ [rel. explicite].

   Et la somme cumulée vaut $\boxed{S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0[1 + q + ... + q^n] \text{ qui est bien connue ...}}$

3. Les suites monotones ont une place à part, avec le théorème de la limite monotone ; cf. **IV**.

   (*) $[u_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$ à voir ; $v_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi^2/6$ Euler ; à voir.]

14.1.3 Cas des suites arithmético-géométriques

Théorème $\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Soit la suite : } u_{n+1} = a.u_n + b \textbf{ ; } a, b \in \mathbb{C}. \textbf{ 2 cas : si } a \neq 1\textbf{, alors } \exists\,!\, l : l = a.l + b \\ \textbf{et } u_{n+1} - l = a(u_n - l) \textbf{ : } v_n = u_n - l \textbf{ géométrique ; si } a = 1, (u_n) \textbf{ arithmétique.}\end{array}}$

Démonstration. Si $a \neq 1$: l est appelé point fixe de $f(x) = ax + b$. $(l = \dfrac{b}{1-a}$.) **Puis différence** :

$\begin{pmatrix} u_{n+1} = a.u_n + b \\ l = a.l + b \end{pmatrix} \Rightarrow u_{n+1} - l = a.(u_n - l)$; $v_n = u_n - l$ géom. $\boxed{u_n - l = a^n(u_0 - l).}$

$\boxed{\text{Exemples}}$. $u_{n+1} = 3.u_n - 4$, $u_0 = 7$. $l = 3l - 4 \Rightarrow l = 2$. $\begin{pmatrix} u_{n+1} = 3u_n - 4 \\ 2 = 3.2 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow u_{n+1} - 2 = 3.(u_n - 2)$

$u_n - 2 = 3^n(u_0 - 2)$. $\boxed{u_n = 5.3^n + 2, \forall\, n \geqslant 0.}$ $(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5.3^n.)$

. $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}.z_n + 1 - i$, z_0 donné. Ici $z_n - 2 = (\dfrac{1+i}{2})^n.(z_0 - 2)$ (car $l = 2$ encore.)

Dessin ? cf. $z' = a.z + b$. Limite (valant 2) indépendante de z_0 car $(1/\sqrt{2})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

14.2 Limites des suites réelles

14.2.1 Définitions

1. Suites convergentes. Même définition que Limite finie ici de $f(x)$, quand $x \to +\infty$:

(u_n) est dite convergente si elle a une limite **finie** l, quand $n \to +\infty$, notée $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
ce qui est : $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n :\ \ n > N_\epsilon \Longrightarrow |\, u_n - l\,| < \epsilon.$

Exemples :
- La suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0, pour $n \to +\infty$, donc convergente.
- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite : divergente.
- La suite $u_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, pour $n \to +\infty$, donc divergente.

2. Cas l infini $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ si} : \forall B > 0,\ \exists N_B /\ n > N_B \Longrightarrow\ u_n > B.}$

Et une suite divergente : $\left\{ \begin{array}{c} \text{soit n'a pas de limite comme } (-1)^n \\ \text{soit possède une limite infinie.} \end{array} \right.$

3. Deux propriétés
- Une suite possède **au plus** une limite. (Unicité de la limite). En exercice.
- Si (u_n) a une limite FINIE en $+\infty$, alors (u_n) est **bornée**. Mais $(-1)^n$ bornée divergente !

En effet :
Soit $\epsilon = 1 > 0$: possible. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in]l-1, l+1[$; et $\{u_n, n \leqslant N\}$ aussi borné par m_1 et M_1 car ensemble FINI. Au total, suite bornée par $m = inf(l-1, m_1)$ et $M = sup(l+1, M_1)$.

14.2.2 Sous-suite

1. Définition: Une sous-suite de $(u_n)_n$ [ou suite extraite] est une suite $(u_{n_k})_k$: $u_{n_0}, n_{n_1}, ..., u_{n_k}, ...$ avec $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$ Autre notation $(u_{\phi(k)})_k$ avec ϕ strictement croissante.

Exemples. Pour $u_n = (-1)^n$: sous-suite des indices pairs (u_{2p}) ; et des indices impairs (u_{2p+1}) ; (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont stationnaires, donc convergentes (vers 1 et -1) ; mais (u_n) divergente !

2. Propriété: Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$(fini ou non, ici), il en est de même de toute sous-suite. En exercice.

3. Une réciproque: Si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$ En exercice.

Exercice corrigé (**Alès**) : Si (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent, il en est de même de (u_n).
En effet désignons par l, l', l" les limites (finies ici). La sous-suite (u_{6n}) converge vers l et l" ! (pourquoi ?) donc $l = l$". De même (u_{6n+3}) vers l' et l". Donc $l = l" = l'$: (u_n) convergente !

14.2.3 Théorèmes généraux : somme, produit

1. On a :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$, alors : $u_n + v_n \longrightarrow l + m$ sauf $+\infty - \infty$ (indéterminé)
$\lambda.u_n \longrightarrow \lambda.l$; $u_n.v_n \longrightarrow l.m$ sauf $0.\infty$ (indéterminé) ; $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \dfrac{l}{m}$ sauf $\dfrac{0}{0}.\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{l}{0}$.

2. En exercice.
Sur le dernier cas $l/0$ **:** On dit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ si, de plus, pour n assez grand : $v_n \geqslant 0$.
$\dfrac{1}{0^+}$ non indéterminé : "$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$" [**Note :** $\dfrac{2+(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ sans être décroissante !]

14.2.4 Inégalités

1. Théorème : Prolongement des inégalités (larges) par passage à la limite

$\boxed{\text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l,\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m \text{ et si } u_n \leqslant v_n \text{ pour } n \text{ assez grand, alors : } l \leqslant m.}$ En exercice.

2. Théorème : d'encadrement ou des gendarmes

$\boxed{\text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l,\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ et si } u_n \leqslant w_n \leqslant v_n \text{ au voisinage de } +\infty, \text{ alors : } w_n \text{ a une limite : } l.}$

En exercice. Celui-ci donne l'existence de la limite !

3. Exemples
   - $\boxed{\text{Si } q > 1, \text{ alors } q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$ De façon élémentaire : $q^n = (1+h)^n \geqslant n.h,\ h > 0$ fixé ...
   - $\boxed{\text{Si } -1 < q < 1, \text{ alors } q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$ [Cas $q \neq 0$: $\dfrac{1}{\mid q \mid^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ...]
   - $\boxed{\text{Mais attention } \quad (1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e\,; \quad \text{et} \quad (1-\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.}$ [Connus, à bien revoir.]
   - $u_n = \sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$ Avec le ln. [C'est possible sans le ln : $n = (1+h_n)^n$.]
   - $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $\left[\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right]$ ($\neq T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$: du ch. Intégrales !)

14.2.5 Un cas essentiel

1. Enoncé

. Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ telle qu'il existe $\underline{0 \leqslant k < 1}$ avec $\underline{\forall n \geqslant n_0, \alpha_{n+1} \leqslant k.\alpha_n}$. Alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si on avait dit : $0 \leqslant \alpha_{n+1} < \alpha_n$, la conclusion serait-elle sûre ? NON !

2. Démonstration

   2) Signifie seulement que $\alpha_n > 0$ est strictement décroissante : peut partir de 3 et décroitre à 2 !

   1) Voir que, par effet de cumul : $0 \leqslant \alpha_n \leqslant k^{n-n_0}.\alpha_{n_0}$ pour $n \geqslant n_0$; puis faire $n \to +\infty$.

3. Si on peut, on **essaiera d'avoir** $\mid u_{n+1} - l \mid \leqslant k. \mid u_n - l \mid$, avec $0 \leqslant k < 1$, $\underline{k \text{ fixe}}$ pour $n \geqslant n_0$.

   (Si c'est le cas, il y a contraction dans le rapport au moins k)

14.3 Comparaison des suites

14.3.1 (u_n) négligeable devant (v_n) noté $u_n << v_n$, $(n \longrightarrow +\infty)$

1. Définition

(u_n) est dite négligeable par rapport à (v_n) ou infiniment petite ou (v_n) infiniment grande par rapport à (u_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $\mid \dfrac{v_n}{u_n} \mid \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$; noté $u_n = o(v_n)$ ou $u_n << v_n$ $(n \to +\infty)$.

Remarques

1) Si on ne peut pas écrire le rapport, on dit : $u_n = v_n.\epsilon(n) = v_n.\epsilon_n$, où $\epsilon(n) = \epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2) Si on a seulement $\dfrac{u_n}{v_n}$ bornée, on note $u_n = O(v_n)$: notations de Landau.

2. Théorème $\boxed{\textbf{Si } n \to +\infty \textbf{ :} \quad 1 << ln^\beta(n) << n^\alpha << a^n << n! << n^n, \quad \beta > 0,\ \alpha > 0,\ a > 1.}$

   On dit : "l'exponentielle l'emporte sur la puissance. Et la puissance l'emporte sur le logarithme.

   Démonstration

   Vu sauf les deux dernières. Pour $\dfrac{a^n}{n!}$, soit $n_0 = E(2a)$ [partie entière] ; donc $n_0 + 1 \geqslant 2a$; alors

   $\dfrac{a.a.a...a}{1.2.3....n} = \dfrac{a.a.\ ...a}{1.2.\ ...n_0}.\dfrac{a.\ ...\ a}{(n_0+1)...n} = cte.\dfrac{a....a}{(n_0+1)...n} \leqslant cte.\dfrac{1}{2^{n-n_0}}.$ Dernière : $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n}.$

14.3.2 (u_n) équivalente à (v_n), quand $(n \longrightarrow +\infty)$

1. Définition

   (u_n) est dite équivalente à (v_n), noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si $u_n - v_n << v_n$ ou $u_n - v_n = v_n.\epsilon_n$

   ou $\boxed{u_n = v_n.[1+\epsilon_n], \epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,}$ ce qui signifie chaque fois qu'on peut diviser par v_n

   $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$ Attention : ce n'est pas la différence qui tend vers 0 !

   Ainsi
   $2n^3 - 10n^2 \underset{n\to\pm\infty}{\sim} 2n^3$. Le but des équivalents étant de simplifier. (Différence de limite infinie ici)

2. **Equivalents fondamentaux** [Rappel ; et aussi $Arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ...]

   $sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} th(x) \underset{x\to 0}{\sim} Arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$ $\quad ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

   $ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ou $ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} (u-1)$ $\quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha.x$ (α fixe ; cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$?)

3. Propriétés [Rappel]
   1) La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ est une relation R.S.T. (relation d'équivalence)
   2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe un N tel que : $n \geqslant N \Longrightarrow$ u_n et v_n ont même signe.
      En particulier, elles sont nulles simultanément. (Penser à $u_n = v_n.[1+\epsilon_n]$, $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)
   3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors u_n aussi.
   4) Il y a compatibilité des équivalents avec le produit, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n \Longrightarrow u_n.x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.y_n$
      et le quotient, mais pas avec la somme(cf. après). Un résultat : si $v_n << u_n, u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
   5) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \geqslant 0$, alors : $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

4. **Trois fautes à éviter** [Rappel]
   1) Il n'y a que la suite (u_n) identiquement nulle à partir d'un certain rang, qui est équivalente à $(0)_{n\geqslant 0}$. Comme ce n'est jamais le cas en pratique, dire "$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} O$" est une FAUTE.
      De même dire "$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \infty$ " est un NON SENS.

   2) SOMME d'équivalents :
      $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, $-n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2 + \sqrt{n}$ (ridicule, mais vrai) ; par contre $n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ est faux.

   3) ln et exp d'équivalents.
      On a : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$; mais e^{n+1} non équivalent à e^n : le rapport vaut e !
      Et : $1 + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - 1/n^2$; mais : $ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$, $ln(1-1/n^2) \underset{n\to+_infty}{\sim} -1/n^2$!
      [D'ailleurs, on dirait : $1 + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$!]

5. Remarque de rédaction

   $\boxed{\text{Si } l \neq 0, \infty, \quad \text{on a : } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l.}$ Utile en pratique.

14.3.3 Exercices [Revoir le cas des fonctions]

1. $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$? [Analogue : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut prendre les ln.]

2. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} [ch(\dfrac{1}{n})]^{n^2}$. [$ln(u_n) = n^2.ln(ch(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2.[ch(1/n) - 1] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$ ...]

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$? [Bien vue au ch. Limites. Sait-on la refaire ?]

14.4 Résultats théoriques fondamentaux

14.4.1 Suites monotones

Théorème | Soit (u_n) croissante (sens large). Alors (u_n) a toujours une limite l en $+\infty$. 2 cas : Si majorée par M, alors $l \leqslant M$; si non majorée, $l = +\infty$. Analogue si décroissante.

Exemple : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante. Pour la majorer, voici une comparaison avec une intégrale :

Pour $k \geqslant 2$ on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$ (Dessin). Donc $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \int_1^2 + \int_2^3 + ... + \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^2}$

$= 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 + [\frac{-1}{t}]_1^n = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$. D'où S_n converge vers $l \leqslant 2$. [(*) $l = \frac{\pi^2}{6}$ Euler].

14.4.2 Suites adjacentes

Définition (u_n), (v_n) sont adjacentes si : (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ne pas confondre avec le **Théorème** | Deux suites adjacentes sont convergentes vers la même limite.

Démonstration : Forcément (u_n) a une limite $l > -\infty$, car croissante. Idem (v_n) a une limite $m < +\infty$.
Et, par passage à la limite dans la dernière hypothèse, $m - l = 0$. Il en résulte que $l = m$ FINIE.

On a donc aussi les encadrements : $\forall p,\ q$: $u_p \leqslant l \leqslant v_q$.

14.4.3 Exemples

1. Classique : Les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, n \geqslant 1$ **sont** adjacentes. $(v_{n+1} - v_n \leqslant 0)$.
   D'où la convergence de (u_n) et un encadrement de la limite [qui sera vue plus tard $e = 2,718...$]

2. **Deux suites imbriquées :** $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \end{array} \right.$ avec $0 < b_0 \leqslant a_0$. Bien voir $b_{n+1} = \frac{2a_n.b_n}{a_n + b_n}$

   A chaque étape, on a des termes > 0 : les suites sont définies. Puis $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geqslant 0$:

   $\forall n \geqslant 1, b_n \leqslant a_n$ [car pour a_0 et b_0, on peut permutter]. Puis, pour $n \geqslant 1$: $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0$;
   et $b_{n+1}/b_n \geqslant 1$: $(a_n)_{n\geqslant 1}$ décroissante et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ croissante. Puis : [à voir]

   $0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{a_n - b_n}{2}$ conduisant à $0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}$, $n \geqslant 1$: Adjacentes.
   Variante 1 : $(a_n)_{n\geqslant 1}$ déc., minorée par 0, converge vers l ; et $b_n = 2a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
   Variante 2 : $(a_n)_{n\geqslant 1}$ déc., minorée par 0, converge vers l ; $(b_n)_{n\geqslant 1}$ croiss., majorée par a_1, converge vers m. Puis passage aux limites dans $2.a_{n+1} = a_n + b_n$: $2.l = l + m$ (finies) donc $l = m$.
   De plus | on observe ici que $a_{n+1}.b_{n+1} = a_n.b_n = ... = a_0.b_0$. Donc $l^2 = a_0.b_0$ et $\boxed{l = \sqrt{a_0.b_0}\ !}$
   [Remarque : Moy-arithm. $\frac{a+b}{2} \geqslant$ Moy-géom. $\sqrt{a.b} \geqslant$ Moy-harm. h telle que $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$.]

3. Méthode **de "dichotomie"** : division en deux
   Soit une racine r dans $[a, b]$; on divise le segment en 2 [longueur $(b - a)/2$] et on garde le nouveau segment contenant r. On recommence : on obtient des "segments emboités" de longueur $(b - a)/2^n$, de bords gauches a_n et droits b_n, formant 2 suites adjacentes : elles convergent vers r.

Note finale [analogue aux fonctions] Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l > 0$, en se limitant à l finie, $\exists N$: $n \geqslant N \Longrightarrow u_n > \frac{l}{2}$.

D'où, non seulement $(\frac{1}{u_n})_{n\geqslant N}$ existe, mais encore est bornée : $0 < \frac{1}{u_n} < \frac{2}{l}$. [Pour des preuves.]

M+ **Exercices: Suites à termes réels (et complexes)** **PTSI**

---

1. Indiquer les limites éventuelles des suites :
   (a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.(k+1)}$ $\left(\dfrac{1}{x.(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}\right)$ (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ par encadrement
   (c*) Montrer que : $x^n + x - 3 = 0$ a une unique racine $u_n \in]1,2[$, $n > 1$. Etude de (u_n) avec : $n.ln(u_n) = ln(3-u_n)$; <u>ou bien</u> (u_n) monotone en comparant $f_n(x) = x^n + x - 3$ à $f_{n+1}(x)$.
   (d*) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$ $(u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k}.)$ (e*) $(u_n) + (v_n)$, si (u_n) converge et (v_n) diverge ?

2. Suite à termes complexes $\boxed{u_n = z^n}$ et $\boxed{S_n = 1 + z + z^2 + ...z^n.}$ **Ne pas confondre !**
   (a) **Pour la suite** (u_n) **:** que se passe-t-il si $\mid z \mid < 1$? Puis si $\mid z \mid > 1$?
   (b) Puis quelques cas où $\mid z \mid = 1$? [cas $z = e^i$, on admet que $\pi \notin \mathbb{Q}$]. Ainsi $\boxed{z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \mid z \mid < 1}$
   (c) **Montrer que :** $\mid z \mid < 1 \Longrightarrow (S_n)$ **converge et préciser sa limite.** (C'est $S = \dfrac{1}{1-z}$.)
   (d) Réciproque : Montrer que si (S_n) converge, alors : $S_n - S_{n-1} = z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion ?

3. Soit $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.}$ On a vu qu'elle était adjacente avec $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ mais non utilisé au (a).
   (a) Vérifier, pour $k \geqslant 1$: $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Déduire que $u_n \leqslant 3$ puis la convergence de (u_n) vers l.
   (b) (*) Si on supposait : $l = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, déduire de : $u_q < l < v_q$ [à justifier], une contradiction.
   (c) (*) Avec : $u_{n+1} - u_n \leqslant l - u_n \leqslant v_n - u_n$, puis : $v_n - v_{n+1} \leqslant v_n - l \leqslant v_n - u_{n+3}$, déduire $l - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n.n!}$ et $v_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3.n!}$.

4. **On étudie** $\boxed{S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n},\ n \geqslant 1.}$
   (a) Montrer que $D_n = S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$. Déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On cherche un équivalent :
   (b) Montrer, avec le <u>théorème des accroissements finis</u>, que : $\dfrac{1}{k+1} < ln(k+1) - ln(k) < \dfrac{1}{k}$. $(*)$
   Déduire que : $S_n > ln(n+1) > ln(n)$ et que $S_n \leqslant ln(n) + 1$. Conclure que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$.
   (c) On pose $u_n = S_n - ln(n)$ et $v_n = S_n - ln(n+1)$. Déduire des <u>inégalités $(*)$</u> qu'elles sont adjacentes, puis convergent vers $\gamma \in]1 - ln(2), 1[$ appelée constante d'Euler et valant $\gamma = 0,577...$
   On écrit donc $\boxed{S_n = ln(n) + \gamma + \epsilon_n.}$ En déduire la limite de (D_n). (D_n revue au ch. 28)

5. Soit les suites $a_0 > 0, b_0 > 0$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n.b_n}$. Montrer qu'elles sont adjacentes.
   [La limite "Moyenne arithmético-géométrique de a_0, b_0", liée à une intégrale "elliptique" (Gauss**).]

6. Montrer que : $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1 + 2.(\sqrt{n} - 1)$. Limite de $\dfrac{S_n}{n}$?
   (*) Autre méthode pour $\dfrac{S_n}{n}$: <u>Théorème de Césaro</u> $(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l) \Rightarrow v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
   [Puis avec $u_n = (-1)^n$ vérifier que la réciproque du théorème de Césaro est fausse].

Chapitre 15

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+2} = a.u_{n+1} + bu_n$

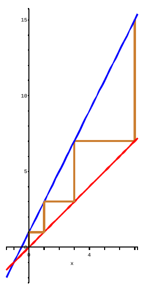
15.1 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: Limites finies éventuelles

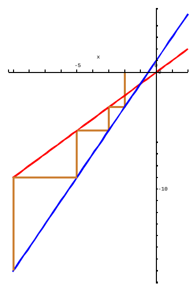
15.1.1 Dessins

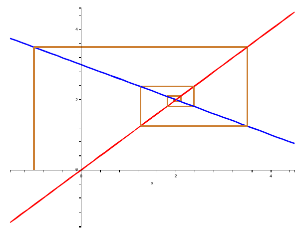
• Soit la suite arithmético-géométrique : $\begin{cases} u_0 = 0\ ; \\ u_{n+1} = 2.u_n + 1 \end{cases}$

Dessiner les deux courbes : $y = f(x) = 2.x + 1, \quad y = x\ ;$ puis : $u_1,\ u_2,\ u_3...$ 1er dessin.

• Puis ensuite $u_0 = -2$: 2^e dessin. $\boxed{\text{D'où : ne pas confondre fonction croissante et suite croissante !}}$







• Idem avec : $\begin{cases} u_0 = -1\ ; \\ u_{n+1} = \dfrac{-u_n}{2} + 3 \end{cases}$ $\boxed{\text{Attention : fonction décroissante } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ; \text{ suite } \textbf{non} \text{ décroissante}}$

Rappeler, dans cet exemple, comment on obtient : $u_n - l = (\dfrac{-1}{2})^n.(u_0 - l)$, où l est à préciser.

15.1.2 Propriété

> Soit la suite $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose : $\underline{f(I) \subset I}$; I <u>intervalle fermé</u> ; f <u>continue sur I</u>.
> Alors : <u>si</u> la suite <u>converge</u> (limite <u>finie</u>), c'est forcément vers une valeur l telle que $f(l) = l$.

<u>Démonstration</u> **A plus comprendre que savoir !**

• $f(I) \subset I$ montre que $u_1 = f(u_0) \in f(I) \subset I$! etc : <u>la suite existe **et chaque u_n reste dans I**</u>.
On dit que I est un "intervalle de stabilité".

• Les intervalles fermés sont : $\emptyset$, les segments ; les demi-droites fermées $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$; la droite $\mathbb{R}$.
<u>Utilité</u> : si la suite converge, comme tous les u_n sont dans I, la limite **finie** l <u>**reste dans I**</u>.

• Et donc : f <u>sera continue **au point** $l \in I$ pour l'instant inconnu</u>. L'hypothèse $u_{n+1} = f(u_n)$ donne que (u_n) converge vers l et aussi vers $f(l)$; l'unicité de la limite impose que $l = f(l)$.

<u>Remarques</u>

. En général, f est non affine, sinon on a une suite arithmético-géométrique connue !

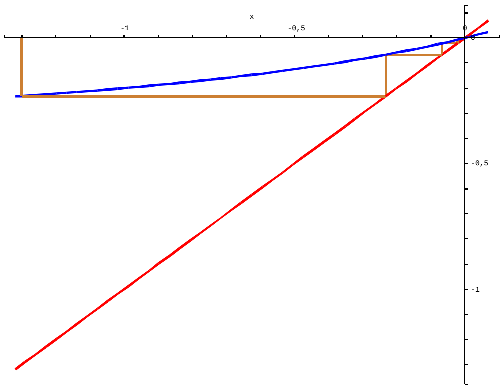
. Ce qui compte, **c'est la pratique** des exemples suivants.

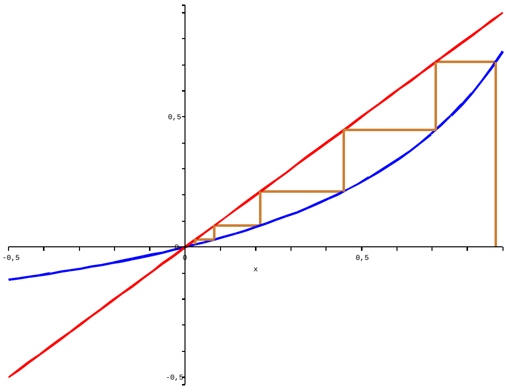
15.2 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: Exemples

15.2.1 $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$, $u_0 \leqslant 1$

1. On va dessiner $f(x) = \dfrac{x}{3-2x}$ qui est connue [hyperbole équilatère] avec les résultats suivants :

   Deux asymptotes orthogonales : $x = \dfrac{3}{2}$; $y = \dfrac{-1}{2}$. Puis $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$; d'où $f(0) = 0, f'(0) = \dfrac{1}{3}$.
   Enfin $f(x) = x \iff x \in \{0, 1\}$.





2. Pour la suite (u_n) :

   $\boxed{\text{Cas } u_0 = 1.}$ la suite est stationnaire, donc convergente vers 1. Puis :

   $\boxed{\text{Cas } 0 \leqslant u_0 < 1.}$
   (1) f est croissante sur $[0,1]$ et donc si $I = [0,1]$, alors $\underline{f(I) \subset [f(0) = 0, f(1) = 1] \subset I}$:
   Ainsi tous les u_n sont dans I
   (2) $\underline{f(x) \leqslant x,\ x \in [0,1]}$. Car $g(x) = f(x) - x$ continue, ne s'annulle pas sur $]0,1[$, donc garde un signe constant sur $[0,1]$ par le Théorème des Valeurs Intermédiaires ; et ce signe est $-$ [cf. $f'(0)$]

   Conclusion : la suite est alors aisément décroissante ! $u_n \in I \Longrightarrow u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$. Et minorée par 0, donc convergente vers $l : 0 \leqslant l \leqslant u_0 < 1$. Par continuïté sur I, $l = f(l)$, soit $l = 0$.

   $\boxed{\text{Cas } u_0 \leqslant 0.}$ Soit $I =]-\infty, 0]$ fermé.
   (1) $f(I) \subset I$ car f croissante sur I et $f(0) = 0$. D'où $\underline{\{u_n\} \in I}$.
   (2) $f(x) \geqslant x,\ x \in I$ va être aussi utile à la conclusion [bien revoir la preuve ci-dessus].

   Conclusion : la suite est alors aisément croissante ! $u_n \in I \Longrightarrow u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Et majorée par 0, donc convergente vers $l \leqslant 0$. Par continuïté sur I, $l = f(l)$ soit : $l = 0$.

3. $\boxed{\text{Remarques}}$
   - Autre méthode dans le dernier cas : une fois vu que tous les u_n restent dans $]-\infty, 0]$, on avait $|\, u_{n+1} \,| \leqslant \dfrac{|\, u_n \,|}{3}$ qui termine aussi car $|\, u_n \,| \leqslant \dfrac{|\, u_0 \,|}{3^n}$. Mieux : $|\, u_n \,| \leqslant \dfrac{|\, u_1 \,|}{3^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2.3^{n-1}}$!

   - Attention : Dans le cas $u_0 \in]0,1[$, f croissante ; mais (u_n) est décroissante !

   - **Complément** : (f croissante de I **dans I** [donc $f(I) \subset I$]) $\Longrightarrow (u_n)$ monotone.
     En effet :
     . Si $u_0 \leqslant u_1$, comme on est dans I, $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ ou $u_1 \leqslant u_2$; et on continue !
     . Si $u_0 \geqslant u_1$, comme on est dans I, $f(u_0) \geqslant f(u_1)$ ou $u_1 \geqslant u_2$; idem.

15.2.2 $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, $u_0 \geqslant 0$.

1. Dessin : idem sauf qu'on se focalise sur le premier quadrant. f continue, décroissante de 1 à 0 (exclus). $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = l \simeq 0,618...$ (nombre d'or moins 1) si $x \geqslant 0$.

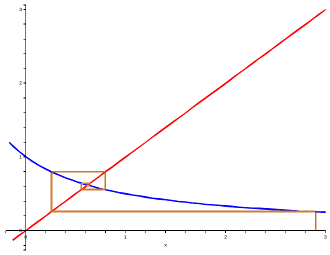


Fig 1 :

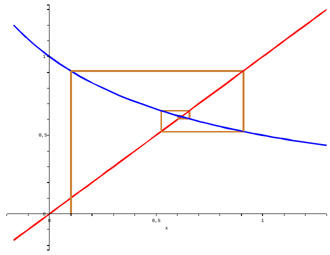


Fig 2 :

2. Ensuite : <u>Si $I = [0,1], f(I) \subset I$.</u> Pas sûr que u_0 soit dans I ! mais pour u_1, c'est sûr, car $u_1 \in f(\mathbb{R}^+) \subset]0,1] \subset I$; <u>$\Rightarrow (u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$</u>. ($I = [0,+\infty[$ permis et bon aussi).
Le dessin montre que (u_n) est <u>non</u> monotone. Comment "voir" la convergence vers $l = 0,618...$?

$\boxed{\text{Solution 1}}$ C'est la plus simple **quand elle est possible.**[1] Soit $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **Note.**[2]
$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = \dfrac{1}{1+u_n} - \dfrac{1}{1+l} = \dfrac{-(u_n - l)}{(1+u_n)(1+l)}$ [signe conforme au dessin]. Puis :
$\mid u_{n+1} - l \mid \leqslant k. \mid u_n - l \mid$ avec $k = \dfrac{1}{1+l} < 1$ et k fixe. Ceci montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

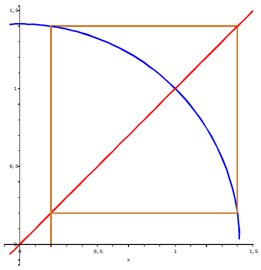
$\boxed{\text{Solution 2}}$ <u>On a</u> : <u>f décroissante de I dans I</u> $\Longrightarrow fof$ croissante [facile].
Donc $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ monotones [cf. complément p. précédente]. De plus "de sens inverse" :
<u>En effet</u> : si $u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_4 ...$ appliquer f qui donne $f(u_0) \geqslant f(u_2) \geqslant f(u_4) ...$ ou : $u_1 \geqslant u_3 \geqslant u_5 ...$
Et si $u_0 \geqslant u_2 \geqslant u_4 ...$ alors $f(u_0) \leqslant f(u_2) \leqslant f(u_4) ...$ ou bien : $u_1 \leqslant u_3 \leqslant u_5 ...$ Terminé.
<u>Ensuite</u> on va essayer de voir que : $u_{2n+1} - u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; ou que : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{1+u_n} - \dfrac{1}{1+u_{n-1}} = -\dfrac{u_n - u_{n-1}}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}$ [signe conforme au dessin].
Puis valeurs absolues et
ou bien $u_{n-1} \geqslant l$; ou bien $u_{n-1} \leqslant l$: ici $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant f(l) = l$; donc Dénominateur $\geqslant 1 + l$.
D'où : $\mid u_{n+1} - u_n \mid \leqslant k. \mid u_n - u_{n-1} \mid$ avec $k = \dfrac{1}{1+l} < 1$ et fixe : c'est gagné !
Conclusion : Par le théorème sur les suites adjacentes $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ convergent donc vers la même limite L ; d'où (u_n) converge aussi vers L.
Alors forcément L est point fixe dans [0,1] de f continue. Soit : $L = l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

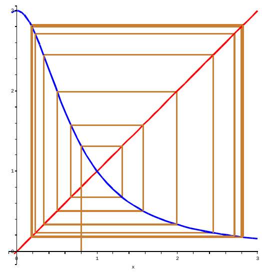
$\boxed{\text{Solution 3}}$ Même début que Solution 2 donnant $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ monotone bornée (dans [0,1]).
Puis variante : Cette sous-suite converge ; et converge forcément vers λ point fixe de fof car : fof continue de [0,1] dans [0,1] et $u_{2(n+1)} = fof(u_{2n})$.
Or : $fof(x) = ... = \dfrac{1+x}{2+x}$ et $fof(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ si $x \geqslant 0$. [Pas d'autre valeur <u>ici</u> !]
Conclusion : $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers cette valeur $\lambda = l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puis $(u_{2n+1}) = (f(u_{2n}))$ converge vers $f(l)$ qui vaut l ! Et donc (u_n) converge aussi vers $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

[1] Pour la suite $u_n = 1/n$, $u_{n+1} = u_n/(1+u_n)$; $u_{n+1} \leqslant k.u_n$, avec $k < 1$, est impossible car u_{n+1}/u_n tend vers 1.
[2] Pour le moment, ne pas dire que $l \simeq 0,618...$ est la limite ; mais dire **un candidat pour être** la limite !

15.2.3 Remarques

1. Fig.1 : Cas $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n^2}$, $u_0 = 2/10$: Attention : $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ sont ici stationnaires !





Et point **"répulsif"** (voir fof) :

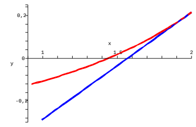
2. Dans le cas $u_{n+1} = \dfrac{3}{1 + 2u_n^2}$, $u_0 = \dfrac{8}{10}$ le point $l = 1$ est ici "répulsif" ! car $\boxed{\mid f'(1) \mid > 1.}$ Fig.2.

3. . Si on a : $u_0 \in I$ fermé, $f(I) \subset I$, (u_{2p}) convergente et fof continue, la limite λ est point fixe de fof forcément (comme pour Fig.2). Car $u_{2p+2} = fof(u_{2p})$.
   . Et alors, on a très simplement, avec f C^0 en λ : $u_{2p+1} = f(u_{2p}) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} f(\lambda)$.
   Parfois $f(\lambda) = \lambda$, parfois $f(\lambda) \neq \lambda$ (exercices plus difficiles). (*) Pour finir le cas de Fig.2, difficile, voir que : $f(x) = x \Leftrightarrow P(x) = 0$, $P(x) = 2x^3 + x - 3$ admettant $x = 1$ comme racine et deux autres complexes conjuguées ; tandis que : $fof(x) = x \Leftrightarrow Q(x) = 0$, $Q(x)$ de degré 5, divisible par P : fof a, ici, davantage de points fixes que f !

4. On cherche I intervalle (fermé si possible) avec : $f(I) \subset I$. **Parfois : f non monotone !**

15.2.4 Méthode de Newton pour le calcul approché d'une racine

1. Dessin. Soit φ dérivable 2 fois sur $[a, b]$ avec $\varphi(a).\varphi(b) < 0$; $\varphi' > O$ [pour fixer les idées] $\varphi" \geqslant 0$.

   On cherche à approcher la racine r, de $y = \varphi(x)$, à l'aide de la tangente

2. Méthode. On prend la tangente en b : $y - \varphi(b) = \varphi'(b)[x - b]$ et $y = 0$ donne $x_1 = b - \dfrac{\varphi(b)}{\varphi'(b)}$.

   On recommence avec x_1. D'où la suite $\boxed{x_0 = b\,; \qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}}$ du type $x_{n+1} = f(x_n)$.

   Parfois, si on change les signes de φ' ou $\varphi"$, on part de l'autre bout a. Vérifier que : $f'(r) = 0$.
   (c'est pour celà que la convergence est très rapide !)

15.3 $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$; $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$. (Récurrence linéaire d'ordre 2)

15.3.1 Théorème

Soit "l'équation caractéristique" $r^2 - ar - b = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$: pour $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ notée (R_0)
Si $\Delta \neq 0$, $u_n = \alpha.(r_1)^n + \beta.(r_2)^n$. Si $\Delta = 0$, $u_n = \alpha.(r_0)^n + \beta.(n.r_0^n)$ où $r_0 = a/2$ (racine double).

Démonstration :

Sera vue avec le langage des "espaces vectoriels". On calcule α, β à l'aide des conditions initiales.

15.3.2 Exemples

1. Suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n;\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$. C'est la suite $(0\,;1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;...)$

   On applique le Théorème avec calcul des racines de l'équation caractéristique.

   On trouve : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.[\varphi^n - \overline{\varphi}^n]$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Attention : u_n est entier !

   D'où : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$; donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ [nombre d'or]. Note : $u_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$!

2. Suite $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4};\ u_1 = 1,\ u_2 = 2$. On trouve ici $u_n = \frac{3n-2}{2^{n-1}}$.

3. Suite $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4} + 3;\ u_1 = 1,\ u_2 = 4$. Cette fois, on n'a pas la relation R_0.

   Posons $u_n = v_n + p$; on essaie de se ramener à R_0 [Indication] ... Trouver : $u_n = 12 - \frac{6+5n}{2^{n-1}}$.

Révisions :

. Limite de la suite : $(1+\frac{\lambda}{n})^n$, λ fixé ? (c'est e^λ.)

. Les suites arithmétiques, géométriques et **arithmético-géométriques** sont connues.

. Bien revoir le cas des sommes **"télescopiques"** : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ avec $u_k = v_{k+1} - v_k$.

. (*) Convergence (seule) de la suite : $S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 1/k^2$? (croissante, majorée par 2)

. (*) Un exemple de suites adjacentes ?

. ln transforme un produit en somme !

. **A voir, de plus, au ch. Intégrales** : 1) Les **"Sommes de Riemann"** classiques, assez faciles ; 2) les suites relevant de la formule de **Taylor-Lagrange.**

. (*) **Complément**

1. Soit la suite : $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$.

   Un dessin sur une droite de $S_1;\ S_2;\ S_3;\ S_4...$ suggère que (S_{2p}), (S_{2p+1}) sont adjacentes.

   Cette idée marche bien et montre la convergence de (S_n) vers $L \in]\frac{1}{2}, 1[$.

   En fait cette **suite sera revue** au ch. Intégrales en précisant de plus sa limite $L = ln(2)$.

2. En exercice non corrigé du ch. précédent on avait parlé de la "Moyenne arithmético-géométrique".

   Voici quelque chose d'analogue mais plus facile (méthode des isopérimètres de Nicolas de Cuse) :

   Soit $u_0 = a \geqslant 0;\ v_0 = b \geqslant a$. Et : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2};\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n}$.

   Alors $u_0 = v_0.cos(\varphi)$ donne $u_1 = v_0.cos^2(\frac{\varphi}{2});\ v_1 = v_0.cos(\frac{\varphi}{2})$. Donc : $u_1 = v_1.cos(\frac{\varphi}{2})$.

   Puis $v_n = v_0.cos(\frac{\varphi}{2}).cos(\frac{\varphi}{2^2})...(cos(\frac{\varphi}{2^n}) = v_0.\frac{sin(\varphi)}{2^n.sin\frac{\varphi}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b\frac{sin(\varphi)}{\varphi}$ et suites adjacentes !

   Ceci est lié aux rayons $r_n = \frac{1}{2^n.tan(\pi/2^n)}$ et $R_n = \frac{1}{2^n.sin(\pi/2^n)}$ des cercles inscrits et circonscrits d'un polygône à 2^n côtés, de périmètre 2, convergeants vers $\frac{1}{\pi}$: Nicolas de Cuse.

M+ **Exercices: Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+2} = a.u_{n+1} + bu_n$.** **PTSI**

---

1. Etudier la suite $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$; $u_0 \in \mathbb{R}^+$. [Guider beaucoup.]

2. Etudier la suite $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$; $u_0 \in \mathbb{R}$. [(*) Discussion selon u_0.]

3. Etudier la suite : $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$; $u_0 \in \mathbb{R}$. [(*) Discussion selon u_0.]

4. Que dire de (u_n), (v_n) réelles si $u_n^2 + u_n.v_n + v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? [Hors série ; intéressant !]

5. Suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Explisciter u_n. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$?

6. Suite telle que $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 7$.
   (a) Poser $u_n = v_n + p$ pour se ramener à R_0 $[v_{n+2} = a.v_{n+1} + b.v_n]$. Voir que ce n'est pas possible.
   (b) Poser alors $u_n = v_n + p + q.n$; et se ramener à R_0. Conclure que $u_n = \beta.2^n - 7n + \gamma$.
   (c) Autre méthode pour la suite (u_n) :
   Poser $d_n = u_{n+1} - u_n$ et voir que (d_n) est arithmético-géométrique [connue].
   Avec $u_n - u_0 = d_0 + d_1 + ... + d_{n-1}$, conclure.

7. (*) Suite $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$, $u_0 < 2$.
   (a) Représentation graphique de $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n < 2$. Puis montrer que $n \geqslant 3 \Longrightarrow u_n \in [-1, \frac{1}{3}]$.
   Trouver alors $k < 1$ (fixe) tel que $\mid u_{n+1} \mid \leqslant k. \mid u_n \mid$ et conclure.
   (c) Autre méthode : On pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 3}$.
   Montrer que (v_n) est géométrique. Exprimer u_n à l'aide de v_n. Conclure.

8. (*) Etudier la suite $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$, $u_0 = \dfrac{3}{2}$. [Indications : voir que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2$ mais ce n'est pas obligatoire ; on a : $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant (u_0 + \sqrt{2})(\dfrac{u_0 - \sqrt{2}}{u_0 + \sqrt{2}})^{2^n}$! (algorithme de Babylone ou mieux de Héron d'Alexandrie). On peut reconnaitre aussi une méthode de Newton pour $\varphi(x) = x^2 - 2$. Et $v_n = \dfrac{2}{u_n}$ permet l'encadrement de $\sqrt{2}$ avec u_n ; suites rationnelles !]

Chapitre 16

Géométrie du plan $\mathbb{R}^2$

16.1 Plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$. Plan vectoriel associé

16.1.1 Points, Vecteurs

1. On considère, $\mathbb{R}^2$ étant l'ensemble des couples de réels :

   • soit $\mathbb{R}^2 = \mathcal{P}$ comme ensemble **de points ;** on dit ici : plan **affine** $\mathcal{P}$**.** $(1,2)$ sera un point A.

   • soit $\mathbb{R}^2 = \Pi$ comme ensemble **des vecteurs** associés [bien voir la notation choisie] : on dit alors plan **vectoriel** Π **associé** au plan affine $\mathcal{P}$. $(2,1)$ sera ici un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, dans ce contexte.

   Opérations linéaires (sur les vecteurs dans Π) il y en a deux : $\begin{cases} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \\ \lambda.\overrightarrow{u} \end{cases}$

   La donnée de deux vecteurs non colinéaires est **une base** $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ **de Π.**

   La donnée d'une origine (un point O) et d'une base de Π est **un repère de** $\mathcal{P} : (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

   Lien entre $\mathcal{P}$ et Π Soit $A \in \mathcal{P}$; alors $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \Pi$ (notation de Grassman : $M = A + \overrightarrow{AM}$)

   Et on peut changer de point-origine avec la relation de Châsles : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

2. La droite (affine) dans $\mathcal{P}$ muni du repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

   La droite $\mathcal{D}$ ($A(x_0, y_0)$ dirigée par $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) est définie par $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u}}$ ou

   $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = \lambda.\alpha \\ y - y_0 = \lambda.\beta \end{cases}$ en paramétriques ; et par $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$ en cartésiennes, avec la :

   Convention : Quand on a, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{p}{\alpha} = \dfrac{q}{\beta} = \ldots$ avec au moins un dénominateur non nul : si un dén. est nul, le numérateur correspondant aussi ! (en effet, le rapport existe dans $\mathbb{R}$, noté λ)

   Théorème

   > **Une équation cartésienne de droite est :** $ax + by = c$, $(a, b) \neq (0, 0)$**.**
   > On obtient des droites **parallèles en changeant seulement** c. En particulier :
   > $ax + by = 0$ est aussi appelée droite vectorielle Δ **dirigeant** $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}(-b, a) \in \Delta$.

16.1.2 Exemple :

1. Avec le repère oblique : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, montrer que les médianes sont concourantes.
2. Solution. On a : $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ puis [**calcul**] $AA' : x - y = 0$; $BB' : x + 2y = 1$ car $M \in (B, B') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BM} = \lambda.\overrightarrow{BB'}$ ou $x - 1 = \lambda.(0 - 1)$, $y - 0 = \lambda(1/2 - 0)$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1/2}$
   $CC' : 2x + y = 1$: passent toutes trois par $G(1/3, 1/3)$. On dit que le système des 3 équations à 2 inconnues **est compatible**. Vérifier, de plus, que $\overrightarrow{A'G} = \dfrac{1}{3}.\overrightarrow{A'A}$: les médianes se coupent au $1/3$ de chacune d'elles à partir de la base. Meilleure démonstration à venir avec les **barycentres** !

$\boxed{\text{Remarque}}$: L'intersection de 2 droites est un cas de système 2x2 $\begin{cases} ax+by=c & (a,b)\neq(0,0) \\ a'x+b'y=c' & (a',b')\neq(0,0) \end{cases}$

Les droites sont : sécantes ou parallèles (distinctes ou non).

Et : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles $\Longleftrightarrow$ Δ et Δ' confondues (droites vectorielles directrices) $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ vecteurs **colinéaires** (ou bien : composantes proportionnelles) $\Leftrightarrow$ $ab'-a'b=0$.

16.1.3 Système linéaire carré 2x2

1. Méthode de substitution. Soit $\begin{cases} x+2.y=5 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$ Tirons x de (1), reportons dans (2) : $y=\dfrac{9}{2}$, $x=-4$.
   On vérifie (réciproque) !
2. Méthode de combinaisons Linéaires de Lignes. Soit $\begin{cases} x+2.y=5 \\ 3.x+4.y=6 \end{cases}$ $3.L_1-L_2$: $2.y=3.5-6$; $y=\dfrac{9}{2}$. $2.L_1-L_2$: $x=-4$. **Réciproque à voir !**
3. Méthode des "déterminants" 2x2 : **Déjà, diverses notations :** $\begin{cases} a.x+b.y=c \\ a'.x+b'.y=c' \end{cases}$

   On écrit : $x.\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ ou $\boxed{x.\overrightarrow{u}+y.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}.}$ (Note : dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, les composantes des vecteurs étant toujours écrites en colonnes. Si $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{\imath}+a'\overrightarrow{\jmath}$ alors $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}}$. Si en lignes, c'est pour un gain de place). Par calcul, on trouve :

   Si $ab'-a'b\neq 0$, il y a une et une seule solution : $x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$, $y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$. D'où :

   Définition

   On note $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ la "matrice" du système et dét$(A)=D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b\in\mathbb{R}$ le "déterminant" associé ; on note aussi $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-bc'$ obtenu en remplaçant la colonne des x par le 2ème membre et $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$: celle des y par le 2ème membre.

   Théorème

   Si $D\neq 0$, le système, dit "de Cramer" a une et une seule solution : $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$.
   Sinon on regarde (soit pas de solution, soit une infinité : à voir.)
4. Exemple avec les déterminants $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=m^2 \end{cases}$ On a : $D=m^2-1$; donc
   - Si $m\neq\pm 1$, un et un seul couple solution $x=\dfrac{m-m^2}{m^2-1}=\dfrac{-m}{m+1}$, $y=\dfrac{m^3-1}{m^2-1}=\dfrac{m^2+m+1}{m+1}$.
   - Si $m=1$, il ne reste qu'une équation $x+y=1$: infinité de couples solutions ; droite affine $x+y=1$ (plutôt : 2 droites affines confondues)
   - Si $m=-1$, pas de solution : géométriquement, intersection dans $\mathbb{R}^2$ espace affine, de 2 droites strictement parallèles $(-x+y=1;\ \ x-y=1)$.
5. Equation de droite affine dans $\mathbb{R}^2$ (à nouveau) [2ème $\Leftrightarrow$ **ci-dessous : à voir**]

   Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, équation de $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{u})$: $M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=0$

   $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$: qui a été déjà vu pour la droite affine dans $\mathbb{R}^2$.
6. **Note : on verra [ch.23] que** $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=det\underset{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}{\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}}=\boxed{\textbf{Aire.parallélogramme.OACBO.}}$

16.2 Barycentres

16.2.1 Théorème-Définition

Soit $\begin{pmatrix} A_1 & A_2... & A_n \\ \alpha_1 & \alpha_2... & \alpha_n \end{pmatrix}$ n points "massiques" (ou pondérés), c'est-à-dire $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors

$\boxed{\text{Si}}$ $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, $\exists! G$ tel que au choix (1) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}}$ **ou** (2) $\boxed{\forall O, \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{OA_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.}$

Cet unique point G est appelé **barycentre des points pondérés** (ou massiques).

Démonstration Soit $M \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{MA_k} = \overrightarrow{V}(M)$, appelée fonction vectorielle de Leibniz.

On a : $\overrightarrow{MA_k} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_k}$; d'où $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(O) + [\sum_{k=1}^{n} \alpha_k].\overrightarrow{MO}$. Donc :

Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, $\overrightarrow{V}(M)$ est un vecteur constant ; donc soit il est toujours nul, soit jamais nul.

Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$: $\overrightarrow{V}(G) = \overrightarrow{0}(1) \iff \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{V}(O)}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}(2)$ et ceci a lieu pour un et un seul point G.

$\boxed{\text{Remarque}}$ Si $\lambda \neq 0$, on peut remplacer les α_k par $\lambda.\alpha_k$. Ainsi, si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, $\lambda = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$

ramène au cas de coefficients de somme 1.

16.2.2 Cas essentiel $n = 2$: 2 points ! Dessins ?

1. Barycentre de $\begin{pmatrix} A & B \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$? $O = A \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2.\overrightarrow{AA} + 3.\overrightarrow{AB}}{2+3}$... de $\begin{pmatrix} A & B \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$? de $\begin{pmatrix} A & B \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$?

2. **Cas général :** $\alpha + \beta \neq 0$. G baryc. (A, α) et $(B, \beta) \iff \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = \frac{-\beta}{\alpha}$. Donc
   - G entre A et $B \iff \alpha$ et β de même signe.
   - Et G plus près du point le plus "lourd" en valeurs absolues !

3. $\boxed{\text{Remarques}}$ 1) Si on impose $\alpha + \beta = 1$, G entre A et $B \iff \alpha \in [0, 1]$.

   2) Pour $A \neq B$, l'équation en M sur (A, B) : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, k donné, a au plus une solution en M.

   (En effet si $k \neq 1$, $\overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$: c'est un barycentre ; si $k = 1$, pas de solution : M est à l'infini géométriquement). Cette remarque, très simple, est très utile en géométrie.

16.2.3 Théorème d'associativité

Soit $p \leqslant n$ et $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Pour le calcul de G, on peut remplacer les p premiers points par leur barycentre partiel, à condition de l'affecter de la masse partielle.

Démonstration Soit G_0 le barycentre partiel ; on l'affecte du coefficient : $\gamma = \sum_{k=1}^{p} a_k$;

soit G' le barycentre de $(G_0, \gamma), (A_{p+1}, \alpha_{k+1})...(A_n, \alpha_n)$; alors avec (1) ou (2) :

$[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k].\overrightarrow{GG'} = \gamma.\overrightarrow{GG_0} + \alpha_{k+1}.\overrightarrow{GA_{k+1}} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}$ et avec $\overrightarrow{GG_0}$, on a donc $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$!

$\boxed{\text{Exemple}}$ **Médianes concourantes en l'isobarycentre :** remplacer A et B par C' milieu,

... les médianes passent donc toutes par G ; de plus situé au 1/3 à partir du pied des médianes.

16.3 Le plan vectoriel euclidien (produit scalaire sur les vecteurs)

16.3.1 Angles et normes de vecteurs

1. Définition du produit scalaire.

   Etant donné 2 vecteurs, on définit le produit scalaire par : $\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.cos(\alpha).}$

   (Si on veut : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overline{OA}.\overline{OQ} = \overline{OB}.\overline{OP}$ où Q est la projection orthogonale de A sur la droite (O,B) ; P celle de B sur (O,A)). Donc : $\boxed{\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}; \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}}.}$

   Remarques

   1) On a donc **l'inégalité Cauchy-Schwartz** $\boxed{|\,\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\,| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.}$ (On peut avoir $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$!)

   2) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$. Et $\overrightarrow{0}$ **est le seul vecteur orthogonal à lui-même.**

2. Propriétés (Démonstration en exercice)

   Un p.s. est une $\boxed{\text{forme bilinéaire symétrique, définie, positive}}$ c'est-à-dire :

   1) On a $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}$: on dit pour ceci "forme".

   2) La linéarité par rapport au 1er vecteur : $(a.\overrightarrow{u}_1 + b\overrightarrow{u}_2)\,.\,\overrightarrow{v} = a.(\overrightarrow{u}_1\,.\,\overrightarrow{v}) + b.(\overrightarrow{u}_2\,.\,\overrightarrow{v})$
   Et aussi par rapport au 2ème vecteur : forme "bilinéaire".

   3) $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u}$ **: forme bilinéaire "symétrique".**

   4) $\forall\ \overrightarrow{u} \in E = \mathbb{R}^2$ **:** $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} \geqslant 0$ **: "positive".**

   5) Enfin $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ **: définie".**

3. $\boxed{\text{Norme de vecteurs}}$ $\overrightarrow{u} \longmapsto \|\overrightarrow{u}\|$ **est une "norme", ce qui est** $\|\overrightarrow{u}\| \in \mathbb{R}^+$ **et 3 autres axiomes**

   1) $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

   2) $\|\lambda.\overrightarrow{u}\| = |\,\lambda\,|\,.\|\overrightarrow{u}\|$ **pour λ réel.**

   3) Enfin l'inégalité triangulaire, appelée ici de Minkowski : $\boxed{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.}$

   Démonstration

   1) est vu. 2) vu aussi car : $(\lambda.\overrightarrow{u})\,.\,(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda^2.(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u})$; etc.

   3) **Calcul essentiel :** $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\,.\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{v}$, par bilinéarité ; d'où par symétrie : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$.
   Puis : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} \leqslant |\,\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\,| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$ ce qui termine.

   Remarque : on peut étudier les cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz et Minkowski :

   . L'inégalité de (C-S) est une égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
   . L'inégalité de (M) est une égalité $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ colinéaires de même sens (car de plus $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} \geqslant 0$.)

16.3.2 Théorèmes géométriques

1. $\boxed{\text{Théorème de Pythagore généralisé ou d'Al-Khashi : } \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2.}$

   Démonstration vue ci-dessus. Interprétation :

   Soit un triangle A, B, C; $BC = a$, etc ; alors $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC}$;
   ou la relation des cosinus : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(A)}$ car $cos(\pi - A) = -cos(A)$.

2. $\boxed{\text{Théorème de la médiane ou du parallélogramme } \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2.[\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2].}$

   Car $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$. Interprétation vue au chapitre $\mathbb{C}$ et Géométrie.

3. Remarques : **La norme à l'aide du p.s. :** $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}}$ ou $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}$.

   Le p.s. à l'aide de la norme : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$.

16.3.3 Bases orthonormées : Intérêts.

1. 1er intérêt des bases orthonormées ($\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0$ et $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1$) : le produit scalaire est facile.
   Soit : $\vec{u}=x.\vec{\imath}+y.\vec{\jmath}$, $\vec{v}=x'.\vec{\imath}+y'.\vec{\jmath}$; alors :
   $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'(\vec{\imath}.\vec{\imath})+(xy'+x'y).(\vec{\imath}.\vec{\jmath})+yy'.(\vec{\jmath}.\vec{\jmath})$ par bilinéarité.
   Ainsi : **dans une base quelconque, le produit scalaire est compliqué**.
   Mais $\boxed{\vec{\imath},\vec{\jmath} \text{ orthonormée} \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\,; \quad \text{et donc} \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2}.}$
2. 2ème intérêt : de même, les composantes sont faciles.
   Ecrivons : $\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}$; alors : $\vec{u}\cdot\vec{\imath}=x$; $\vec{u}\cdot\vec{\jmath}=y$.
   Et donc $\boxed{\text{en base orthonormée, on a l'égalité : } \vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{\imath}).\vec{\imath}+(\vec{u}\cdot\vec{\jmath}).\vec{\jmath}}$

   Remarque importante en pratique :
   Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ est une base seulement orthogonale (donc Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ non nuls en particulier), on a
   $\boxed{\vec{u}=\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\right).\vec{a}+\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right).\vec{b}}$ En effet $\vec{u}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{b}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{a}=\lambda.(\vec{a}\cdot\vec{a})$: $\lambda=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$.
3. Démonstration des formules d'addition en trigonométrie circulaire :
   Soit $\vec{u}(cos(\alpha),sin(\alpha)$ et $\vec{v}(cos(\beta),sin(\beta)$ en base orthonormée.
   L'angle $(\vec{v},\vec{u})$ vaut $\alpha-\beta$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=1.1.cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha).cos(\beta)+sin(\alpha).sin(\beta)$.
   D'où $cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha).cos(\beta)+sin(\alpha).sin(\beta)$. Puis $cos(\alpha+\beta)$; $sin(\alpha+\beta)=cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta]$.

16.4 Le plan affine euclidien

16.4.1 Distance, Angle, Repère orthonormé

1. Définition $\boxed{\text{Soit le plan affine } \mathcal{P} \text{ : les points du plan ; on munit le plan vectoriel associé } \Pi \text{ (les vecteurs) d'un produit scalaire qui donne angles et distances : } \delta(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|.}$

   $\boxed{\text{Note :}}$ Il y a 3 cas d'égalité des triangles ABC, $A'B'C'$ (égalité au sens isométrique) :
   – 1 côté égal et les 2 angles adjacents (par exemple $AB=A'B'$ et $\widehat{A}=\widehat{A'},\widehat{B}=\widehat{B'}$.
   – 2 côtés égaux ainsi que l'angle entre ces côtés (par exemple $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $AC=A'C'$ et $AB=A'B'$)
   – enfin les 3 côtés homologues égaux deux à deux.

2. La droite en repère orthonormé.
   • On sait que, dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation : $M\in\mathcal{D}\Longleftrightarrow ax+by=c,(a,b)\neq(0,0)$;
   et que $\vec{u}(-b,a)\neq\vec{0}$ en est un vecteur directeur ;
   ou encore que Δ, $ax+by=0$, est la droite vectorielle associée (ou directrice) : $\vec{u}\in\Delta$.
   • En repère orthonormé, **de plus** $\boxed{\begin{array}{c}\vec{n}(a,b) \textbf{ est orthogonal à } \Delta \textbf{ ou } \mathcal{D} : ax+by=c \quad \text{et :} \\ \text{pour un point } M_1(x_1,y_1)\in\mathcal{P},\ \delta(M_1,\mathcal{D})=\dfrac{|\,ax_1+by_1-c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{array}}$
   Démonstration. Déjà $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.
   1) Puis, pour M_1 quelconque, notons H_1 sa projection orthogonale sur $\mathcal{D}$; **on a :**
   (1) $\overrightarrow{H_1M_1}=\lambda.\vec{n}$ d'où : $\overrightarrow{AM_1}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{H_1M_1}\cdot\vec{n}=\lambda.\|\vec{n}\|^2$ (car $\overrightarrow{AH_1}\perp\vec{n}$). **Et :**
   2) Si $f(M)=ax+by-c$, en repère orthonormé $\forall A\in\mathcal{D}$, $\forall M$: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=ax+by-c=f(M)$
   En effet, avec notations évidentes $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a(x-x_0)+b(y-y_0)=ax+by-c$
   car $ax_0+by_0=c$. [Qui ré-entraine, si on voulait, que $\vec{n}\perp D$ car $M\in\mathcal{D}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$.]
   D'où λ avec (2) $\overrightarrow{H_1M_1}\cdot\vec{n}=\lambda.\|\vec{n}\|^2=a.x_1+b.y_1-c$ et $\delta=\|\overrightarrow{H_1M_1}\|=|\,\lambda\,|\,.\|\vec{n}\|$:

$$\delta(M_1,\mathcal{D}) = \|\overrightarrow{H_1M_1}\| = \mid \lambda \mid . \|\overrightarrow{n}\| = \frac{\mid ax_1+by_1-c \mid}{\|\overrightarrow{n}\|}. \quad (\text{Même : } \overrightarrow{H_1M_1} = \frac{ax_1+by_1-c}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|})$$

Remarque. Si on choisit : $\overrightarrow{n}(cos(\alpha), sin(\alpha))$ unitaire, l'équation est dite "normale" ou encore "équation d'Euler" de la droite $\mathcal{D}$: $x.cos(\alpha)+y.sin(\alpha)=d$ et $\overrightarrow{OH_0}=d.\overrightarrow{n}, \ \|\overrightarrow{n}\|=1$ ici.

3. **Le cercle en repère orthonormé.** **Bien voir que $\|\overrightarrow{CM}\|^2=(x-a)^2+(y-b)^2$!**

Equation : $\boxed{\begin{array}{l} M \in \text{Cercle } (C(a,b), \text{Rayon } R) \iff CM^2=R^2 \iff (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \\ \iff x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \ \text{ avec } \ c=a^2+b^2-R^2, \ \text{ donc } \ a^2+b^2-c \geqslant 0. \end{array}}$

Remarque : Le cercle **passe par O si et seulement si** $c=0$.

16.4.2 Cercle : Théorème de l'angle inscrit

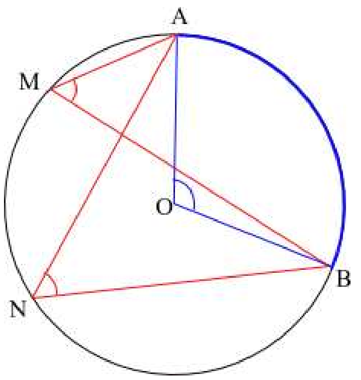
1. Version élémentaire

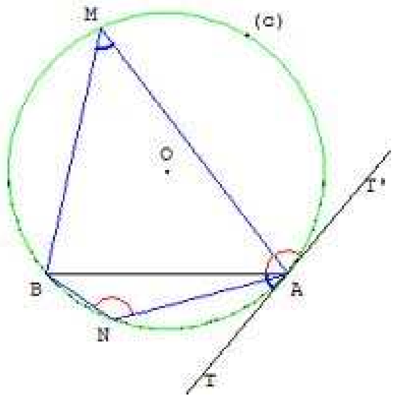
Soit $\mathcal{C}$ un cercle ; $A \neq B \in \mathcal{C}$. $\forall M \in \mathcal{C}$ situé du même côté de (A,B) l'angle $\widehat{AMB}$ est constant et vaut $1/2.(\widehat{AOB}-$opposé à $M)$. Donc : si N est sur le cercle de l'autre côté de (A,B) : $\widehat{M}+\widehat{N}=$ 1 angle plat.

Démonstration en exercice. [Commencer par le cas M,O,B alignés]

Version "angles orientés"

$\forall M \in \mathcal{C}$: $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 1/2.(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \theta(\pi)$ ("Arc capable"). Et A,B,M,N sont (cocycliques ou alignés) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}(\pi)$





A compléter

(Version "angles orientés", en complément : L'angle de 2 droites, en M, est défini modulo π ; l'angle de 2 vecteurs, en O, modulo $2.\pi$; tout est donc correct avec le coefficient $1/2$.)

2. Une utilisation : **Relation des sinus dans un triangle.**

$\boxed{\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)} = \frac{abc}{2S} = 2R}$ S=aire du triangle ; R=rayon du cercle circonscrit.

En effet, que l'angle en A soit aigu ou obtus (faire des figures), on a toujours que l'aire vaut : $S=1/2.ac.sin(B)$; donc aussi : $S=1/2.ac.sin(B)=1/2.ab.sin(C)=1/2.bc.sin(A)$.

Pour le moment, le théorème précédent est non utilisé ; puis avec le cercle circonscrit de centre O : Soit B' : $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OA}$; alors $\widehat{B'}=\widehat{B}$ ou $\pi-\widehat{B}$; donc $sin(\widehat{B})=sin(\widehat{B'})=\frac{b}{2R}$. Fini.

(**Complément :** Les 4 cercles ABC, ABH, ACH, BCH ont même rayon.)

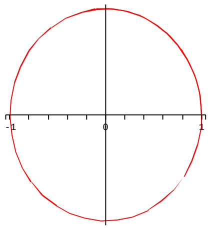
16.4.3 Complément sur le cercle : Théorème de la puissance d'un point

1. Enonce

Soit $\mathcal{C}(C,R)$ un cercle et $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{u})$ une droite ; on supose $\|\overrightarrow{u}\|=1$. Quand $\overrightarrow{u}$ varie en direction et que $\mathcal{D}\cap\mathcal{C}$ contient 2 points M, M' : le produit $\overline{AM}.\overline{AM'}$ est constant et vaut $puiss(A/\mathcal{C}) = CA^2-R^2 = d^2-R^2$: "puissance du point A par rapport à $\mathcal{C}$".

Démonstration **(par calcul vectoriel, sans repère !)**
Pour $\mathcal{D}$: $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u}$. Pour $\mathcal{C}$: $\overrightarrow{CM}^2 = R^2$. Donc $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})^2 = R^2$ qui donne avec la ligne ci-dessus : $\lambda^2 + 2.\lambda.(\overrightarrow{u} \centerdot \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CA}^2 - R^2 = 0$ car on choisit $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.
Le produit des racines vaut $\lambda.\lambda' = (\lambda.\overrightarrow{u}) \centerdot (\lambda'\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AM} \centerdot \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{CA}^2 - R^2$. Fini ! 3 cas :

1) A sur le cercle $\Leftrightarrow puiss(A/\mathcal{C}) = 0$. 2) A intérieur $\Leftrightarrow puiss(A/\mathcal{C}) < 0$. Dessins ?



3) A extérieur au cercle $\Leftrightarrow puiss(A/\mathcal{C}) > 0$. Dessin à compléter ?

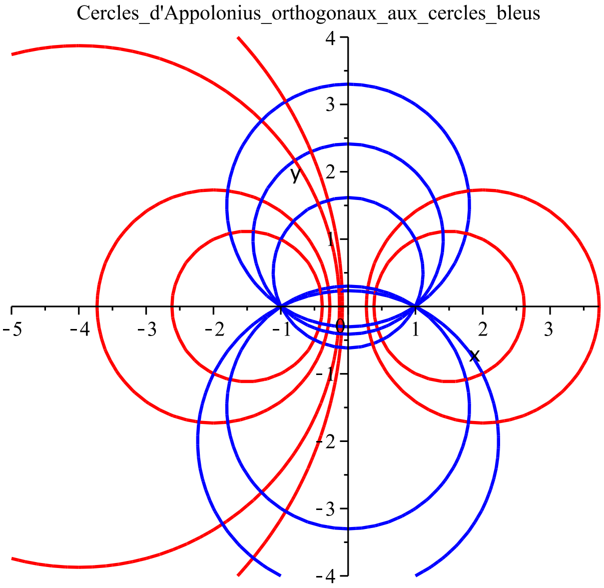
Avec ici une tangente AT au cercle, on retrouve aisément $AT^2 = d^2 - R^2$ (Pythagore).

2. Utilisation : Ensemble des points du plan M : $\dfrac{MA}{MB} = k$, $A \neq B$, $k \geqslant 0$; courbe notée $\mathcal{C}_k$

On obtient si $k = 1$ la médiatrice de $[A, B]$ et si $k \neq 1$ un cercle centré sur la droite (A, B). (*) Et ces cercles (d'Apollonius) sont orthogonaux à tout cercle Γ passant par A et B

Démonstration ($k \neq 1$ sinon clair ; A et B points communs du dessin)
1) On écrit, par équivalence : $\overrightarrow{MA}^2 - k^2.\overrightarrow{MB}^2 = 0$ ou $(\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}) \centerdot (\overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB}) = 0$.
Soit I le baryc. de $(A, 1)(B, +k)$ et J de $(A, 1)(B, -k)$; $k \geqslant 0$). Alors $(1+k).\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}$, $(1-k).\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB}$. D'où $\overrightarrow{MI} \centerdot \overrightarrow{MJ} = 0$, $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$: M décrit le cercle de diamètre $[IJ]$.

Cercles_d'Appolonius_orthogonaux_aux_cercles_bleus



2) (*) **Complément** . Pour l'orthogonalité, on va aussi utiliser la division harmonique D.H. :

- On avait $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{JA}{JB} = \dfrac{MA}{MB} = k$ [ce qui, au passage, montrait que I et J étaient les pieds des bissectrices de AMB] : $\boxed{\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JB}}}$ (1) : on dit que A, B, I, J sont en division harmonique.
- Ce qui entraine la relation de Newton : $\boxed{\text{Si } \Omega \text{ est milieu de } [I, J],\ \Omega I^2 = \Omega J^2 = \overline{\Omega A}.\overline{\Omega B}}$ (2).
  En effet, écrire $\overline{IA} = \overline{I\Omega} + \overline{\Omega A}$, etc, pour passer de (1) à (2).
- Soit maintenant un cercle Γ passant par A et B : On sait que $\overline{\Omega A}.\overline{\Omega B}$ est la puissance de Ω par rapport à Γ ; ici, Ω est donc extérieur ($puiss > 0$) et si T est un point d'une tangente à Γ passant par Ω, $puiss(\Omega/\Gamma) = \Omega T^2$ et c'est aussi ΩI^2 avec (2). Ceci indique que $\mathcal{C}_k$ et Γ sont orthogonaux !

M+ **Exercices: Plan affine/affine euclidien.** **PTSI**

---

1. (a) $\boxed{\text{Médianes d'un triangle concourantes :}}$ **à revoir avec les barycentres.**
   (b) Barycentres : Tracer l'isobarycentre de 4 points en les associant 2 et 2 ; puis 3 et 1.
   Lire la figure dans l'espace avec un tétraèdre A, B, C, D et trouver 7 droites concourantes !

2. $\boxed{\text{La droite } \textbf{en repère orthonormé.}}$ Equation de la droite $\mathcal{D} \perp \overrightarrow{n}(3,2)$, passant par $A(-1,2)$?
   Distance de $O(0,0)$ à cette droite ? Equation de sa perpendiculaire passant par $B(3,4)$?

3. Coniques : (a) Equation du cercle passant par O, $I(1,0)$, $J(0,1)$? Puis reconnaitre les courbes
   (b) $y^2 = x$ (c) $y = \dfrac{2x^2+3x}{x+1}$ (d) $y = \dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ [divisions en (c), (d)].

4. $\boxed{\textbf{Le cours :}}$ Le plan affine $\mathcal{P}$ (les points) ou bien le plan vectoriel associée Π (les vecteurs) est dit "euclidien" si on a un produit scalaire $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$: forme bi-linéaire symétrique, définie, positive.
   (a) Développer $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$ (nom du résultat) ? Théorème de la médiane ? Utilité de bases o.n. ?
   (b) **Triangles** : Rappeler la relation des cosinus dans le triangle. Puis celle des sinus.
   (c) **Rappeler** l'inégalité de Cauchy-Schwartz ; et l'inégalité de Minkowski (inég. triangulaire).
   Que donne l'inég. de (C-S) pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$? Prouver cette inégalité autrement.

5. (a) **Choix d'un repère o.n** : Quel est $\left\{M : \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\right\}$ [avec $A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}; B\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$] ?
   (b) Même exercice **sans repère**, avec $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}$ idem, O milieu de $[A, B]$

6. **Repère o.n ... :** pour $\mathcal{E}_1 = \{M : MA = 2.MB\}$; $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3 = \{M : MA^2 \pm MB^2 = k\}$.

7. Angles : Pour une étoile croisée quelconque $ABCDEA$ que vaut la somme des 5 angles au sommet ?

8. Cercles : (a) Vérifier que : $C_1(A_1, R_1) \cap C_2(A_2, R_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow |R_1 - R_2| \leq A_1A_2 \leq R_1 + R_2$.
   (b) Montrer, **avec le théorème de l'angle inscrit,** que le symétrique de l'orthocentre H par rapport aux côtés d'un triangle, est situé sur le cercle circonscrit.
   (c) (*) Soit $A, B, C : AB = 3; AC = 4; BC = 5$. Avec $G = Bar((A,-5),(B,4),(C,3))$, quel est l'ensemble $\mathcal{C} = \{M : -5MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 12\}$? [Vérifier que (B,C) : tangente à $\mathcal{C}$.]

9. (*) Barycentres. Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P} : A, B, C$. [Avec $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC}$.]
   (a) Montrer que M est forcément barycentre de A, B, C avec des coefficienst α, β, γ judicieux.
   (b) Montrer qu'on peut choisir $\alpha = Aire(MBC)$ etc. [Se limiter à M intérieur au triangle (α, β, $\gamma \geqslant 0$) ici et pour la suite et voir que : $\alpha/AireMBC = \beta/AireMAC$.]
   (c) I étant le centre du cercle inscrit à PQR, déduire que $I = Bar\begin{pmatrix} P & Q & R \\ QR & PR & PQ \end{pmatrix}$ [PQ longueur]
   (d) En déduire le centre de gravité d'un fil triangulaire homogène ABC pesant.
   (e) Cas de la plaque triangulaire homogène ? [La découper en lamelles parallèles à (B,C)].

Chapitre 17

Transformations du plan

17.1 Homothéties affines et translations (sans repère ici)

17.1.1 Composition

1. Définition $\boxed{f : M \longmapsto M' \text{ est une translation si } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = cte\,; \text{ et une homothétie de centre } I \text{ de rapport } k \neq 0, \text{ si } \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}.}$

2. Théorème $\boxed{\text{Soient } f,\ g \text{ des homothéties affines (rapport } k_1, k_2) \text{ ou translations (rapport 1). Alors } gof \text{ est } \underline{\text{si } k_1.k_2 \neq 1} \text{ une homothétie affine de centre l'unique point fixe ; } \underline{\text{si } k_1.k_2 = 1} \text{ une translation. Et la composée est } \underline{\text{non}} \text{ commutative en général.}}$

   Une démonstration est possible avec **les complexes :** $z \mapsto k_1.z + b, \quad z \mapsto k_2.z + d, \quad \underline{k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*}$.

   Ex. $z' = -2.z + 3 + 6i$: homothétie de rapport -2 (simil. aff. directe, rapport 2, angle π, centre : point fixe).

17.1.2 Théorème de Thalès

1. Enoncé $\boxed{\text{Soient 2 droites } \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \text{ distinctes et 3 droites } D, D', D" \,; \text{ avec } D \neq D' \text{ parallèles coupant les 2 précédentes en } A, B\,;\ A', B'. \text{ Alors : } D"//D' \iff \frac{\overline{AA"}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BB"}}{\overline{BB'}}.}$

   La démonstration peut utiliser une translation si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ parallèles, ou une homothétie si sécantes en I. Dans ce dernier cas : $\frac{\overline{IA"}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{IB"}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{A"B"}}{\overline{A'B'}}$. [On peut aussi utiliser une projection affine].

2. $\boxed{\text{Attention}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, 2 droites affines sont en général **non coplanaires** : ni parallèles ni sécantes !

17.1.3 En complément

Médianes concourantes avec les homothéties affines. [1]

[1] Notes :

1. On a $\boxed{A \neq B \text{ et } A' \neq B' \text{ donnés : } [\exists f \text{ hom. aff. ou transl. } A \mapsto A', B \mapsto B'] \iff A'B'//AB.}$

   Démonstration $(\Longrightarrow)$: est connu.
   $(\Longleftarrow)$: Le plus simple est de voir qu'il y a une et une seule similitude directe $z' = \alpha.z + \beta$ telle que $A \mapsto A',\ B \mapsto B'$:
   faire le calcul avec ce système de 2 équations à 2 inconnues suivantes $\left\{ \begin{array}{l} \alpha a + \beta = a' \\ \alpha b + \beta = b' \end{array} \right.$ et trouver : $\alpha = \frac{b' - a'}{b - a} \neq 0$.
   Cette similitude est : une translation ou une homothétie (ensemble noté $\mathcal{H}$-$\mathcal{T}$) $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}^*$ (facile).
   Et c'est justement notre hypothèse !

2. Exercice : Médianes concourantes avec les homothéties.
   Soit A', B', C' milieux de BC, CA, AB ; G intersectionde AA' et BB'. Par le théorème de Thalès, on sait que $\overrightarrow{A'B'} = -1/2.\overrightarrow{AB}$; soit donc $h_{G,-1/2}$ l'homothétie : $h(A) = A', h(B) = B'$.
   Montrons que $h(C) = C'$; on ne le sait pas ici !
   Notons $h(C) = C^*$; alors $\overrightarrow{A'C^*} = -1/2.\overrightarrow{AC}$; ceci entraine aisément $C' = C^*$ et termine.

17.2 Ecriture vectorielle et matricielle de systèmes linéaires

17.2.1 Systèmes 2x2

Le système suivant s'écrit sous forme vectorielle : $\begin{cases} a.x + b.y = c \\ a'.x + b'.y = c' \end{cases}$ ou $x.\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

$\boxed{x.\overrightarrow{u} + y.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \quad \textbf{dans le plan vectoriel} \quad \Pi = \mathbb{R}^2.}$

Et sous forme matricielle, ce produit s'effectuant Lignes par Colonnes $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x + b.y \\ a'.x + b'.y \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ **ou** $\boxed{A.X = B.}$

17.2.2 Cas d'un système de Cramer (rappel)

(Sol. unique) $\Leftrightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}_{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}^{\overrightarrow{\imath}}{}_{\overrightarrow{\jmath}} = \boxed{\textbf{Aire.parallélogramme.OACBO.}}$

17.3 Ecriture vectorielle et matricielle de transformations usuelles

17.3.1 Des exemples

1. Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$: $M \longmapsto M'$ avec $\underline{\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}}$ ou $\underline{\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}}$; dans le plan affine $\mathcal{P}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ou : Translation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

2. Homothétie affine de centre $I\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}.}$ Avec la relation de Châsles **ceci implique :** (non équivalence !) $\underline{\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{cte}}$ **avec** $\underline{\overrightarrow{cte} = \overrightarrow{OO'}}$! (**faire** $M = O$).

   Propriété $\boxed{\text{Inversement } M \mapsto M' : \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{cte},\ k \neq 0 \text{ est une homothétie ou une translation.}}$

   – Démonstration. En effet : Si $k = 1$ une translation (évident et ci-dessus).
   – Si $k \neq 1$: On cherche un point fixe I : $\overrightarrow{OI} = k.\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OO'}$; on en a un (et un seul ici) ! $(\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{1-k}.\overrightarrow{OO'})$ Par différence, on retrouve : $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OI} = k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI})$ ou $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.

   D'où : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Homothétie affine ou Translation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

   Remarque : on a ici **le cas particulier des symétries points :** $k = -1$.

---

3. Autre démonstration du Théorème pour composée d'homothéties-translations valable même dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$:
   . Une caractérisation (pourquoi les met-on ensemble) ? On a :

   $\boxed{(f \text{ homothétie affine ou translation}) \Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN},\ \forall M, N \Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM},\ \forall M; A \text{ fixé.}}$

   Démonstration.
   (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) faciles, $k = 1$ si translation, $k =$ rapport d'homothétie sinon.
   Voyons (3) $\Rightarrow$ (1) : Si $k = 1$, arriver à $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{cte}$ (Châsles).
   Si $k \neq 1$, on cherche un éventuel point fixe I $(I' = I)$, on a l'équation équivalente suivante $\overrightarrow{A'I} = k.\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AI} = k.\overrightarrow{AI}$; ou $(1-k).\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA'}$ qui a une et une seule solution $(k \neq 1)$ en $\overrightarrow{AI}$.
   $\boxed{\text{Et puis : différence}}$ de $\overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'I} = k.\overrightarrow{AI}$, d'où : $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$: fini !
   . Démonstration du théorème facile avec la première équivalence : utiliser tantôt $\Rightarrow$, tantôt $\Leftarrow$.

3. Cas des similitudes affines directes : $\boxed{z' = p.z + q, \quad q = \alpha + i.\beta, \quad \underline{p = r.e^{i.\varphi} \in \mathbb{C}^*}.}$

(les lettres $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ **étant prises,** $z = x + i.y = \rho.e^{i.\theta}$**.)**

• **Rappelons** que ces similitudes affines planes directes sont :

– **si** $p = r.e^{i.\varphi} \neq 1$, des similitudes **à centre :** s'écrivant **aussi** $z' - z_0 = r.e^{i.\varphi}.(z - z_0)$;

– **et si** $p = 1$, **des translations.** Le cas général est donc, pour Similitude affine directe :

$$\boxed{z' = r.e^{i.\varphi}.z + q} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r.\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad r.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$$

• **Cas** $r = 1$ **: déplacements.** Rotations affines si $e^{i.\varphi} \neq 1$ $\boxed{\text{ou bien}}$ Translations.

$$z' = e^{i.\varphi}.z + q \quad \text{ou} \quad \text{Translation ou rotation affine} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

4. **Et la symétrie orthogonale (connue) par rapport à la droite :** $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}(cos(\varphi), sin(\varphi)\right)$?

$$\boxed{z' = e^{2.i.\varphi}.\overline{z}} \quad x' + i.y' = (cos(2\varphi) + i.sin(2\varphi)).(x - i.y) : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(2.\varphi) & sin(2.\varphi) \\ sin(2.\varphi) & -cos(2.\varphi) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

17.3.2 Résumé (préparation aux applications linéaires, ch.20)

1. Ainsi : Une application f de la forme : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est

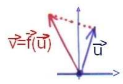
   dite **"affine" ; matriciellement :** $Y = A.X + B$. Voir que $B = \overrightarrow{OO'}$.

2. $\boxed{\text{Et}}$: L'application $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est "l'application linéaire associée"

   qui, elle, $\boxed{\textbf{s'applique à un vecteur ; matriciellement : } \underline{Y = A.X}}$ **Exemple :**

   $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}(z) \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$, $z' = (1 + i).z$, similitude **vectorielle** d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ de rapport $\sqrt{2}$.

   Dessin de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ **quelconque et de** $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ **:**



   Propriétés des **Applications Linéaires** $\boxed{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}_1) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}_2); \quad \overrightarrow{f}(\lambda.\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})}$

   Car **avec les matrices :** $A.(X_1 + X_2) = A.X_1 + A.X_2$; $A.(\lambda.X) = \lambda.(A.X)$.

3. **Lien** Application affine f, Application Linéaire $\overrightarrow{f}$:

   Avec l'écriture $Y = A.X + B$, on a pour les points $\boxed{\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).}$

   Deux exemples : ($\overrightarrow{f} = Id$, $\overrightarrow{f} = 2.Id$ serait mieux ?)

   . L'Application Linéaire associée à une Translation est **l'Identité** $Id : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x}$. de matrice

   $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déjà vu avec $\boxed{\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'}.}$ Car $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.

   . L'Appl. Lin. associée à une Homothétie affine est une Hom. **vectorielle** $k.Id : \overrightarrow{x} \mapsto k.\overrightarrow{x}$

   $(k \neq 0,\ 1)$ de matrice $k.I_2 = k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Vu avec $\boxed{\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'}.}$

17.4 Des exercices corrigés.

17.4.1 Transformations et barycentres

Enoncé :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, soient les points "pondérés" : $\begin{pmatrix} A & B & M \\ 1 & \beta & k \end{pmatrix}$ et M' leur barycentre. Ici $k \neq 0$.

1. On impose : $1+\beta+k \neq 0$. Justifier que M' existe ; et que $\overrightarrow{AM'} = K.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{cte}$.
2. Si $\beta = -1$, justifier que $M \mapsto M'$ est une translation à préciser. Soit ensuite $\beta = 1,\ k = -1$:
3. Avec $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$ $(*)$ à voir, justifier que l'équation en I : $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}$ a une et une seule solution ; et que $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. Image d'une droite passant par A ?

Corrigé :

1. M' existe car $1+\beta+k \neq 0$ et (origine en A) : $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{1.\overrightarrow{AA} + \beta.\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{AM}}{1+\beta+k} = K.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{cte}$.
2. Puis si $\beta = -1$, $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{k}.\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{cte}$: $M \mapsto M'$ Translation de vecteur $\frac{1}{k}.\overrightarrow{BA}$.

   (Bien comprendre la relation de Chasles : $\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM'}$.)

3. Enfin, si $K \neq 1, 0$, on a déjà vu que $\overrightarrow{AM'} = K.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{cte}$ est une Homothétie affine ; on le refait : Ici, $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$; cherchons I tel que $I' = I$ ou $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$ solution unique. Puis par différence des relations : $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}$, on obtient $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. C'est donc, l'homothétie de centre I, de rapport -1, ou bien : une symétrie-point.

   Enfin, comme $A' = B$, l'image d'une droite passant par A est la droite parallèle passant par B.

17.4.2 Expression matricielle de la symétrie/$y = 1$?

1. On a : $x' = x$, $\dfrac{y+y'}{2} = 1$: Donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Remarque $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non symétrie **car sans point fixe !** ($x' = x+1$.)

17.4.3 Expression matricielle de la rotation affine d'angle $\pi/3$ de centre $I(0,1)$?

Le plus simple est de dire : $\boxed{z' - i = e^{i.\pi/3}.(z-i)}$ ou $z' = e^{i.\pi/3}.z + i - i.e^{i.\pi/3}$.

On trouve (...) : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

17.4.4 Expression matricielle de la proj$_\perp$ affine sur la droite affine $y = x+1$?

1. Solution facile. **Faire un dessin !** $\mathcal{D} : -x+y = 1 \perp \overrightarrow{n}(-1,1)$ donc $\overrightarrow{MM'} = \lambda.\overrightarrow{n}$ s'écrit $x'-x = -\lambda$, $y'-y = \lambda$ (1) ; de plus M' est sur $\mathcal{D}$: $y' = x'+1$ (2). Un petit calcul donne : $y+\lambda = x-\lambda+1$ d'où $\lambda = \dfrac{x-y+1}{2}$; puis x', y' : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

2. (*) Facultatif, vérifions. $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mapsto O'\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$: $O' \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{OO'} \perp \mathcal{D}$. Et l'égalité matricielle s'écrit : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$ ou bien $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$.

   Ici, si $\overrightarrow{U}$ vecteur unitaire de $\mathcal{D}$, on doit avoir $\overrightarrow{O'M'} = (\overrightarrow{OM} \,.\, \overrightarrow{U}).\overrightarrow{U}$ [s'en assurer, **dessin**.]

   D'où, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ non unitaire, $\overrightarrow{U} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$; on doit donc avoir $\boxed{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = (\dfrac{\overrightarrow{OM} \,.\, \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}).\overrightarrow{u}.}$

   Comparons $(\dfrac{\overrightarrow{OM} \,.\, \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}).\overrightarrow{u} = \dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{1^2+1^2}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x+y}{2}\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{et}}$ $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$: idem !

3. (Laissé) : Faire la symétrie orthogonale/$\mathcal{D}$ ... Trouver : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

17.4.5 Quelques calculs avec les matrices (2,2)

On définit le produit matriciel par $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$.

1. Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, vérifier que : $A.I_2 = I_2.A = A$. Puis :
2. Si $B = \begin{pmatrix}1 & a\\0 & -1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, que : $B^2 = I_2$, $C^2 = O$ et $B.C \neq C.B$.
3. Si $D = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$ (diagonale), calculer D^2, D^3, D^n, $n \geqslant 1$ [associativité admise].
4. Si $E = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$, calculer E^2, E^3 ; puis E^{2021} $[E^3 = I_2$ donc $E^{2021} = E^2]$.

17.4.6 (*) Lecture (complément)

1. Le calcul matriciel semble-t-il utile ? Réponse : Le calcul vectoriel est plus concis ; mais non suffisant parfois. Par contre pour le plan, n'oublions pas les **complexes** !

2. L'application est parfois **non** bijective. Comme dans l'exercice **4.4.**
   1ère raison : on ne peut inverser ; **2ème : ou bien ni surjective ; ni injective** :
   Un point hors de $\mathcal{D}$: $y = x + 1$ n'a pas d'antécédant ; un point de $\mathcal{D}$ en a une infinité !

3. $\boxed{\textbf{Pour finir : le programme fera surtout étudier les Applications linéaires (ch 20 s.)}}$

   - On préfèrera les Applications Linéaires de E dans E **d'écriture matricielle** $Y = A_{n,n}.X$ (mais des matrices rectangles ne sont pas exclues ...)
   - Par contre, on considèrera **toutes les projections vectorielles** $E \to E$, **même obliques** ! De même, avec **les symétries vectorielles, même obliques.**

4. Note : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/(x^2+y^2)\\y/(x^2+y^2)\end{pmatrix}$ est non linéaire ou affine (mais plus compliquée) !
   Déjà à cause de x^2 ; de plus : application non définie si $x = y = 0$ (Inversion géométrique, cf. $\mathbb{C}$).

M+ **Exercices: Transformations du Plan (affine euclidien).** **PTSI**

---

1. Composition d' homothéties-translations du plan (On sait que la loi o y est interne).
   (a) Soit h l'homothétie de centre I, de rapport 2, h' de centre J, de rapport $1/2$. Comparer $h'oh$ et hoh' (On sait que chacune est une translation).
   (b) Soit h l'homothétie de centre I, de rapport 2, h' de centre J, de rapport $-1/2$. Comparer $h'oh$ et hoh'. (On sait qu'il s'agit d'une symétrie-point dans chaque cas).
   (c) Si h l'homothétie de centre I, de rapport 2 ; t une translation, a-t-on : $t_{\overrightarrow{u}}oh = hot_{\overrightarrow{u}}$?

2. Barycentres. Préciser $f: M \mapsto M' = Bar\begin{pmatrix} A & B & M \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Et $g: M \mapsto M' = Bar\begin{pmatrix} A & B & M \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Calcul. Avec $z' - i = e^{i.\pi/3}(z - i)$, expression matricielle de la rotation de centre $I\binom{0}{1}$ d'angle $\dfrac{\pi}{3}$?
   Puis expression matricielle de la transformation inverse (réciproque) ?

4. Ecriture matricielle et interprétation géométrique de la transformation $M(z) \mapsto M'(z' = e^{2.i.\varphi}.\overline{z})$?

5. Avec l'image de 2 points faciles, trouver le centre C, de $h = r_{B,\frac{\pi}{2}}\ o\ r_{A,\frac{\pi}{3}}$: on sait que $h = r_{C,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}$.

6. Construction : (Les homothéties supposées de rapport $\neq 1$)
   (a) Si $h_J o h_I = t_{\overrightarrow{u}}$, vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires. Si $h_J o h_I = h_K$ que I, J, K sont alignés.
   (b) (*) Sur la droite (A, B), $A \neq B$, on se donne A' et B' avec $A' \neq B'$. Construire le centre de l'homothétie transformant A en A' et B en B'. (Indication : prendre M hors de la droite !)

7. Hauteurs concourantes : droite d'Euler (H, G, O) ; (*) et cercle d'Euler ou cercle des 9 points.
   (a) Soit h l'homothétie de centre G (intersection connue des médianes) de rapport $-1/2$. Image d'une hauteur ? Déduire que les hauteurs sont concourantes et $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ [$\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$.]
   (b) (*) Soit E tel que $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GE}$. Figure O, G, E, H ? Avec h et $h'_{H,1/2}$ (homothétie), déduire que les 3 milieux de $[A, B]$ ... de $[H, A]$ ... et les 3 pieds des hauteurs sont cocycliques.
   [Prendre $h(\mathcal{C})$ et $h'(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ cercle circonscrit ; et ... le sym. orthogonal de $H/$ côtés est sur $\mathcal{C}$.]

8. (*) Soit I le centre d'une similitude directe plane $A \mapsto A'; B \neq A \mapsto B'$ donnés. Donc $\theta = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$. Que dire de l'angle $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}$? Puis de $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}$? Déduire que I est intersection de 2 cercles connus et qu'enfin I est le point autre que $(A, B) \cap (A'B')$. [Sinon, cercles tangents et résultat encore vrai.]

9. (*) Cercle, angle inscrit et similitude : Soit $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$; s la similitude directe (centre A, $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$). Si $s(M) = M'$, montrer que M, B, M' sont alignés. [Soit $P = MB \cap \mathcal{C}'$; $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'P}(2.\pi)$. D'où $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO} = \alpha = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO'}$; donc $P = M'$.]

10. (*) Théorème de Ménélaüs. Avec une projection sur (B, C) pour $\Longrightarrow$ et Cours pour $\Longleftarrow$, montrer que : $(M \in (B, C), N \in (C, A), P \in (A, B)$ sont alignés$) \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$

11. (*) Théorème de Céva. Avec K baryc. de A, B, C pour $\Longrightarrow$ montrer, si $M \in (B, C)$, $N \in (C, A)$ $P \in (A, B)$: $(AM, BN, CP$ concourantes [en K] ou parallèles$) \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$

Chapitre 18

Systèmes linéaires. Espaces vectoriels

18.1 Systèmes linéaires

18.1.1 Système n x p

1. En plus de système 2x2, on doit résoudre des systèmes 3x3 ou n x p. Exemple :

   Chercher s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = p \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = q \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma = r \end{cases}$. (Réponse parfois oui : $p = q = r = 0$; parfois non : $p = 1,\ q = r = 0$ et $L_1 + L_3 - 2.L_2$)

2. Un système linéaire de n lignes, p colonnes (S) s'écrit : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

   (a_{ij} étant le terme ligne i, colonne j)

18.1.2 Résolution par la méthode du "pivot de Gauss"

1. Opérations élémentaires sur un système linéaire.

   Il y a 3 opérations élémentaires sur les lignes ; après, on obtient un système équivalent ; voici :

   1) Permuter Ligne i et Ligne j ; noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
   2) Remplacer Ligne i par k. Ligne i, $k \neq 0$; noté $L_i \leftarrow k.L_i$;
   3) Enfin remplacer L_i par $L_i + \lambda.L_j$, $j \neq i$; noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$.

   (Voir que 3) aussi est une équivalence : le retour étant $L_i \leftarrow L_i - \lambda.L_j$.)

   Note :
   Les opérations élémentaires sur les colonnes sont aussi permises ; celà modifie juste les inconnues.

2. L'exemple : $\exists\ ?\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = p \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = q \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma = r \end{cases} \Leftrightarrow \exists\ ?\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = p, \\ -3\beta - 6\gamma = q - 2p \\ -6\beta - 12\gamma = r - 3p \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow \exists\ ?\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = p \\ \beta + 2\gamma = \dfrac{2p - q}{3} \\ \text{et enfin} \quad 0 = r - 3p - 2q + 4p \end{cases}$ **La question devient :** A quelles conditions (C.N.S.) α, β, γ existent-ils dans le système **équivalent échelonné final ?**

   Réponse : si et seulement si la dernière ligne est vérifiée (évident) : $p - 2q + r = 0$. Donc :

   – si par exemple $p = 1,\ q = 0,\ r = 0$, le système n'a pas de solution.
   – si $p = r = 1,\ q = 2$, le système a une solution ; même une infinité, **une** lettre arbitraire ; ex : c.

3. Autre exemple : $\begin{cases} x+y-3z=-13 \\ x+y-2z=-8 \\ 2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=-13 \\ z=5 \\ -y+7z=29 \\ y \quad =18 \end{cases}$ avec $L_2-L_1,\ L_3-2L_1,\ L_4-L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=-13 \\ -y+7z=29 \\ z=5 \\ y \quad =18 \end{cases}$ avec $L_2 \leftrightarrow L_3$ (et si on veut $L_4 \leftarrow L_4+L_2$, ... pour avoir un système totalement **échelonné** ; mais on voit déjà qu'il est impossible)

4. Ecritures **vectorielles** et **matricielles** des systèmes linéaires

Dans $E=\mathbb{R}^n$, notons $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{v}_p=\begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \dots \\ a_{np} \end{pmatrix}$; et $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

. Alors le système général (S) s'écrit **vectoriellement** : $\boxed{x_1.\vec{v}_1+x_2.\vec{v}_2+\dots+x_p.\vec{v}_p=\vec{b}.}$

On considèrera (S_0) $\boxed{x_1.\vec{v}_1+x_2.\vec{v}_2+\dots+x_p.\vec{v}_p=\vec{0}_{\mathbb{R}^n}.}$ (aussi appelé système ou équation (vectorielle) sans second membre "ESSM" associée (parfois "système homogène associé").

. On a aussi une écriture **matricielle** $\boxed{A.X=B}$ (ci-dessous) et la **"matrice augmentée"** :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\dots & a_{1j}\dots & a_{1p} \\ \dots & & \\ \dots & & \\ a_{n1}\dots & a_{nj}\dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ y_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad \underline{\text{Ex}} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & |-13 \\ 1 & 1 & -2 & |-8 \\ 2 & 1 & 1 & |\ 3 \\ 1 & 2 & -3 & |\ 5 \end{pmatrix}.$$

18.2 Espaces vectoriels

18.2.1 Définition

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}$-e.v.) si E est muni **de deux** lois : $+$ et $\centerdot$

$+$ interne : $\vec{u},\vec{v}\in E \Longrightarrow \vec{u}+\vec{v}\in E$ et $\centerdot$ externe : $\lambda\in\mathbb{K}, \vec{u}\in E \Longrightarrow \lambda.\vec{u}\in E$

telles que : 1) $(E,+)$ soit un groupe abélien [5 axiomes avec loi interne : ci-après.]

avec également : 2) $\lambda\centerdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\centerdot\vec{u}+\lambda\centerdot\vec{v}$; $(\lambda+\mu)\centerdot\vec{u}=\lambda\centerdot\vec{u}+\lambda\centerdot\vec{v}$;
$(\lambda.\mu)\centerdot\vec{u}=\lambda\centerdot[\mu\centerdot\vec{u}]$ et $1\centerdot\vec{u}=\vec{u}$. [donc 5 autres avec loi externe.]

Remarques 1) Les éléments de E sont appelés "vecteurs" ; et ceux de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ appelés scalaires.

2) **Groupe abélien ou groupe commutatif** signifie $+$ est interne **et 3 axiomes ; et comm. :** Associative ; avec Neutre (forcément unique $\vec{0}+\vec{0}'=\vec{0}'=\vec{0}$ car $\vec{0}$ et $\vec{0}'$ neutres) ; tout élément $\vec{u}$ a un Symétrique (forcément unique $\vec{u}'+\vec{u}+\vec{u}"=\vec{u}"=\vec{u}'$) noté $-\vec{u}$; enfin Commutative.

Montrer qu'on peut simplifier : $\vec{u}+\vec{x}=\vec{u}+\vec{y}\Rightarrow\vec{x}=\vec{y}$ (en ajoutant $-\vec{u}$ à gauche, etc.)

3) Dans $(\lambda.\mu)\centerdot\vec{u}$ le 1er . est la multiplication dans $\mathbb{K}$; le 2ème $\centerdot$ est l'opération externe.

18.2.2 Propriétés

On a : $\boxed{\lambda.\vec{u}=\vec{0}\Longleftrightarrow(\lambda=0 \text{ ou } \vec{u}=\vec{0}) \quad \textbf{et} \quad (-\lambda).\vec{u}=\lambda.(-\vec{u})=-(\lambda.\vec{u}).}$

Démonstration 1) $0.\vec{u}=\vec{0}$ car $(0+\lambda).\vec{u}=\lambda.\vec{u}$ ou $0.\vec{u}+\lambda.\vec{u}=\vec{0}+\lambda.\vec{u}$ et on peut simplifier.
$\lambda.\vec{0}=\vec{0}$ car $\lambda.(\vec{0}+\vec{u})=\lambda.\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\vec{0}$; etc. de même.

Inversement Si $\lambda.\vec{u}=\vec{0}$ avec $\lambda\neq 0$, λ est inversible ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\frac{1}{\lambda}.(\lambda.\vec{u})=\frac{1}{\lambda}.\vec{0}$ ou $(\frac{1}{\lambda}.\lambda).\vec{u}=\vec{0}$ ou $1.\vec{u}=\vec{0}$ ou enfin $\vec{u}=\vec{0}$. [Divers axiomes utilisés.]

2) $[-\lambda+\lambda].\vec{u}=0.\vec{u}=\vec{0}$, donc ... $(-\lambda).\vec{u}=-(\lambda.\vec{u})$; et l'autre analogue.

18.2.3 Exemples

1. $E = \mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les deux opérations :
$$\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda.\vec{u} : \lambda.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda.x_1\\\lambda.y_1\end{pmatrix}$$
De même $E = \mathbb{R}^3$ e.v. sur $\mathbb{R}$ $\boxed{E = \mathbb{R}^n \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel, } n \geqslant 1, \text{ surtout } n = 2, n = 3.}$
Remarque :
Pour $n = 1$, $E = \mathbb{R}$ est un e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (On ne met pas de flèche sur les éléments de E : $\lambda.x$)

2. $\boxed{E = \{\vec{0}\} \text{ est un e.v. sur } \mathbb{R}.}$ C'est le plus petit car tout e.v. contient $\vec{0}$, neutre pour $+$.

3. $\boxed{E = \mathbb{C} \text{ est un e.v. sur } \mathbb{K} = \mathbb{R}.}$ Opérations : $\begin{cases} z_1 + z_2 \text{ (interne)} \\ \lambda.z,\ \underline{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ (externe)} \end{cases}$

4. $\boxed{E = \mathbb{C} \text{ est un e.v. sur } \mathbb{K} = \mathbb{C}.}$ Opérations : $\begin{cases} z_1 + z_2 \text{ (interne)} \\ \lambda.z,\ \underline{\lambda \in \mathbb{C}} \text{ (externe)} \end{cases}$
Nous verrons que $E = \mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2 ; par contre un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension 1.

5. $\boxed{\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \text{ où } I = [0, 1] \text{ par exemple, est un } \mathbb{R} \text{ e.v.}}$ Bien retenir les exemples 1 et 5.
$\vec{u} + \vec{v}$ correspond à $f + g$ ($sin + exp$ par exemple) $\lambda.\vec{u}$ correspond à $\lambda.f$
Dans ce style
$\mathbb{R}$[x] est un $\mathbb{R}$ e.v. (addition $P + Q$; loi externe $\lambda.P$) : **e.v. des polynômes à coeff. réels**
$\mathbb{C}$[x] est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; et aussi un e.v. sur $\mathbb{C}$.
De même $\mathbb{R}$(x) est un $\mathbb{R}$ e.v. : **e.v. des fractions rationnelles à coeff. réels**

6. $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ ensemble des suites à termes complexes est un } \mathbb{C} \text{ e.v.}}$
Loi interne $\vec{u} + \vec{v}$: addition de suites $(u_n) + (v_n)$ ($\vec{0}$ **est ici la suite nulle !**)
Loi externe $\lambda.\vec{u}$: $\lambda.(u_n)$ (utile au ch. suivant avec $\lambda \in \mathbb{C}$).

18.2.4 Combinaisons linéaires

1. Définition

Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs où I est ici un ensemble d'indices. Une combinaison linéaire des $(\vec{u}_i)$ est un vecteur (ou bien un élément de l'espace vectoriel) s'écrivant $\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_p \vec{u}_p$ pour un nombre fini de coefficients non nuls.

2. Exemples
   - Dans $E = \mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$-e.v.), tout complexe est combinaison linéaire de 1 et i :
   $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists x,\ y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x.1 + y.i$.
   - Dans $E = \mathbb{R}$[x] espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une combinaison linéaire de $(\mathrm{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un polynôme ;
   [Tandis que $1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2+$ ... sans s'arrêter n'est pas un polynôme : on dit une série.]

   Comme la famille $(\mathrm{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'obtenir tout $\mathbb{R}$[x], par combinaisons linéaires, on dit qu'elle est "génératrice" ; on s'intéressera aux familles génératrices les plus petites possibles.

3. Résumé : les "combinaisons linéaires " combinent les 2 opérations de l'e.v. ; elles sont essentielles.

18.3 Sous espaces vectoriels

18.3.1 Définition

Soit E un e.v. sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\underline{E_1 \subset E}$. E_1 est un sous e.v. de E si :
1) $+$ est interne dans E_1 2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \vec{u} \in E_1 : \lambda.\vec{u} \in E_1$ 3) E_1 lui-même espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

. **Remarquons que** $\{\overrightarrow{0}\}$ **et** E **sont deux sous espaces de** E.

. **Un sous e.v. est jamais vide : contient au moins le neutre** $\overrightarrow{0}$ **de** E **!** (**car** $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$)

18.3.2 Caractérisations pour $E_1 \subset E$

$$E_1 \text{ sous e.v. de } E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 \neq \emptyset \quad \textbf{[contient } \overrightarrow{0}\textbf{.]} \\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E_1 \Longrightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_1 \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \overrightarrow{u} \in E_1 : \ \lambda.\overrightarrow{u} \in E_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 \neq \emptyset \quad \textbf{[en pratique contient } \overrightarrow{0}\textbf{.]} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E_1 : \ \lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_1. \end{array} \right.$$

Démonstration de la première équivalence. $\Longrightarrow$ est clair.

$\Longleftarrow$: Déjà $(E_1,+)$ sous-groupe abélien : par ex. l'associativité est vraie dans E_1 car vraie dans E ! etc.
Puis, par exemple, l'égalité : $\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$ est vraie dans E_1 car vraie dans E ! ...

Utilisations 1) Montrons que $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On va montrer que c'est un sous espace d'un espace connu ; ici de $E = \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, avec la première :
La fonction nulle est C^∞ ; puis si f, g sont C^∞, $f+g$ aussi ; enfin $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.f$ est aussi C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.

2) Soit E_1 et E_2 deux sous espaces de E ; montrons que $E_1 \cap E_2$ est un sous espace.

Avec la deuxième cette fois : $\overrightarrow{0} \in E_1 \cap E_2$ (dans chacun car sous espaces) ; donc $E_1 \cap E_2$ non vide ;
puis si $\lambda \in \mathbb{K}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E_1 \cap E_2, \lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_1 \, ; \in E_2$; (car sous espaces encore ; donc :) $\in E_1 \cap E_2$.

Remarque Plus généralement si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous espaces, $\cap E_i$ est un sous espace.

18.3.3 Exemples de sous espaces vectoriels

1. Dans $\mathbb{R}^n$ e.v. sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}, \{\lambda.\overrightarrow{u}, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ est un sous e.v. appelé droite vectorielle.}}$
   - Preuve avec une caractérisation.
   - En fait cet exemple a lieu dans tout espace E (sur $\mathbb{R}$) où on peut trouver $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
   - Dessin : Un point O symbolise le vecteur $\overrightarrow{0}$; alors $\mathbb{R}.\overrightarrow{u}$ est représenté par une droite de vecteurs.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ e.v. sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\Pi = \left\{ \overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2.x - 3.y + z = 0 \right\} \text{ est un sous e.v. dit : plan vectoriel.}}$

   Remarques
   - Par caractérisation : si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vérifient l'équation, $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ aussi.
   - Un sous e.v. contient toujours $\{\overrightarrow{0}\}$ donc (...) : $2x - 3y + z = 4$ NON sous e.v. de $E = \mathbb{R}^3$;
   mais un plan **affine** de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, espace affine !

3. Théorème :

   > Dans E e.v. sur $\mathbb{R}$, soit $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ une famille (non vide) de vecteurs ; alors
   > L'ensemble des combinaisons linéaires des $(\overrightarrow{u}_i)$ est un sous e.v. de E ;
   > c'est le plus petit sous espace (pour $\subset$) contenant les $(\overrightarrow{u}_i)$.
   > On l'appelle **: sous e.v. engendré par les** $(\overrightarrow{u}_i)$ **; on le note : Vect**$(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$.

   Démonstration [en 1ère lecture, supposer que la famille a 3 vecteurs.]

   1) On a $\overrightarrow{0} = 0.\overrightarrow{u}_1$; donc $\overrightarrow{0}$ est combinaison linéaire des $\overrightarrow{u}_i$ (donc ensemble non vide) !
   Puis si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ sont comb.lin. des $\overrightarrow{u}_i$, $\lambda.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ aussi (idem) ! Ainsi, l'ensemble des combinaisons linéaires, noté ici V, est un sous espace de E par une caractérisation ; et il contient les $\overrightarrow{u}_i$.

   2) Inversement, tout sous e.v. contenant les $\overrightarrow{u}_i$, doit contenir (cf. déf.) chaque combinaison linéaire des u_i ; donc doit contenir V. Donc c'est facile mais très important !

   Exemple : droite vectorielle avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. On la notera maintenant : $Vect(\overrightarrow{u}) = \{\lambda.\overrightarrow{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

18.4 Exemples traités

18.4.1 1er exemple : dans $\mathbb{R}^3$

1. Enoncé

   Dans $\mathbb{R}^3$ e.v. sur $\mathbb{R}$, montrer que le sous e.v. engendré par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$
   $Vect(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = V$ est un plan vectoriel dont on donnera une équation cartésienne.

   V est l'ensemble des combinaisons linéaires ou des vecteurs s'écrivant $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
   On a mis α,β,γ (au lieu de λ,μ,ν moins simple) ; mais x,y,z n'était pas ici une bonne notation :

2. Résolution Notons : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ [$\overrightarrow{x}$ si l'on veut] un vecteur général de V. **On a** $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V \Longleftrightarrow$ ...

   ... $\exists\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \exists\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \begin{cases}\alpha+4\beta+7\gamma=x\\2\alpha+5\beta+8\gamma=y\\3\alpha+6\beta+9\gamma=z\end{cases}$.

   Attention

   Ici, ce sont α,β,γ **les inconnues, dont on ne veut que l'existence** ! Aussi :
   on met α, β, γ à gauche. x, y, z jouent le rôle de paramètres décrivant le sous e.v. V, en entier.

   Donc : $\overrightarrow{x}\in V \Longleftrightarrow \exists\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ \alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v}+\gamma.\overrightarrow{w}=\overrightarrow{x} \Longleftrightarrow$ ...

   $$\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\begin{cases}\alpha+4\beta+7\gamma=x,\\-3\beta-6\gamma=y-2x\\-6\beta-12\gamma=z-3x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\begin{cases}\alpha+4\beta+7\gamma=x,\\\text{et}\quad\beta+2\gamma=\dfrac{2x-y}{3}\\\text{et pour finir}\quad 0=z-3x-2y+4x\end{cases}$$

   La question est alors : A quelles conditions (C.N.S.) α,β,γ existent-ils pour que le système équivalent final soit satisfait ? Si et seulement si la dernière ligne est vérifiée (évident). Donc

   $$V=\left\{\overrightarrow{x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x-2y+z=0\right\}:\quad\boxed{x-2y+z=0\ \text{ est une équation cartésienne cherchée.}}$$

3. **Remarques** . On peut vérifier que $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ satisfont à l'équation de V !
   . Enfin, en sens inverse, ayant une équation de V, comment en trouver un système générateur ?
   Voici à partir de : $x-2y+z=0$:

   On a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x=x\\y=y\\z=-x+2y\end{pmatrix}$ ["3 lettres, 1 équation ; $\boxed{\text{donc 2 degrés}}$ de liberté"] D'où :

   $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$. $V=Vect(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$: autre système générateur.

18.4.2 2ème exemple : dans $\mathbb{R}[x]$ e.v. sur $\mathbb{R}$

Déjà, on voit que : $\mathbb{R}[x]=Vect(1,x,x^2,...,x^k,...)$ les ... signifiant $k\in\mathbb{N}$ (on ne s'arrête pas)

et on note : $\boxed{Vect(1,x,x^2,...,x^n)=\mathbb{R}_n[x]}$ le sous e.v. des polynômes de degré $\boxed{\textbf{au plus}}$ n.

$\boxed{\text{Attention}}$. $d^0(O)=-\infty$. Et **les polynômes de degré 0 sont les constantes non nulles** !
. L'ensemble des polynômes **de degré exactement 2 : non sous e.v.** : ne contient pas O ; etc.
. De même, **le complémentaire d'un sous e.v. est jamais un sous e.v. :** ne contient pas $\overrightarrow{0}$.

18.5 Somme de sous espaces vectoriels

1. Rappel à bien revoir : **L'intersection de 2 sous e.v. est un sous e.v.** (donc jamais vide).

2. Mais **la réunion de 2 sous e.v. n'est pas (en général) un sous e.v.** : Dans $\mathbb{R}^2$ si $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; alors : $\mathbb{R}.\overrightarrow{i}\cup\mathbb{R}.\overrightarrow{j}$ (ou $Vect(\overrightarrow{i})\cup Vect(\overrightarrow{j})$) **non** sous e.v. car $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\notin Vect(\overrightarrow{i})$; $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\notin Vect(\overrightarrow{j})$; d'où $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\notin Vect(\overrightarrow{i})\cup Vect(\overrightarrow{j})$. Dessin ? On va remédier à ce défaut.

18.5.1 Somme de 2 sous e.v.

1. Définition

   On appelle somme de 2 sous e.v. E_1, E_2, de E : $E_1+E_2=\{\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_i\in E_i\}$
   Alors : E_1+E_2 est un sous e.v. de E ; c'est le plus petit contenant E_1 et E_2.
   [On aurait donc pu le noter $Vect(E_1\cup E_2)$]

   Démonstration
   E_1+E_2 sous e.v. facile avec une caractérisation ; contient E_1 (choisir $\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{0}$) et E_2. Inversement Tout sous e.v. contenant E_1 et E_2 doit contenir E_1+E_2 (clair si on a assimilé les définitions).

2. Exemple dans $E=\mathbb{R}^3$
   Soit $E_1=Vect(\overrightarrow{u})=\mathbb{R}.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $E_2=Vect(\overrightarrow{v})=\mathbb{R}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ non colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
   Ici $E_1+E_2=Vect(\overrightarrow{u})+Vect(\overrightarrow{v})=Vect(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\{\lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{v}\}=\Pi\neq\mathbb{R}^3$. Dessin ?

3. En général, il y a 2 cas : $\begin{cases}\text{soit } E_1+E_2\subsetneq E & \text{(comme dans l'exemple)}\\ \text{soit } E_1+E_2=E & \text{(ce que l'on souhaite)}\end{cases}$

   Définition

   L'égalité $E=E_1+E_2$ signifie exactement $E\subset E_1+E_2$ (car réciproque évidente), donc que Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E a au moins une écriture ou décomposition du type $\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2$, $\overrightarrow{x}_i\in E_i$
   $\forall\overrightarrow{x}\in E$, $\exists\overrightarrow{x}_1\in E_1, \overrightarrow{x}_2\in E_2$ tels que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2$. On dit que E est somme de E_1 et E_2.

18.5.2 Somme directe

Maintenant on s'intéresse au cas où tout vecteur de E a au plus une écriture sur E_1, E_2.

1. Propriété

   Notons $\overrightarrow{0}$ le vecteur nul de E. Les deux affirmations suivantes sont **équivalentes**
   1) Tout vecteur de E a au plus une écriture sur E_1+E_2
   2) $\overrightarrow{0}$ a une unique écriture sur E_1+E_2, à savoir $\overrightarrow{0}(\in E)=\overrightarrow{0}(\in E_1)+\overrightarrow{0}(\in E_2)$
   Dans ce cas on dit que la somme est directe et on note $E_1\oplus E_2$ au lieu de E_1+E_2.

   Démonstration
   1) $\Longrightarrow$ 2) clair. [Au passage, (2) est l'implication : $\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{0}\Longrightarrow\overrightarrow{x}_1=\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{0}$.]
   2) $\Longrightarrow$ 1) Supposons que : $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{y}_1+\overrightarrow{y}_2$, $\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{y}_i\in E_i$.
   Avec l'hypothèse 2), on doit montrer que $\overrightarrow{x}_i=\overrightarrow{y}_i$.
   On a par différence : $\overrightarrow{0}=(\overrightarrow{x}_1-\overrightarrow{y}_1)+(\overrightarrow{x}_2-\overrightarrow{y}_2)$; donc : $\overrightarrow{x}_i=\overrightarrow{y}_i$.

2. Remarque importante. On a **l'équivalence :** $\boxed{E_1 \text{ et } E_2 \text{ en somme directe} \Longleftrightarrow E_1\cap E_2=\{\overrightarrow{0}\}}$.

   Démonstration
   $\Longrightarrow$ Soit $\overrightarrow{u}\in E_1\cap E_2$; on a $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{u}\in E_1, -\overrightarrow{u}\in E_2$; l'hypothèse fournit : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
   $\Longleftarrow$ Soit $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_1\in E_1$, $\overrightarrow{u}_2\in E_2$. Avec l'hypothèse $E_1\cap E_2=\{\overrightarrow{0}\}$, nous devons voir que $\overrightarrow{u}_1=\overrightarrow{u}_2=\overrightarrow{0}$. Or $\overrightarrow{u}_1=-\overrightarrow{u}_2$, noté $\overrightarrow{t}$ si l'on veut, est à la fois dans E_1 et E_2 donc $\overrightarrow{0}$!

Exemples
- Si $\overrightarrow{u}\subset E_1\cap E_2$, avec $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe !
- Deux droites vectorielles sont : soit confondues, soit en somme directe !

3. $\boxed{\text{Question piège}}$ Peut-on trouver 2 sous espaces $E_1,\ E_2$ avec : $E_1 + E_2 \neq E_1 \oplus E_2$?
   Réponse :
   . Si E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe, la notation $E_1 \oplus E_2$ est interdite : question insensée ;
   . Et si E_1 et E_2 sont en somme directe, la notation $E_1 \oplus E_2$ désigne le même sous espace que $E_1 + E_2$: elle est simplement plus précise. Il y a donc toujours égalité ici.

18.5.3 Sous e.v. supplémentaires

Etant donnés 2 sous e.v. E_1 et E_2, **on souhaite** que :

Tout vecteur $\vec{x}$ de E ait $\left\{ \begin{array}{l} (1)\ \underline{\text{au moins}} \\ (2)\ \underline{\text{et au plus}} \end{array} \right.$ une écriture (ou décomposition) du type $\vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{x}_i \in E_i$

(1) est noté : $E = E_1 + E_2$ (2) est noté : $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$.

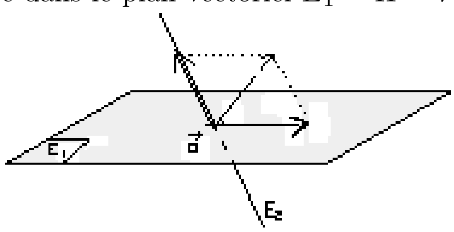
1. Définition

   Quand $E = E_1 + E_2$ **et** $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$ sont vérifiés, on note : $E = E_1 \oplus E_2$.
   On dit que : **les sous e.v. sont supplémentaires,**
   ou que : **E est somme directe de E_1 et E_2,**
   ou que : **E_2 est un supplémentaire de E_1.**

2. Remarques
   Ne pas confondre "supplémentaire" avec complémentaire.
   Le complémentaire d'un sous e.v. est jamais un sous e.v. Pourquoi ? [car ne contient pas $\vec{0}$].

3. Exemples de sous e.v. supplémentaires
   - Aisément $\boxed{E = E \oplus \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\} \oplus E}$ à voir.
   - Dans $E = \mathbb{R}^3$, si $\Pi = Vect(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; où $\vec{\imath} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\Delta = \mathbb{R}.k$ où $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

     alors $\boxed{\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \Delta.}$ C'est l'unique l'écriture : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$.
   - Généralisation du précédent, dans $\mathbb{R}^3$ encore, en prenant 2 vecteurs non colinéaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $E_2 = \Delta = \mathbb{R}.\vec{w}$, $\vec{w}$ non située dans le plan vectoriel $E_1 = \Pi = Vect(\vec{u}, \vec{v})$.



$\boxed{\text{Dessin}}$ $E = \mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ Autre supplémentaire E_2' ?

   - Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ connu.
     Posons $E_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $E_2 = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sous ensembles des applications paires et impaires.
     Alors E_1 et E_2 sont des sous e.v. (facile) ; et on a vu que $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$
     C'est ainsi que : $e^x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = ch(x) + sh(x)$.
   - [Aussi : Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ espace vectoriel sur $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$; alors $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}(\mathbb{R}, i.\mathbb{R})$!
     Ex. : $e^{ix} = cos(x) + i.sin(x)$.]

M+ **Exercices: Systèmes linéaires. Espaces vectoriels** **PTSI**

---

1. Résoudre avec le pivot de Gauss : $\begin{cases} x+y-3z=-13 \\ x+y-2z=-8 \\ 2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=5 \end{cases}$; puis $\begin{cases} 3x+2y+6z+t=1 \\ x+y+2z+0.t=-1 \\ 2x+2y+5z+t=1 \end{cases}$

2. **Définition de E e.v. ? de E_1 sous e.v. ? et rappel des 2 caractérisations de sous e.v.**
   Re-prouver que : $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est un e.v. et que : E_1, E_2 sous e.v. de $E \Rightarrow E_1 \cap E_2$ aussi.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{a}$, puis $\overrightarrow{b}$, sont-ils combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ où :
   $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$? Conclusion sur $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?

4. (a) Dans $\mathbb{R}^3$ donner une équation cartésienne de $\Pi = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$. Puis un supplémentaire.
   (b) En sens inverse, partant d'une équation de Π $[x-2y+z=0]$ choisissant les lettres x, z arbitraires, donner une autre famille génératrice naturelle à 2 vecteurs. Donner une 3ème famille génératrice à 3 vecteurs ; une 4ème avec une infinité de vecteurs. Laquelle est intéressante ?

5. (a) Montrer que $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $I=[0,1]$ [ou plus généralement un intervalle de longueur $\neq 0$ de $\mathbb{R}$] comme sous e.v. d'un espace connu.
   (b) Citer un sous e.v. strictement inclus dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et contenant strictement le sous-e.v. des applications polynômiales identifié à $\mathbb{R}[x]$. Que dire de $Vect(1, x, x^2)$?

6. (a) Indiquer un espace vectoriel contenant les fonctions $cos(px)$, $sin(qx)$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $sin^3(x)$ s'écrit en combinaison linéaire de $sin(qx)$, $q=1,2,3$. $\boxed{\text{Vérifier}}$ **(plus tard, ch.30)** avec les développements limités en $x=0$ effectués à l'ordre 3.
   (b) **(Hors progr.)** Idem avec $ch^2(x)$ en combinaison linéaire de $ch(px)$, $p=0,1,2$. $\boxed{\text{Vérifier}}$ avec des équivalents en $+\infty$ et, plus tard, avec les développements limités en 0 à l'ordre 2.

7. Soient E_i des sous e.v. d'un e.v. E. Montrer que :
   (a) $(E_1 \cap E_2)+(E_1 \cap E_3) \subset E_1 \cap (E_2+E_3)$. Cas d'inclusion stricte ? Si $E_2 \subset E_1$ montrer l'égalité.
   (b) $E_1 + (E_2 \cap E_3) \subset (E_1+E_2) \cap (E_1+E_3)$. Idem et égalité si $E_1 \subset E_2$.
   (c) $(E_2 \subset E_3\ ;\ E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3\ ;\ E_1+E_2 = E_1+E_3) \Longrightarrow E_2 = E_3$.
   (d) $(E_1 \subset E_3;\ E_2 \subset E_4;\ E_3 \cap E_4 = \{\overrightarrow{0}\};\ E_1+E_2 = E_3+E_4) \Longrightarrow (E_1 = E_3,\ E_2 = E_4)$.
   (e) Enfin : $(E_1 \cap E_2)+(E_1 \cap E_3) = E_1 \cap\ [E_2 + (E_1 \cap E_3)]$.

8. (a) Montrer sur un exemple que la réunion de 2 sous e.v. n'est pas, en général, un sous e.v. (ceci est traité dans le cours).
   (b) Si E_1 et E_2 sont des sous e.v. de E, montrer : $(E_1 \cup E_2$ sous e.v.$) \Leftrightarrow$ l'un inclus dans l'autre.

Chapitre 19

Espaces vectoriels de dimension finie

19.1 Bases

19.1.1 Famille génératrice

Définition

La famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ est dite génératrice [sous entendu de **tout** l'espace] si elle engendre donc tout l'espace, ou bien si : $Vect(\overrightarrow{u}_i) = E$ ou encore si : Tout vecteur de E a au moins une écriture en combinaison linéaire des $\overrightarrow{u}_i$.

Exemples

1) On convient que $\emptyset$ engendre $E = \{\overrightarrow{0}\}$.

2) Un vecteur non nul suffit [on en prend le moins possible] pour engendrer une droite vectorielle.

3) Dans $E = \mathbb{C}$, e.v. sur $\mathbb{R}$, la famille $(1, i)$ est génératrice.

4) Dans $\mathbb{R}^3$, e.v. sur $\mathbb{R}$, la famille $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}$ est génératrice.

5) Dans $\mathbb{R}$[x], e.v. des polynômes, la famille infinie (1,x,x^2, ...) est génératrice.

(Attention : il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non nuls dans une combinaison linéaire).

6) Dans $\mathbb{R}_2$[x]=Vect(1,x,x^2) sous e.v. des polynômes de degré au plus 2, 1,x,x^2 est une partie (famille est plus général car permet les répétitions) génératrice. [Exercice : (1,x−1,(x−1)^2) en est une autre]

19.1.2 Famille libre

Définition

La famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ est dite libre si on a **l'implication :**
$\lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p.\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0.$ Ce qui est : dès que $\overrightarrow{0}$ a une écriture en combinaison linéaire des $\overrightarrow{u}_i$, c'est l'écriture banale : $\overrightarrow{0} = 0.\overrightarrow{u}_1 + 0.\overrightarrow{u}_2 + ... + 0.\overrightarrow{u}_p$.

Propriété

On a équivalence entre :
1) $\overrightarrow{0}$ admet seulement l'écriture banale précédente sur les $\overrightarrow{u}_i$ c'est-à-dire : famille libre
2) et Tout vecteur de E a au plus une écriture en combinaison linéaire des $\overrightarrow{u}_i$.

Démonstration

2) $\Longrightarrow$1) est un cas particulier car $\overrightarrow{0}$ admet toujours l'écriture banale signalée.

1) $\Longrightarrow$2) : Tout est là ! Soit donc $\overrightarrow{x} = \lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p.\overrightarrow{u}_p = \mu_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \mu_q.\overrightarrow{u}_q$.
Quitte à rajouter des termes nuls, on a : $\overrightarrow{x} = \lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_r.\overrightarrow{u}_r = \mu_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \mu_r.\overrightarrow{u}_r$.
Par différence : $\overrightarrow{0} = (\lambda_1 - \mu_1).\overrightarrow{u}_1 + ... + (\lambda_r - \mu_r).\overrightarrow{u}_r$; et aussi $\overrightarrow{0} = 0.\overrightarrow{u}_1 + 0.\overrightarrow{u}_2 + ... + 0.\overrightarrow{u}_r$.
L'hypothèse donne donc que $\lambda_k - \mu_k = 0, \ \forall k;$ ce que l'on voulait.

Résumé

- On montre qu'une famille est "libre" grâce **au critère technique 1)** qui est la définition.
- Mais 2) donne **le sens** de "famille libre".
- Le contraire de famille génératrice est "famille non génératrice" ! de famille libre est "famille liée".

[Le vocabulaire va être maintenant éclairé : "libre" = sans relation en combinaison linéaire].

Exemples

1) On convient que $\emptyset$ est libre.

2) Pour un vecteur : $\boxed{(\overrightarrow{u}) \text{ libre} \iff \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}.}$ [à bien voir].

3) Pour deux vecteurs : $\boxed{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ libres} \iff \text{non colinéaires.}}$ [cas particulier de l'exemple suivant]

4) Pour $p \geqslant 2$ vecteurs :

$\boxed{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ... \overrightarrow{u}_p \text{ non libres (ou liés)} \iff \text{l'un (au moins) est comb. linéaire des autres (au moins un lien.)}}$

Démonstration

$\Longleftarrow$ Clair : si $\overrightarrow{u}_1 = a_2.\overrightarrow{u}_2 + ... + a_p.\overrightarrow{u}_p$ alors $1.\overrightarrow{u}_1 - a_2.\overrightarrow{u}_2 - ... - a_p.\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$. Terminé.

$\Longrightarrow$ Si on a $(b_1, ...b_p) \neq (0, 0, ..., 0)$ avec $b_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + b_p.\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$, supposons par exemple $b_1 \neq 0$; alors $\overrightarrow{u}_1 = \dfrac{-1}{b_1}(b_2\overrightarrow{u}_2 + ... + b_p.\overrightarrow{u}_p)$. Terminé.

5) Pour une famille infinie : La définition dit que $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ est libre si toute sous-famille finie est libre. Ainsi un cas essentiel est : Dans $\mathbb{R}[\mathrm{x}]$ la famille $(\mathrm{x}^k), k \in \mathbb{N}$ est libre.

19.1.3 Bases

1. Définition

   Une famille $(\overrightarrow{u}_i)$ de vecteurs de E est une base si elle est libre et génératrice. Ce qui veut dire: Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E a une et une seule écriture en combinaison linéaire des $(\overrightarrow{u}_i)$.

2. Exemples

   1) $E = \{\overrightarrow{0}\}$ admet pour base la partie vide : $\emptyset$.

   2) Une droite vectorielle Δ admet pour base n'importe quel vecteur non nul de Δ.

   3) Dans $E = \mathbb{R}^3$, e.v. sur $\mathbb{R}$: $\overrightarrow{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ s'appelle "base canonique". Si $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a $\underline{\overrightarrow{x} = x.\overrightarrow{\imath} + y.\overrightarrow{\jmath} + z.\overrightarrow{k}}$. Idem avec $\mathbb{R}^n$ e.v. sur $\mathbb{R}$.

   4) Dans $E = \mathbb{C}$, e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $(1, i)$ est une base. $(i, 1)$ en est une autre. $(1, j)$ en est une 3ème : exercice. [Mais dans $E = \mathbb{C}$, e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 1 et i sont liés ! $i = i.1$ à lire : $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$]

   5) Dans $\mathbb{R}[\mathrm{x}]$ e.v. sur $\mathbb{R}$, la famille infinie $(1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2, ...)$ est une base. Ecriture du polynôme P sur la famille : $P(\mathrm{x}) = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\mathrm{x}^k$, $n \geqslant d^0(P)$: formule de Mac-Laurin pour les polynômes, ch26.

   . Car $P(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$; $P^{(k)}(x) = k!.a_k + x(polynome)$. $P^{(k)}(0) = k!.a_k$: fini.

   . On généralise avec les $((\mathrm{x}\text{-}a)^k; k \in \mathbb{N})$ autre base : formule de Taylor pour les polynômes ch26.

3. Note **.** Dans $\mathbb{R}^3$, on a une base à 3 vecteurs **.** Dans $\mathbb{R}[x]$, une base avec une infinité de vecteurs

   . Et $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ sont de très gros e.v. sur $\mathbb{R}$ dont on ne connait pas de base et contiennent en particulier les fonctions polynômiales $\mathbb{R}[x]$ et la famille libre $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

19.2 Théorèmes fondamentaux en dimension finie

19.2.1 Théorème de la dimension

Définition | Un espace vectoriel E est dit de "dimension finie" s'il possède une famille génératrice finie |

Théorème

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L}$ une famille libre ; alors $\mathcal{L}$ est finie et $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{G}|$. D'où : Si on a une base à n éléments, toute autre base a n éléments ; ce nombre commun est appelé $dim_{\mathbb{K}} E$

Démonstration

1) $\Rightarrow$ 2) La déduction : Soit $\mathcal{B}$ une base à n éléments et $\mathcal{B}$' une autre base.
Alors $\mathcal{B}'$ (libre) est finie, de cardinal $|\mathcal{B}'| \leqslant |\mathcal{B}|$; puis on permute les rôles !

1) En complément $(*)$ • Par récurrence sur p, on montre le :

Lemme (de l'échange) : Si une famille à p vecteurs génère une famille $\mathcal{F}$ à $p+1$ vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est liée.
. Le cas $p = 0$: cas où $\emptyset$ engendre le vecteur de $\mathcal{F}$; qui est donc $\overrightarrow{0}$. Toute famille contenant $\overrightarrow{0}$ est liée.
. Passage du cas $p-1$ au cas p (les notations étant plus commodes) :
Soit $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, ..., \overrightarrow{g_p})$ qui génère $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_{p+1}$ une famille $\mathcal{F}$ de cardinal $p+1$; montrons que $\mathcal{F}$ est liée.
Dans une écriture des $\overrightarrow{u}_k$ en combinaison linéaire des $\overrightarrow{g_j}$, supposons un coefficient sur $\overrightarrow{g_1}$ non nul.
(Si tous les coefficients sont nuls, $(\overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}, ..., \overrightarrow{g_p})$ génère tous les $\overrightarrow{u}_k$; l'hypothèse de récurrence donne $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_p$ liée ; donc $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_{p+1}$ liée car une sur-famille d'une famille liée est liée : exercice).
Supposons donc $\overrightarrow{u}_{p+1} = \beta_1.\overrightarrow{g_1} + \beta_2.\overrightarrow{g_2} + ... + \beta_p.\overrightarrow{g_p}$, $\beta_1 \neq 0$; alors, par opérations élémentaites, on arrive à : $\overrightarrow{u}_1 - \lambda_1 \overrightarrow{u}_{p+1}, ..., \overrightarrow{u}_p - \lambda_p \overrightarrow{u}_{p+1}$ générés par $(\overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}, ..., \overrightarrow{g_p})$; donc liés par hypothèse de récurrence.
$\exists\ \mu_1,\ ...,\ \mu_p$ non tous nuls : $\mu_1.(\overrightarrow{u}_1 - \lambda_1 \overrightarrow{u}_{p+1}) + ... + \mu_p.(\overrightarrow{u}_p - \lambda_p \overrightarrow{u}_{p+1}) = \overrightarrow{0}$.
Si $\mu_1 \neq 0$ (par exemple), $\overrightarrow{u}_1$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}_2, ... \overrightarrow{u}_{p+1}$; ce qui termine le lemme.

• Puis de toute famille de cardinal $\geqslant |\mathcal{G}| + 1$, on choisit une sous famille à $|\mathcal{G}| + 1$ vecteurs, liée grâce au lemme. On finit avec la propriété facile : toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Exemples [Bien savoir les encadrés]

1) $\{\overrightarrow{0}\}$ est de dimension 0.

2) Définitions : une droite vectorielle est un e.v. de dimension 1 ; un plan vectoriel de dimension 2.

3) $\boxed{E = \mathbb{R}^n \text{ est un e.v. sur } \mathbb{R} \text{ de dimension } n.}$ Par exemple $E = \mathbb{R}^3$.

4) $\boxed{E = \mathbb{R}[x] \text{ est un } \mathbb{R}\text{-e.v. de dimension infinie, de base } (1, x, x^2, ...).}$

5) $\boxed{E = Vect(1, x, ...x^n) \text{ noté } \mathbb{R}_n[x] \text{ est un e.v. de dimension finie : } n+1.}$

19.2.2 Théorème de la base incomplète ($\Rightarrow$ existence d'une base "en dim.finie")

On a
1) Si $\mathcal{G}$ est génératrice finie et $\mathcal{L}$ libre (donc $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{G}|$), alors on peut compléter $\mathcal{L}$ par certains vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une base de E.
2) En particulier, avec $\mathcal{L} = \emptyset$: De toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Démonstration

1) $\Longrightarrow$2) est clair (cas particulier).
1) En complément $(*)$.
Soit $(\overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p})$ libre et $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, ..., \overrightarrow{g_q})$ génératrice. Si $\overrightarrow{g_1}$ combinaison linéaire de $(\overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p})$, on passe à $\overrightarrow{g_2}$; sinon, on remplace $(\overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p})$ par $(\overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{g_1})$ libre aussi, aisément. On continue ceci jusqu'à $\overrightarrow{g_q}$.
On obtient une famille libre qui génère chaque $\overrightarrow{g_k}$; donc génératrice de tout l'espace : c'est une base.

Exemple : $E = \mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ e.v. de base $(1, i)$; donc $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2.}$ $(1, j)$ est une autre base...
Par contre $E = \mathbb{C}$ est un e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimension 1 : $\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1.}$

19.3 Conséquences fondamentales

19.3.1 Sur les bases (E de dim. finie, i.e. ayant une famille génératrice finie)

On a : 1) E admet au moins une base et toutes les bases ont même cardinal : $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
2) Toute famille libre a au plus n vecteurs et toute famille libre de n vecteurs est une base.
3) Toute famille gén. a au moins n vecteurs et toute famille gén. de n vecteurs est une base.

Démonstration

– 2) b) Soit $\mathcal{L}$ libre de cardinal $n = dim_{\mathbb{K}} E$. Pour avoir une base, on peut la compléter (Théorème 2) forcément par 0 vecteur vu que toutes les bases ont n vecteurs (Théorème 1).

– 3) b) Soit $\mathcal{G}$ génératrice de $n = dim_{\mathbb{K}} E$ vecteurs ; on peut en extraire une base (Théorème 2) forcément en prenant tous les vecteurs vu que toutes les bases ont n vecteurs (Théorème 1).

19.3.2 Sur les supplémentaires

Soit E de dimension n. Alors : 1) Tout sous e.v. E_1 est de dimension finie p avec : $0 \leqslant p \leqslant n$.
2) E_1 admet au moins un supplémentaire et tout supplémentaire est de dimension : $n-p$.

Démonstration

– 1) Les familles libres de E_1 sont libres de E ; donc ont au plus n vecteurs. Soit p leur nombre maximun de vecteurs et $(\overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p})$ une famille libre de E_1 ; voyons qu'elle est génératrice de $\underline{E_1}$: Si $\overrightarrow{x} \in \underline{E_1}$ on a : $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l_1}, ..., \overrightarrow{l_p})$ est liée (par déf. de p). $\exists \lambda_0, \lambda_1, ... \lambda_p$ non tous nuls : $\lambda_0.\overrightarrow{x} + ... + \lambda_p.\overrightarrow{l_p} = \overrightarrow{0}$.
$\lambda_0 \neq 0$ sinon tous les λ_k nuls ! Alors $\overrightarrow{x} = -\dfrac{1}{\lambda_0}.(\lambda_1.\overrightarrow{l_1} + ... + \lambda_p.\overrightarrow{l_p})$. Fini.

– 2) Complétons la famille libre des $\overrightarrow{l_k}$ par certains vecteurs d'une base $(\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_n})$ de E, de façon à avoir une nouvelle base de E : $(\overrightarrow{l_1}, ...\overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{e}_{p+1}, ...\overrightarrow{e_n})$ par exemple.

Voyons que $E_2 = Vect(\overrightarrow{e}_{p+1}, ...\overrightarrow{e_n})$ est un sous e.v. (évident) supplémentaire de E_1 :

- $E = E_1 + E_2$: comme $(\overrightarrow{l_1}, ...\overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{e}_{p+1}, ...\overrightarrow{e_n})$ est génératrice de $\underline{E}$, tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E a au moins une écriture en comb. lin. de $(\overrightarrow{l_1}, ...\overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{e}_{p+1}, ...\overrightarrow{e_n})$ d'où au moins une écriture $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{x_k} \in E_k$.
- Somme directe : Soit $\overrightarrow{x} \in E_1 \cap E_2$. Alors $\overrightarrow{x} = \lambda_1.\overrightarrow{l_1} + ... + \lambda_p.\overrightarrow{l_p} = \mu_{p+1}.\overrightarrow{e}_{p+1} + ... + \mu_n.\overrightarrow{e_n}$; donc : $\overrightarrow{0} = \lambda_1.\overrightarrow{l_1} + ... + \lambda_p.\overrightarrow{l_p} - \mu_{p+1}.\overrightarrow{e}_{p+1} - ... - \mu_n.\overrightarrow{e_n}$. $(\overrightarrow{l_1}, ...\overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{e}_{p+1}, ...\overrightarrow{e_n})$ libre $\Rightarrow \lambda_k = 0$: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Mais à ce stade, il reste une question : on a trouvé un supplémentaire E_2 de dimension $n-p$.
Un autre supplémentaire E_2' aurait-il la même dimension ? Oui : ceci résulte de la propriété :

Avec $dim(E_1)$ $dim(E_2)$ finies (pas forcément E) on a : $\dim(E_1 + E_2) \leqslant \dim(E_1) + \dim(E_2)$.
Et : Si E_1 et E_2 sont de plus en somme directe, alors : $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Car avec elle : ayant $E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_2'$ $(= E$ ici) et dimensions finies ; on a : $\dim(E_2) = \dim(E_2')$.

Maintenant montrons la propriété :

- En juxtaposant une base $(\overrightarrow{u}_1, ...\overrightarrow{u}_p)$ de E_1 et $(\overrightarrow{v}_1, ...\overrightarrow{v}_q)$ de E_2, on a une famille génératrice de $E_1 + E_2$. Donc $dim(E_1 + E_2) \leqslant p + q$. (Attention : on n'a pas dit ici que $E_1 + E_2$ était égal à E.)
- Dans le cas particulier de la somme directe en juxtaposant une base $(\overrightarrow{u}_1, ...\overrightarrow{u}_p)$ de E_1 et $(\overrightarrow{v}_1, ...\overrightarrow{v}_q)$ de E_2, on a une base de $E_1 \oplus E_2$. "Libres" : si $\lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ...\lambda_p.\overrightarrow{u}_p + \mu_1.\overrightarrow{v}_1 + ... + \mu_q.\overrightarrow{v}_q = \overrightarrow{0}$, alors $\lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ...\lambda_p.\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{t} = -[\mu_1.\overrightarrow{v}_1 + ... + \mu_q.\overrightarrow{v}_q] \in E_1 \cap E_2$. "En somme directe" donne $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$; puis $(\overrightarrow{u}_i)$ libres $(\overrightarrow{v}_j)$ libres donne : tous les coefficients nuls ; les $p+q$ vecteurs forment une base.

Note 2 sous e.v. en **somme directe non supplémentaires ?** 2 droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^3$!

19.3.3 Des remarques

1) Si E_1 est un sous e.v. de E et $\dim(E_1) = \dim(E)$ **finie**, alors $E = E_1$.

Non vrai, en dimension infinie : $E_1 = Vect(1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^4, \mathrm{x}^6, ...) \subsetneq E = \mathbb{R}[\mathrm{x}]$ en est un contre-exemple.

Preuve en dim. finie : Une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 est une partie libre de E de cardinal $\underline{\dim(E_1)=\dim(E)}$ finie, donc une base de E, d'après une "conséquence fondamentale". Donc $E \subset Vect(\mathcal{B}_1) = E_1$.

2) $\boxed{\text{Les sous e.v. de } E = \mathbb{R}^3 \text{ sont selon la dimension}}$ $\{\overrightarrow{0}\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$ en entier. (Et bien sûr : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \oplus \{\overrightarrow{0}\} = \{\overrightarrow{0}\} \oplus \mathbb{R}^3$). [Clair avec 1).]

3) La dernière propriété vue se généralise [on ne le démontre pas. cf Exercices (*)] :

> Dans un e.v. E de dimension quelconque si E_1, E_2 sont des sous e.v. de dim. finie, $E_1 + E_2$ aussi et $\underline{\dim(E_1+E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)}$: Formule de Grassman.

Qui contient : $\underline{\dim(E_1+E_2) \leqslant \dim(E_1) + \dim(E_2)}$ et $\underline{\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)}$.

4) En dim. infinie mais avec une base : $R[x] = Vect(x^n,\ n \in \mathbb{N}) = Vect(x^{2p},\ p \in \mathbb{N}) \oplus Vect(x^{2p+1},\ p \in \mathbb{N})$.

19.4 Utilisation

19.4.1 Exemple dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique

Soit $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x - 2y + z = 0\}$; $V = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x - 2y + z = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{pmatrix}\}$; $W = Vect(\overrightarrow{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{l}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Questions : U sous e.v. ? $dim(U)$? et V ? V et W supplémentaires ? Solution :

1) Au lieu de : "U sous e.v. par caractérisation" écrivons : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 2y - z \\ y\ arb \\ z\ arb \\ t\ arb \end{pmatrix} = y.\overrightarrow{\alpha} + z.\overrightarrow{\beta} + t.\overrightarrow{l}$

(notations claires) donc $\underline{U = Vect(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{l})}$ sous e.v. $\boxed{\text{et}}$ on a (aussi) une famille gén. à 3 vecteurs ! Puis $y.\overrightarrow{\alpha} + z.\overrightarrow{\beta} + t.\overrightarrow{l} = \overrightarrow{0} \Rightarrow 2y - z = 0, y = 0, z = 0, t = 0$: libre ; donc base de U ; $\underline{dim(U) = 3}$.

2) De manière analogue, avec les éq. L_1, $L_2 - L_1$ (pivot de Gauss), trouver :
... $V = Vect(\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{l})$ sous e.v. et ces 2 vecteurs $(\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{l})$ non colinéaires : donc $\underline{dim(V) = 2}$.

3) Enfin, si $\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{\beta} + b.(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{l}) = c.\overrightarrow{k} + d.\overrightarrow{l}$ $\underline{\in V \cap W}$, on résout $a.\overrightarrow{\beta} + b.(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{l}) - c.\overrightarrow{k} - d.\overrightarrow{l} = \overrightarrow{0}$
... et on trouve : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Donc on a $V \oplus W$; ce sous espace est de dim. 2+2. Forcément $\underline{V \oplus W = \mathbb{R}^4}$.

19.4.2 Démonstration du Th. sur les suites : $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n,\ a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*\ (R_0)$

En complément, avec le langage des espaces vectoriels. En 4 étapes :

1) On sait (ou on voit) que $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, ensemble des suites à termes complexes, est un $\mathbb{C}$ e.v. On vérifie aisément que E_1 ensemble des suites à termes complexes vérifiant (R_0) est un sous e. v. de E.

2) De dimension 2 (en exhibant une base) : Soit (α_n) vérifiant R_0 de conditions initiales $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$; (β_n) de conditions initiales $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$. Alors, si (u_n) vérifiant R_0, on a d'une et d'une seule façon : $(u_n) = u_0.(\alpha_n) + u_1.(\beta_n)$. (Unicité facile. Existence : bien comprendre l'indice 2 avec R_0 ...)

3) On cherche une autre base plus commode avec les suites faciles du type (r^n) vérifiant R_0, $r \neq 0$: on tombe exactement sur : $r^2 = a.r + b$; d'où si $a^2 + 4.b \neq 0$, on a deux suites r_1^n; r_2^n non proportionnelles vérifiant R_0 : une (autre) base de E_1. Une suite (u_n) vérifiant R_0 s'écrit donc $(u_n) = \lambda.(r_1^n) + \mu.(r_2^n)$.

4) Dans le cas où $a^2 + 4.b = 0$ en terme d'espace vectoriel, on a un "vecteur" (commode) non nul de E_1, c'est-à-dire la suite géométrique $(x_n) = (r_0^n)$, mais notre espace est de dimension 2. Heureusement, on constate que la suite $(y_n) = (n.r_0^n)$ vérifie R_0 et n'est pas proportionnelle avec (x_n) [à bien voir : $y_0 = 0$; $y_1 = 1.r_0$; $y_2 = 2.r_0^2, ...$] donc autre base et $(u_n) = \lambda.(r_0^n) + \mu.(n.r_0^n)$ dans ce cas-là. Fini.

$\boxed{\text{Exemples}}$ Suites : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$? Puis : $u_{n+2} = 2.u_{n+1} - u_n + 4$? $[d_n = u_{n+1} - u_n.]$

M+ **Exercices: Espaces vectoriels de dimension finie** **PTSI**

---

1. Soit : J, I deux ensembles d'indices. [On peut **les supposer finis** en 1ère lecture.]
   $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J}$ est dite sous-famille de $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ si $J \subset I$; celle-ci étant une sur-famille de $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in J}$.
   (a) Que dire d'une sur-famille d'une famille génératrice ? Puis montrer :
   (b) Qu'une sous-famille d'une famille libre est libre [ou une sur-famille d'une famille liée est liée].

2. $\boxed{\text{Dans } E = \mathbb{R}^3 \ [dim3]}$: soit $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}\beta\\b\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma'\\c\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f}\begin{pmatrix}7\\8\\m\end{pmatrix}$.
   (a) Les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ sont-ils libres ? Et $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$? Et $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$? (selon m).
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$ sont-ils générateurs (de $\mathbb{R}^3$) ? Et $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$? (cas $m = 9$, $m \neq 9$).
   (c) Vérifier que : $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ libres $\Leftrightarrow$ $a.b.c \neq 0$. [Commencer par $\Leftarrow$; puis $\Rightarrow$ (*).]

3. $\boxed{\text{Dans l'espace vectoriel } E = \mathbb{R}[x] \ [dim + \infty]}$ (des polynômes identifiés aux fonctions polynômes)
   (a) L'ensemble des polynômes de degré exactement 2 est-il un sous e.v. ? [**non !** pourquoi ?]
   (b) Comment sait-on de suite que $\mathbb{R}_n[x]$, ensemble des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$, est un sous e.v. ? [**En écrivant :** $\mathbb{R}_n[x] = Vect(1, x, x^2, ..., x^n)$!] Base et dimension ?
   Si $a \in \mathbb{R}$, justifier que $((x-a)^k, 0 \leqslant k \leqslant n)$ est une autre base. [Libre de cardinal : $n+1$].
   (c) Dans $\mathbb{R}[x]$, montrer que des polynômes $P_0, P_1, ...P_n$ non nuls de degrés distincts sont libres.
   (d) Dans $\mathbb{R}[x]$, soit les polynômes : $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x, ...,$ $Q_n(x) = x(x-1)...(x-n+1), ...$
   [Rappel : un produit vide vaut 1]. Montrer qu'ils constituent une base infinie de $\mathbb{R}[x]$.
   Vérifier que $Q_n(x+1) - Q_n(x) = n.Q_{n-1}(x)$. ["$\Delta(Q_n)(x) = n.Q_{n-1}(x)$ dérivation discrète"]

4. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'e.v. connu (sur $\mathbb{R}$).
   (a) Vérifier que la famille $(1,\ sin,\ cos,\ sin^2,\ cos^2)$ n'est pas libre [une relation de liaison].
   (b) Montrer que la famille : $(1,\ sin,\ cos,\ x \mapsto sin(2x),\ x \mapsto cos(2x))$ est libre. On écrira :
   $a.1 + b.cos(x) + c.sin(x) + d.cos(2x) + e.sin(2x) = O$; prendre $x = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ -\pi/2$;
   puis dériver et idem ... jusqu'à trouver tous les coefficients nuls.
   (c) (* Hors "sup" mais facile.) Montrer que la famille (infinie) $x \mapsto e^{\lambda.x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est libre.
   [Limite en ∞ ; ou bien dériver et récurrence ; ou changer x en $x+1$ et récurrence].

5. Si E_1, E_2 sous e.v. en somme directe, montrer que : $dim(E_1 \oplus E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$ puis :
   $\boxed{\text{Si } E \text{ e.v. de dimension finie} : E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{\overrightarrow{0}\} \text{ et } dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2)}$

6. Formule de Grassman $\boxed{\underline{dim(E_1 + E_2) < +\infty},\ dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)}$
   (a) Utilisation. $\underline{dim(E) < +\infty}$: $E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow E_1 + E_2 = E$ et $dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2)$
   (b) Démonstration : (*) Vérifier que $dim(E_1 \cap E_2) = r \leqslant min(p, q)$, $p = dim(E_1)$, $q = dim(E_2)$.
   Soit $\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_r}$ une base de $E_1 \cap E_2$, complétée par $\overrightarrow{a}_{r+1}, ..., \overrightarrow{a_p}$ pour avoir une base de E_1 et par par $\overrightarrow{b}_{r+1}, ..., \overrightarrow{b_q}$ pour avoir une base de E_2 ; ce qui fait $r + p - r + q - r = p + q - r$ vecteurs clairement générateurs de $E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont libres. [si $\overrightarrow{0} = \Sigma_{i,j,k}\gamma_i\overrightarrow{e_i} + \alpha_j.\overrightarrow{a_j} + \beta_k.\overrightarrow{b_k}$,
   alors : $\Sigma_{i,j}\gamma_i\overrightarrow{e_i} + \alpha_j.\overrightarrow{a_j} = \overrightarrow{x} = -\Sigma_k\beta_k.\overrightarrow{b_k} \in E_1 \cap E_2$; donc : $\overrightarrow{x} = \Sigma_i\delta_i.\overrightarrow{e_i}$. etc.]

Chapitre 20

Les applications linéaires : généralités

20.1 Notions fondamentales

20.1.1 Définitions

Soit E et F deux e.v. sur $\mathbb{K}$. $f : E \to F$ est linéaire si $\begin{cases} \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E : f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{u} \in E : \quad f(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda.f(\overrightarrow{u}). \end{cases}$

Aux ch.20-23, on ne parle que d'application linéaire ; on note donc f [et non $\overrightarrow{f}$ comme au ch. 17].

Remarques 1) On peut condenser ainsi : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, f(\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}).}$

2) Une application linéaire pourrait être appelée :

– un "homomorphisme" d'espaces vectoriels : terme non employé. **Mais on dit**
– **"endomorphisme"** (sous entendu d'e.v.) si f linéaire de E dans E ;
– **"isomorphisme"** si application linéaire bijective de E dans F ;
– et **"automorphisme"** si f endomorphisme bijectif.

20.1.2 Propriétés

On a : 1) $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ et $f(-\overrightarrow{x}) = -f(\overrightarrow{x})$

2) De plus ici : $f(E)$ [ou $Im(f)$] est un sous e.v. de F et f surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$

3) $Ker(f) = \{\overrightarrow{x} \in E : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$ est un sous e.v. de E et **f injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.**

– 1) Démonstration facile.
– 2) L'équivalence est évidente. Pour $f(E)$ sous e.v. de F : avec une caractérisation (des sous-e.v.)
Déjà $\overrightarrow{0_F} = f(\overrightarrow{0_E}) \in f(E)$. Puis : si $\overrightarrow{y}_1 \in f(E)$, $\overrightarrow{y}_2 \in f(E)$ alors $\exists\ \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in E : \overrightarrow{y}_1 = f(\overrightarrow{x}_1)$, $\overrightarrow{y}_2 = f(\overrightarrow{x}_2)$. D'où : (avec la linéarité) : $\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2 = f(\overrightarrow{x}_1) + f(\overrightarrow{x}_2) = f(\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2) \in f(E)$.
Loi externe : si $\overrightarrow{y} \in f(E)$, $\exists \overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$; d'où $\lambda.\overrightarrow{y} = \lambda.f(\overrightarrow{x}) = f(\lambda.\overrightarrow{x}) \in f(E)$.
– 3) $Ker(f)$[1] sous-e.v. avec une caractérisation. Déjà $\overrightarrow{0_E} \in Ker(f)$. Puis si $f(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{0_F}$, $f(\overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{0_F}$ alors $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{0_F}$. Enfin, la loi externe : ayant $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}$, on a : $f(\lambda.\overrightarrow{x}) = \lambda.f(\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$.
L'équivalence : Si f est injective, forcément $Ker(f)$ sous e.v. des antécédants de $\overrightarrow{0_F}$ est réduit à $\overrightarrow{0_E}$.
Inversement si $f(\overrightarrow{x_1}) = f(\overrightarrow{x_2})$, $f(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{0_F}$ (avec la lin.) et $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$ donne : $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$. Fini.

20.1.3 Exemples

1. Soir $E = \mathbb{R}$ e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Les applications linéaires de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ sont } y = f(x) = a.x.}$
   En effet $f(x) = a.x$ convient. Inversement si f linéaire : $f(x) = f(x.1) = x.f(1) = x.a$ forcément.
2. Les applications de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$ (en dim. finie) s'écrivant $Y = A.X$, A étant une matrice **sont** linéaires car : $A.(X_1 + X_2) = A.X_1 + A.X_2$ **et** $A.(\lambda.X) = \lambda.A.X$ (vérification laissée).

[1] **En allemand, "Kern"** veut dire **"noyau"** (coeur ?) Voir aussi **en breton : "Keranna" (Ker Anna) ...**

Inversement on montrera qu'il n'y en a pas d'autres (en dim finie, aux ch. suivants). Donc :
Les applications linéaires de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$ sont celles s'écrivant $\boxed{Y = A.X,\ A \text{ matrice.}}$

3. Soit E un e.v. de dimension quelconque ; $h_k : \overrightarrow{x} \in E \longmapsto k.\overrightarrow{x} \in E$ est linéaire (endomorphisme). Pour $k \neq 0$, elle est bijective (automorphisme), appelée $\boxed{\text{homothétie vectorielle de rapport } k}$ (on ne parle pas de point ici ; ni de "centre" ; mais $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$). Bien sûr : $h_k^{-1} = h_{1/k}$.
A noter que : $\boxed{h_k = k.Id}$ et $\boxed{\forall f \text{ endomorphisme : } foh_k = h_kof.}$ [car $f(k\overrightarrow{x}) = k.f(\overrightarrow{x})$].

4. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ e.v. de dim infinie sur $\mathbb{R}$; $D : \varphi \in E \longmapsto \varphi' \in E$ [Dérivation]. D est linéaire ; c'est un $\boxed{\text{endomorphisme surjectif ; non injectif, } KerD = \mathbb{R}_0[x] \text{ sous e.v. de dim. 1 des applic. constantes.}}$
surjectif car si $\psi \in E$, on lui trouve un antécédant dans E : une primitive polynômiale aisément.

Remarques facultatives
1) Si on prend la dérivation de $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ dans $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$: ce n'est qu'une Appl. Lin., non endom. ; surjective car toute fonction C^0 admet des primitives, forcément C^1 ; non injective.
2) Un exemple d'endomorphisme injectif non surjectif ? $P(x) \in \mathbb{R}[x] \mapsto x.P(x) \in \mathbb{R}[x]$: à voir.

5. Soit l'intégration $I :\ \varphi \in E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi(x).dx \in \mathbb{R}$. I est linéaire.

Définition $\boxed{\text{Une application linéaire de } E \text{ dans } \mathbb{K} \text{ est appelée "forme" linéaire (sur } E).}$
Autre exemple facultatif : $\varphi \in \mathbb{R}[x] \mapsto \varphi^{(2)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, fixé.

6. Soit $E = \mathbb{C}$; et la conjugaison $f :\ z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$. f est-elle linéaire ?
On sait que : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. Et $\overline{\lambda.z} = \lambda.\overline{z}$: vrai $\boxed{\text{si}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donc $\begin{cases} \text{pour } E \text{ e.v. sur } \mathbb{R},\ f \text{ est linéaire ; mais par contre :} \\ \text{pour } E \text{ e.v. sur } \mathbb{C},\ f \text{ est "semi-linéaire" (non linéaire).} \end{cases}$

20.1.4 Opérations sur les applications linéaires

1. Somme et Multiplication par une constante.
• Si f, g linéaires de E dans F, $f + g$ aussi ; $\lambda.f$ aussi ; O application nulle $E \to F$ aussi. (Facile)
• Conséquence :
Pour $A \neq \emptyset$ et F étant un e.v., il est facile de voir que $\mathcal{F}(A, F)$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$. Ce qui précède montre que $\mathcal{L}(E, F)$, ensemble des applications linéaires de E dans F, est un sous e.v. de $\mathcal{F}(E, F)$.
$\boxed{\text{Résumé}}$ E est un 1er e.v. ; F est un 2ème e.v. ; $\boxed{\mathcal{L}(E,F) \text{ en est un (3ème) e.v.}}$
(mieux compris aux ch. suivants, quand E et F seront de dim. finies p et n).

2. Composition.
• De même $f : E \to F$; $g : F \to G$ linéaires $\Rightarrow gof$ linéaire (facile).
• Conséquence : $\mathcal{L}(E)$ étant l'ensemble des endomorphismes de E dans E,
on obtient : $\boxed{(\mathcal{L}(E), +, o) \text{ est un anneau ; celui-ci est non commutatif si } dim(E) \geqslant 2.}$

En effet : **"Anneau" signifie 2 opérations internes (ici + et o) reliées telles que**
1) Pour $+$, avoir un groupe abélien ; c'est le cas car $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.
2) Puis la composition o est interne, associative ; et neutre $Id : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x}$.
3) Lien entre les lois : $(f + g)oh = (foh) + (goh)$ est toujours vrai.
Il reste enfin : $fo(g + h) = (fog) + foh)$? Celà vient du fait que f est linéaire :
$fo(g + h)(\overrightarrow{x}) = f[g(\overrightarrow{x}) + h(\overrightarrow{x})] = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \boxed{=} f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = fog(\overrightarrow{x}) + foh(\overrightarrow{x})$.

$\boxed{\text{Non commutatif dans } E = \mathbb{R}^2}$ Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ [la symétrie/ $Vect(\overrightarrow{\imath})//Vect(\overrightarrow{\jmath})$] et $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ [symétrie $/Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} //Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$]. f et g sont linéaires (matrices) (même bij. : automorphismes) mais $gof \neq fog$ calcul ! [En base **o.normée** gof, fog : $\frac{1}{4}$tours vectoriels !]

20.2 Du vocabulaire sur groupes et anneaux :

20.2.1 Groupes (généraux)

Soit $G \neq \emptyset$ muni d'une opération interne notée $*$, c'est-à-dire $x \in G, y \in G \Longrightarrow x * y \in G$:
(on dit "loi de composition interne " : l.c.i. car au départ, c'était la composition), est un groupe si
1) $*$ est associative $(x * y) * z = x * (y * z)$,
2) possède un neutre e : $e * x = x * e = x$,
3) et si chaque élément a un symétrique : $x * x' = x' * x = e$.
Enfin, si de plus $*$ est commutative, on dit groupe commutatif ou abélien.

Propriétés

1) Pour une loi interne, s'il y a un neutre, il est unique.
2) Si la loi est associative et si x a un symétrique (ou inverse), il est unique.
3) Le symétrique de $x * y$ est $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Enfin dans un groupe :
4) tout élément est simplifiable ["régulier"] à gauche $a * x = a * y \Rightarrow x = y$; et à droite

Démonstration
1) $e * e' = e$ ou e'. (et e indépendant de x)
2) $x' * x * x" = x'$ ou $x"$ en associant. Dorénavant noté x^{-1}
3) Si $u = x * y$, résoudre $u * z = e$, trouver $z = y^{-1} * x^{-1}$ et vérifier que $z * u = e$.
4) "Composer" à gauche par a^{-1}. C'est surtout **cette simplification qui est importante**.

Des exemples

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien (infini).
2. $(\mathbb{U}, .)$ [ensemble des complexes de module 1] est un groupe abélien (infini).
   $(\mathbb{U}_n, .)$ est un groupe cyclique à n éléments. $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2 ... \omega^{n-1}\} = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1\}$.
3. $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$ $(\mathbb{R}^*, .)$ $(\mathbb{R}^{+*}, .)$ $(\mathbb{C}^*, .)$ ... sont des groupes abéliens.
4. L'ensemble des homothéties-translations du plan affine muni de la composition, noté $(\mathcal{HT}, o)$, est un groupe infini, non abélien. [o interne (vu) associative (connu) Neutre : $Id_{\mathcal{P}}$ et inverses connues]
5. L'ensemble des bijections de $E \neq \emptyset$ dans E est un groupe pour o, appelé groupe symétrique, noté S_E. Ses éléments sont appelés permutations. Et on sait : $\mid E \mid = n \Longrightarrow \mid S_E \mid = n!$

   Note
   Quand $E = \{1, 2, ..., n\}$, on note $S_E = S_n$. Par exemple les 6 éléments de S_3 sont : Id ; (1 2) qui est la transposition $\begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$, (1 3), (2 3) de même ; (1 2 3) qui est le cycle $\begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$, et le cycle inverse (1 3 2)=(1 2 3)$^{-1}$. On peut voir géométriquement ce groupe comme le groupe des isométries planes **conservant un triangle équilatéral de sommet 1,2,3.** (transposition=sym$_\perp$/ droite)

   Un groupe fini non abélien ? Justement (S_3, o) **car** (1 2)o(1 3)=(1 3 2) $\neq$ (1 3)o(1 2)=(1 2 3).
6. Quand E est un e.v., on a déjà : $(E, +)$ groupe abélien. (neutre noté $\overrightarrow{0}$)

Homomorphismes de **groupes**. $f : (G, *) \mapsto (G', .)$ où $*$ et $.$ sont deux opération de groupes, est un homomorphisme de groupes si $f(x * y) = f(x) . f(y)$. $Im(f)$ est un sous-groupe de G'.
$Ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\}$ est un sous-gr. de G et : f inj. $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{e\}$.

Exemples. 1) $x \mapsto e^x$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, .)$ d'inverse ln.
2) $n \in (\mathbb{Z}, +) \mapsto 2^n \in (\mathbb{Q}^{+*}, .)$ est un homomorphisme inj., non surjectif : 3 sans antécédant.
3) $\theta \mapsto e^{i.\theta}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, .)$; non injectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

20.2.2 Anneaux (généraux) : 2 lois internes reliées entre elles

1. Définition[2] $(A, +, \centerdot)$ est un anneau si : 1) $(A, +)$ est un groupe abélien : neutre noté 0 ; 2) $\centerdot$ [interne] est associative et possède un neutre noté 1 ; et enfin 3) $\centerdot$ distributive/+ à droite et à gauche $a \centerdot (b+c) = ab + ac$; $(a+b) \centerdot c = ac + bc$

2. Exemples

   1) $(\mathbb{Z}, +, \centerdot)$ est un anneau commutatif (pour $\centerdot$) 2) $\mathbb{R}$[x], $\mathbb{C}$[x], $\mathbb{Q}$[x] anneaux de polynômes

   3) Un anneau non commutatif ? $(\mathcal{L}(E), +, o)$, qui sera revu et mieux compris avec les matrices. [3]

3. Propriétés

   Dans tout anneau, on a : $0 \centerdot x = x \centerdot 0 = 0$ où 0 est le neutre de +
   $(-x) \centerdot y = x \centerdot (-y) = -(x \centerdot y)$, où $-x$ désigne le symétrique de x pour +
   $(-x) \centerdot (-y) = x \centerdot y$; et deux relations essentielles, **si a et b commutent :**
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k; \quad a^n - b^n = (a-b)(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k) = (\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k).(a-b)$$

   Démonstration
   1) $(0+a).x = a.x$ d'où $0.x + a.x = 0 + a.x$ donc en simplifiant pour + : $0.x = 0$; idem $x.0 = 0$.
   2) $[x + (-x)].y = 0$ d'où $x.y + (-x).y = x.y + [-(x.y)]$ simplifier pour + ; idem $x.(-y) = -(x.y)$
   3) $x.y$ et $(-x).(-y)$ tous deux symétriques pour + de $(-x).y$: donc égaux. Puis attention !
   4) Egalités. Si $a.b \neq ba$, $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + a.b + b.a + b^2$; $(a+b).(a-b) = a^2 - a.b + b.a - b^2$!
   Si $a.b = b.a$, on a les relations usuelles. Dont ce rappel : $(a^3 - b^3) = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$.

   Exemples importants $b = 1$, neutre pour la deuxième loi, commute avec tout élément. D'où :
   $$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k ; \quad 1 - a^n = (1-a)(\sum_{k=0}^{n-1} a^k) = (\sum_{k=0}^{n-1} a^k).(1-a).$$
   Et, dans ce contexte, $a^0 = 1$, même si $a = 0$.

20.2.3 Remarques qui seront revues

1. On a donc un anneau **non commutatif** $(\mathcal{L}(E), +, o)$.
   En dimension finies, cela signifie qu'on peut trouver 2 matrices carrées A, B avec : $A.B \neq B.A$.

2. On verra qu'il est aussi **"non intègre" :**
   En dimension finies, on pourra trouver 2 matrices carrées : $A \neq O$, $B \neq O$ avec : $A.B = O$.
   (Dans ce cas, on dit que A **et** B **sont des "diviseurs de** O**"**).
   Attention : Si $A.U = A.V$ ou $A(U-V) = O$ même si $A \neq O$, on ne peut donc pas dire que $U = V$

   Par contre $(\mathbb{Z}, +, \centerdot)$ est intègre. Idem $\mathbb{R}$[x], $\mathbb{C}$[x], $\mathbb{Q}$[x] intègres. [Tous avec division euclidienne !]

3. On trouvera même des matrices carrées "nilpotentes" : $A \neq O$ et $A^p = O$, pour un certain $p > 1$.

4. Un corps est un anneau tel que tout élément autre que 0 (neutre de +) est inversible : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$...

5. $\mathcal{L}(E)$ est à la fois un anneau (pour $+, o$) et un e.v. (pour $+, .$) avec $\lambda.(gof) = (\lambda.g)of = go(\lambda.f)$: on dit "algèbre" ($\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ aussi). ["Al Djabr", mot de Al Kharezmi, d'où provient "algorithme".]

---

[2] **C.A.N.S.A.D. et N. (C.A.N.S. pour +) A. et N. (pour $\centerdot$) D.(lien $\centerdot$/+). En espagnol, descansarse = se reposer ; ici c'est le contraire et c'est un impératif !** (l' ancienne définition était seulement : CANSAD !)

[3] **Remarque facultative :** $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, o)$? non anneau car : $fo(g+h) = fog + goh$ est faux parfois !
Ainsi : $sin(x^2 + x^3) \neq sin(x^2) + sin(x^3)$.

20.3 Projections et symétries vectorielles en dimension quelconque

Ce sont des exemples essentiels d'endomorphismes. Au départ sont donnés 2 sous e.v. supplémentaires.

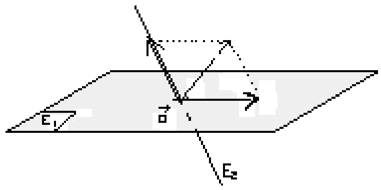
20.3.1 Projections vectorielles

1. Définition

Soit donnés 2 sous e.v. supplémentaires $\boxed{E = E_1 \oplus E_2.}$ L'application $p : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \in E = E_1 \oplus E_2 \longmapsto \overrightarrow{x_1} \in E$ est linéaire (endomorphisme), appelée projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 ; on a $E_1 = Im(p), E_2 = Ker(p)$. De même $q : \overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{x_2}$ est appelée proj. sur E_2 parallèmement à E_1 et $p + q = Id$.

Démonstration

La linéarité de p est facile à vérifier. Et $\forall \overrightarrow{x} \in E, \overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x}) + q(\overrightarrow{x})$ ou $Id = p + q$; $\boxed{q = Id - p.}$



Cas particulier :

Si on prend $E = E \oplus \{\overrightarrow{0}\}$: $p = Id$; $q = O$ (endomorphisme nul) qui sont donc des projecteurs.

2. **Remarque essentielle :** Sous e.v. des vecteurs invariants pour f endomorphisme.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme, i.e. linéaire de E dans E) ;

on peut considérer $\{\overrightarrow{x} : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\}$ qui est l'ensemble des vecteurs invariants ; c'est aussi $\{\overrightarrow{x} : f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ ou $\{\overrightarrow{x} : (f - Id)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$ ou $Ker(f - Id)$ sous e.v. des vecteurs invariants.

De plus (aisé) ce sous e.v. est inclus dans $Im(f)$. [Inclusion stricte possible $f = 2.Id$ sur $\mathbb{R}^2$.]

2) $\boxed{\text{Pour un projecteur : } Im(p) = Ker(p - Id).}$ [Réciproque vraie : alors $pop = p$ et Théorème.]

3) Exercice : Plus généralement, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on peut considérer $\{\overrightarrow{x} : f(\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{x}\}$.
Voir que c'est $Ker(f - \lambda.Id)$, donc sous e.v. Et si $\lambda \neq 0$ il est aussi inclus dans $Im(f)$.

3. **Le théorème fondamental**.

Rappel : Soit p la projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2, donc $\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$
Alors : $E_1 = Im(p) = Ker(p - Id)$; $E_2 = Ker(p)$; de plus : $\boxed{pop = p.}$
Réciproque : Il est surtout remarquable qu'on ait le Théorème fondamental (réciproque) :
$(f \in \mathcal{L}(E)$ et $fof = f) \Longrightarrow f$ projecteur sur $Ker(f - Id)$ // $Ker(f)$.

Démonstration

de $pop = p$ ou de $pop(\overrightarrow{x}) = p(\overrightarrow{x})$, si p projection : $p(\overrightarrow{x})$ dans l'image donc, ici, invariant.

Démonstration du Théorème réciproque (*) **[par analyse-synthèse]**

1) $Ker(f - Id)$ et $Ker(f)$ sont des sous e.v. Il faut voir ici qu'ils sont supplémentaires.
C'est-à-dire, pour $\overrightarrow{x} \in E$, trouver une et une seule écriture sur $Ker(f - Id) + Ker(f)$.

. Analyse et unicité :

$\boxed{\text{Si}}$ on a une écriture $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ (1), forcément $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{0}$ (2) car on veut $\begin{cases} f(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{x_1} \\ f(\overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{0} \end{cases}$.

Donc si on a une écriture , ce ne peut être que celle-ci : $\overrightarrow{x_1} = f(\overrightarrow{x})$; $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})$.

A ce stade, l'unicité est prouvée ou encore : $Ker(f - Id) + Ker(f) = Ker(f - Id) \oplus Ker(f)$.
On ne sait pas si ce sous espace vaut E en entier, mais on a donc une idée précise !

- Synthèse et existence :

  Pour $\overrightarrow{x} \in E$, posons donc : $\overrightarrow{x_1} = f(\overrightarrow{x})$; $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})$. $\boxed{\text{Vérifions}}$ que $\begin{cases} \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{x_1} \in Ker(f - Id) \\ \overrightarrow{x_2} \in Ker(f). \end{cases}$

  Première ligne : clair. Les autres : utiliser l'hypothèse en plus : $fof = f$!

2) Ayant prouvé : $E = Ker(f - Id) \oplus Ker(f)$, si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, aisément $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_1}$. Fini.

4. $\boxed{\text{Autres remarques :}}$

   1) On montre que $\mathcal{L}(E)$ non intègre si $dim(E) \geqslant 2$: Dans $E = \mathbb{R}^2$, si $E_1 = Vect(\overrightarrow{i}) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et $E_2 = Vect(\overrightarrow{j}) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 ;
   alors : $p \neq O$; $q = Id - p \neq O$, $poq = O$. (Ici $poq = qop = O$ commutent !)
   [Noter au passage, pour f Appl. Lin. quelconque : $Ker(f) = Ker(-f)$, $Im(-f) = Im(f)$].

   2) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $Ker(f)$ et $Im(f)$ supplémentaires ?
   – Si $f : E \to F$, avec $F \neq E$, question insensée ! **Car** $Ker(f) \subset E$, $Im(f) \subset F$.
   – Si $F = E$, f endomorphisme, c'est parfois vrai, parfois faux ! **cf. Exercices.**
   – Pour p projecteur, c'est vrai. Et aussi si f bij. : $Ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}, Im(f) = E$. ($f = 2.Id$ sur $\mathbb{R}^2$).

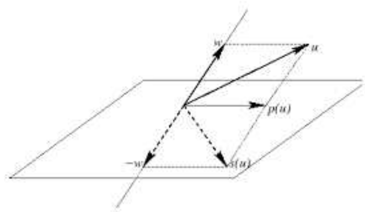
   3) Pour un projecteur, en posant $p^2 = pop$, on a $p^2 - p = O$; ou $p(p - Id) = O = (p - Id)p$.
   $\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{x} - 1) = (\mathrm{x} - 1)\mathrm{x}$ est dit polynôme annulateur de p. [Spé]

20.3.2 Symétries vectorielles

1. Définition

Soit donnés 2 sous e.v. supplémentaires $\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$. L'application $s : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \in E \longmapsto \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} \in E$ est linéaire bijective (automorphisme) appelée sym. vect. par rapport à E_1 parall. à E_2. Et : $E_1 = Ker(s - Id), E_2 = Ker(s + Id)$. De même $s' : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \longmapsto \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$ appelée sym. par rapport à E_2 parall. à E_1.

   Démonstration $s = p - q$: linéaire ! $\boxed{sos = Id}$: bijective donc $Ker(s) = \{\overrightarrow{0}\}$, $Im(s) = E$.
   Puis $\overrightarrow{x} \in Ker(s - Id) \Leftrightarrow s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} \in E_1$. Idem pour E_2.
   $\boxed{\text{Avec } p\text{, on a tout}}$ $q = Id - p$; $s + Id = 2p$ ou $s(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = 2p(\overrightarrow{u})$; $s' = -s$; $\overrightarrow{u} - s(\overrightarrow{u}) = 2q(\overrightarrow{u})$.



   Cas particulier :
   Si on prend $E = E \oplus \{\overrightarrow{0}\}$. Ici : $s = Id$; $s' = -Id$ qui sont donc des symétries vectorielles.

2. Le théorème réciproque. $\boxed{(f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } fof = Id) \Longrightarrow f \text{ sym. } / \ Ker(f - Id) \ // \ Ker(f + Id).}$
   Démonstration (*)
   Soit on fait l'analogue de la précédente. Soit on s'y ramène avec : $s + Id = 2p$.
   Considérer alors : $p = 1/2(f + Id)$ et vérifier : $pop = p$ ... En exercice.

3. Remarque : $\boxed{\text{Plus généralement, toujours si } E = E_1 \oplus E_2}$
   $f_k : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \in E \mapsto \overrightarrow{x_1} + k.\overrightarrow{x_2} \in E$ est linéaire, bijective si $k \neq 0$ (automorphisme $f_k^{-1} = f_{\frac{1}{k}}$)
   appelée **dilatation vectorielle** de base E_1, de direction E_2, de rapport k. Dessin ?

20.4 Le groupe linéaire

20.4.1 Définitions

Rappelons qu'on a 3 opérations dans $\mathcal{L}(E)$: $+, o, \centerdot$ (externe) ; et o est non commutative si $dimE \geqslant 2$.

$f \in \mathcal{L}(E)$ (linéaire de $E \to E$) est dite inversible si $\left\{ \begin{array}{l} (1) : f \text{ bijective} \\ (2) : f^{-1}\text{linéaire} \end{array} \right.$ Mais : (1) $\Rightarrow$ (2) (aisé).

Donc : L'ensemble des end. bijectifs (automorphismes) de E constitue un groupe pour o, appelé groupe linéaire (non abélien si $dim(E) \geqslant 2$), noté $\mathbb{GL}(E)$; si $E = \mathbb{K}^n$ on le note $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$.

20.4.2 Exemples

1. $h_k : \overrightarrow{x} \longmapsto k.\overrightarrow{x}$ pour $k \neq 0$, homothétie vectorielle, est dans $\mathbb{GL}(E)$ (bijective).
   D'ailleurs le neutre de $\mathbb{GL}(E)$ est : $Id = h_1$!
2. Soit s la symétrie $/E_1$ // E_2, ce qui suppose $E = E_1 \oplus E_2$. Alors $s \in \mathbb{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$.
3. Par contre si $E_2 \neq \{\overrightarrow{0}\}$, p projection sur E_1 // à E_2 est non inversible $[Ker(p) = E_2 \neq \{\overrightarrow{0}\}]$.

20.4.3 Trois exercices corrigés

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x' = x + y \\ y' = -x - m.y \end{pmatrix}$. f endomorphisme ? f bijectif ?

   Admettons ici (ch. suivant) :

   Si f Appl. lin. $E \to F$ avec $dim(E) = dim(F)$ finie : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

   Corrigé

   f endomorphisme. f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; linéaire par écriture matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   f injective ? Pour trouver $Ker(f)$, on résout : $\left\{ \begin{array}{l} x' = 0 \\ y' = 0 \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 0 \\ -x - m.y = 0 \end{array} \right.$. Par exemple avec les déterminants 2x2 :

   • Si $m \neq 1$ on a $Ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ donc f injective ; d'où bijective par Théorème, car $dim(\mathbb{R}^2)$ finie.

   • Si $m = 1$ $Ker(f) = \{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + y = 0\}$: droite vectorielle $Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Vect(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$.

   Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, par calcul si l'on veut : $f(\overrightarrow{\imath}) = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} = f(\overrightarrow{\jmath})$:

   Donc $Im(f) = \{f(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x} \in E\} = \{x.f(\overrightarrow{\imath}) + y.f(\overrightarrow{\jmath}),\ x, y \in \mathbb{R}\} = Vect\left(f(\overrightarrow{\imath}), f(\overrightarrow{\jmath})\right) = Ker(f)$!

   Ici $Im(f) \subset Ker(f)$: $\forall \overrightarrow{x},\ f[f(\overrightarrow{x})] = \overrightarrow{0},\ fof = O$ et $f \neq O$: C'est un cas où f **est** nil-potent.

   C'est aussi un cas où $Ker(f)$ et $Im(f)$ ne sont pas en somme directe donc non supplémentaires.

2. Soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, $dim(E)$ quelconque, tel que $f^2 + f - 3.Id = 0$ (par exemple).

   Montrer que f est inversible et préciser son inverse (des deux côtés). [Ecrire : $f^2 + f = 3.Id$ ...]

   Réponse On a $fo\frac{1}{3}(f + Id) = \frac{1}{3}(f + Id)of = Id$; donc f est inversible d'inverse $f^{-1} = \frac{1}{3}(f + Id)$!

   En dim. **quelconque, avoir l'inverse des 2 côtés.** En dim. finie, **1 côté suffit** cf. ch. suivant.

3. Soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^n = O$, $dim(E)$ quelconque ($f \neq O$ en général : nilpotent).

   Montrer que : $Id - f$ est inversible (des deux côtés) et préciser son inverse.

   cf. Anneaux : $(Id - f)o(Id + f + ... + f^{n-1}) = (Id + f + ... + f^{n-1})o(Id - f) = Id - f^n = Id$.

   d'où : $(Id - f)^{-1}$ existe et vaut $(Id + f + ... + f^{n-1})$. Rem : $(Id + f)^{-1}$ existe aussi !

M+ **Exercices: Applications linéaires** **PTSI**

---

1. Dans $\mathcal{L}(E)$, vérifier que $Ker(f-Id)$ et $Ker(f)$ sont toujours en somme directe. [$\neq$ cours : on ne dit pas, ici, "supplémentaires" !] (Si $\overrightarrow{x} \in Ker(f) \cap Ker(f-Id)$, $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$...)

2. (Avec $f = 2.Id$ dans $\mathbb{R}^2$) montrer que : $E = Im(f) \oplus Ker(f) \not\Longrightarrow f$ projecteur.

3. En dimension quelconque, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ vérifier : $gof = O \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$.

4. Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (a) Vérifier que $f : P(x) \mapsto P(x+1)$ est un endomorphisme ; donc aussi $\Delta = f - Id$.
   (Ecrire $P(x) = a + b.x + c.x^2$ ou $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base $(1, x, x^2)$; chercher l'image $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans cette base et trouver une écriture matricielle. $\Delta : P(x) \mapsto P(x+1) - P(x)$ "dérivation discrète")
   (b) Montrer que : $Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[x]$ (on peut montrer, avec un degré quelconque, que : $P(x+1) = P(x) \Leftrightarrow P(x) = cte.$) Et : $Im(\Delta) = \mathbb{R}_1[x]$ (commencer par une inclusion).
   (c) Vérifier que $\Delta^3 = O$. Puis $(Id + \Delta)(Id - \Delta + \Delta^2) = (Id - \Delta + \Delta^2)(Id + \Delta) = Id$. Conclure.
   (d) On avait : $f = Id + \Delta$; trouver f^{-1} d'une autre façon et préciser sa matrice.

5. Dans $\mathcal{L}(E)$, [$dim(E)$ quelconque] si $gof = fog$, vérifier que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g.

6. Avec le cours bien connu sur les projecteurs. (*) [$fof = f$; $f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} \in Ker(f)$].
   (a) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : ($fog = f$ et $gof = g$) $\Longleftrightarrow f, g$ projecteurs de même noyau.
   (b) Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : ($fog = g$ et $gof = f$) $\Longleftrightarrow f, g$ projecteurs de même image.
   (c) Si p, q proj. : $p + q$ proj. $\Longleftrightarrow poq = qop = O$, $p - q$ proj. $\Longleftrightarrow poq = qop = q$. Si $qop = O$, $r = p + q - poq$ proj., $Ker(r) = Kerp \cap Kerq$, $Im(r) = Imp \oplus Imq$. Si $poq = qop$, poq proj. ...

7. Soit s symétrie, alors $s^2 = Id$ ou $s^2 - Id = O$ [ou bien : $\mathrm{x}^2 - 1$ polynôme annulateur de s].
   (*) Montrer la réciproque à savoir : $(f \in \mathcal{L}(E); fof = Id) \Longrightarrow f$ symétrie vectorielle à préciser.

8. (*) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$; montrer que :
   $Ker(f) = Ker(gof) \Longleftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0_F}\}$. $Im(g) = Im(gof) \Longleftrightarrow F = Im(f) + Ker(g)$.

9. (*) Dans $\mathbb{R}[x]$ soit $f : P(x) \mapsto Q(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$ et soit D la dérivation. Vérifier que ce sont des endomorphismes tels que $Dof = Id$ mais $foD \neq Id$ [donc aucun inversible] !
   En général si $gof = Id$, montrer que $Im(fog) = Im(f)$, $Ker(fog) = Ker(g), E = Ker(g) \oplus Im(f)$.

10. (*) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ / $\forall \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}) = k_{\overrightarrow{x}}.\overrightarrow{x}$ (i.e. $\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})$ liés !) Montrer $\exists k$ (fixe) : $f(\overrightarrow{x}) = k.\overrightarrow{x}$.
    (*) En déduire les automorphismes commutant avec tous les autres (centre du groupe linéaire).

Chapitre 21

Applications linéaires en dimension finie

21.1 Représentation avec des bases

21.1.1 Matrice d'une applications linéaire (en dim. finie)

1. Théorème

Soit E de dim. p, de base $(\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_p})$; et $\overrightarrow{v}_1, ...\overrightarrow{v}_p$, p vecteurs quelconques de F : $\exists ! f$ linéaire telle que $f(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{v}_j$. On dit qu'une A.L. est déterminée de manière unique par l'image d'une base. De plus : f inj. $\Leftrightarrow \overrightarrow{v}_j$ libre (néc. $dimF \geqslant dimE$); f surj. $\Leftrightarrow \overrightarrow{v}_j$ gén (néc. $dimF \leqslant dimE$) ; f bij. $\Leftrightarrow \overrightarrow{v}_j$ base (néc. $dimF = dimE$).

Démonstration

– 1) Unicité et existence : Pour $\overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{e_1} + ... + x_p.\overrightarrow{e_p}$, on a la seule possibilité : $f(\overrightarrow{x}) = x_1.f(\overrightarrow{e_1}) + ... + x_p.f(\overrightarrow{e_p}) = x_1.\overrightarrow{v}_1 + ...x_p.\overrightarrow{v}_p$; et on vérifie alors qu'elle convient.

– 2) f inj. $\Longrightarrow (\overrightarrow{v}_j)$ libre : Soit $x_1.\overrightarrow{v}_1 + ... + x_p.\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{0_F}$; alors $f(\sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{0_F}$ donc

$\sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j} \in Ker(f)$; mais f inj. donne $\sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{0_E}$ puis $(\overrightarrow{e_j})$ libre d'où $x_j = 0$. Fini.

f inj. $\Longleftarrow (\overrightarrow{v}_j)$ libre : Soit $\overrightarrow{x} \in Ker(f)$, $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j}$ car $(\overrightarrow{e_j})$ génératrice.

Alors : $\overrightarrow{0_F} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{v}_j$; mais $(\overrightarrow{v}_j)$ libres, donc $x_j = 0$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$. Fini.

f surj. $\Longrightarrow (\overrightarrow{v}_j)$ gén : Soit $\overrightarrow{y} \in F$; f surj. donne : $\exists \overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$.
Ecrivons alors $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j}$ car $(\overrightarrow{e_j})$ génératrice : $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{v}_j$. Fini.

f surj. $\Longleftarrow (\overrightarrow{v}_j)$ gén : Soit $\overrightarrow{y} \in F$; $(\overrightarrow{v}_j)$ génératrice donne $\exists x_j : \overrightarrow{y} = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{v}_j$.

Posons $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j}$; alors aisément $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$. Fini.

2. Conséquence : définition. Si de plus F de dimension finie n, de base $\overrightarrow{f_1}, ...\overrightarrow{f_n}$, voici la matrice de f dans les bases $(\overrightarrow{e_j})$ de E et $(\overrightarrow{f_i})$ de F ; on va de E_p dans F_n ; on a une matrice (n, p) :

• $A_{np} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j}... & a_{1p} \\ ... & & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj}... & a_{np} \end{pmatrix}$ où la $\boxed{j\text{ème colonne est le vecteur } f(\overrightarrow{e_j})}$: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ dans : $\begin{matrix} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ ... \\ \overrightarrow{f_n} \end{matrix}$;

c'est donc **le remplissage en colonnes avec les vecteurs** : $f(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{v}_j = a_{1j}\overrightarrow{f_1} + ... + a_{nj}.\overrightarrow{f_n}$.

• Maintenant la lecture ou **le remplissage en lignes avec les composantes :**

Pour $\overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{e_1} + ... + x_p.\overrightarrow{e_p}$, $\overrightarrow{y} = y_1.\overrightarrow{f_1} + ... + y_n.\overrightarrow{f_n}$, vecteurs toujours notés en colonnes :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $\boxed{\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow Y = A.X}$ ou $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j}... & a_{1p} \\ ... & & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj}... & a_{np} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$

avec les tailles : $Y_{n1} = A_{np}.X_{p1}$; le produit s'effectuant lignes par colonnes.

Démonstration

La ligne 1 de $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = x_1.f(\overrightarrow{e_1}) + ... + x_p.f(\overrightarrow{e_p})$ est $y_1 = x_1.a_{11} + x_2.a_{12} + ... + x_p.a_{1p}$. Etc.

3. **Ainsi :** quand f va de E_p dans F_n, celà donne une matrice A_{np} : ordre inversé. **Et surtout :** Les vecteurs colonnes de A : $f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_p)$ forment une famille génératrice de $Im(f)$.

   Par exemple avec f endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ en base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

   – Si on cherche $Ker(f)$, on résoud $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ ou $A.X = O$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   – Et $Im(f) = Vect(f(\overrightarrow{i}), f(\overrightarrow{j})) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = Vect(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$ de dimension 1.

   $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désignera ensuite l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

21.1.2 Exemples

1. $f = O$ de $E = \mathbb{R}^2$ (base $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$) $\longrightarrow F = \mathbb{R}^3$ (base $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$) a pour matrice : $O_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3,2}$

2. Soit f l'unique A.L. : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : $f(\overrightarrow{I}) = \overrightarrow{i}$, $f(\overrightarrow{J}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $f(\overrightarrow{K}) = \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}$.
   Par définition, sa matrice avec les bases indiquées, est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Id, comme endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, dans toute base a pour matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

4. Remarque : Qu'est-ce qu'une **matrice ligne** (1 ligne, p colonnes) ?
   On doit aller de E_p dans $\mathbb{K}$ (e.v. de dim 1 sur $\mathbb{K}$), soit une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ donc :
   $\boxed{\text{Une matrice ligne est une matrice d'une forme linéaire.}}$

5. Montrer que $f : P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P'(x+1) \in \mathbb{R}_1[x]$ est linéaire. Matrice en bases $(1, x, x^2)$ et $(1, x)$?
   $\boxed{\text{Solution}}$
   On voit qu'on va de $\mathbb{R}_2[x]$ (dim. 3) dans $\mathbb{R}_1[x]$ (dim 2) ; puis f linéaire ?

   1ère façon, par calcul :
   Posons $P(x) = a + b.x + c.x^2$; alors $P'(x) = b + 2c.x$; l'image est $Q(x) = b + 2c(x+1) = \alpha + \beta.x$.
   On a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, remplissage en lignes, ce qui prouve f linéaire et donne sa matrice.

   2ème façon, même dans $\mathbb{R}[x]$: Voir que : $f(P_1 + P_2) = f(P_1) + f(P_2)$ et $f(\lambda.P) = \lambda.f(P)$.
   Enfin le remplissage en colonnes : la 3ième est $f(x^2)$ soit $2(x+1) = 2 + 2.x$ ou $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{(1,x)}$!

21.2 Rang d'une application linéaire

21.2.1 Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$; alors $\underline{dim(E) = dim[Ker(f)] + rg(f)}$, où par définition : $\underline{rg(f) = dim[f(E)]}$.

Deux exemples

1. Le dernier exemple précédent : Pour trouver $rg(f)$:
   - Soit on cherche une base de $Im(f)$: l'image d'une base est **génératrice** seulement de l'image

     Car : $f(\overrightarrow{x}) = x_1.f(\overrightarrow{e_1}) + ... + x_p.f(\overrightarrow{e_p})$ **décrit** $Im(f)$. Dans l'exemple :

     $Im(f) = Vect[f(1), f(x), f(x^2)] = Vect[f(x), f(x^2)]$ ici et ces 2 vecteurs sont libres : $rg(f) = 2$.
   - Soit on cherche le noyau : $P'(x+1) = O \iff P' = O \iff P = cte$.

     $Ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$ de dimension 1 ; et donc $rg(f) = 3 - 1 = 2$.

2. Une forme linéaire $f : \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2x + 3y - z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$, de matrice $(2\ 3\ -1)$ non nulle ; donc de rang 1. $dim[Ker(f)] = 2$: plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $2x + 3y - z = 0$.

Démonstration du Théorème

Soit E_2 un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E (dim. finie) : $E = Ker(f) \oplus E_2$. Alors :

$f_{/E_2}$: $E_2 \to Im(f)$ est bijective (ci-après) d'où $dim[Im(f)] = dim(E_2) = dim(E) - dim[Ker(f)]$.

Injective : si $\overrightarrow{x} \in E_2 \cap Ker(f)$ forcément $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}_E$ car somme directe. Surjective : Si $\overrightarrow{y} \in f(E)$,

$\exists \overrightarrow{x} \in E / \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$; écrivons $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ selon $E = Ker(f) + E_2$: $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}_F + f(\overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_2})$.

21.2.2 Conséquence : Propriété

1. On sait déjà pour f linéaire $E \to F$ que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ inj.} \Rightarrow dimF \geqslant dimE \text{ (l'image d'une base étant libre)} \\ f \text{ surj.} \Rightarrow dimF \leqslant dimE \text{ (l'image d'une base étant gén.)} \\ \quad \text{enfin : } f \text{ bijective} \Longrightarrow dimE = dimF \end{array} \right.$

2. Inversement, si $\underline{dimE = dimF \text{ finie}}$, on a : f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.

   Démonstration $\underline{dimE = dimF \text{ finie}}$ et $Im(f) \subset F$:

   Avec le th. du rang : f inj. $\iff dim(E) = rg(f) \iff dim(F) = rg(f) \iff Im(f) = F$.

21.2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs ; et d'une matrice

Définitions: Soit $\overrightarrow{v}_1, ... \overrightarrow{v}_p \in F$. Leur rang de ces p vecteurs est $dim[Vect(\overrightarrow{v}_j)]$. Et le rang d'une matrice A est le rang des vecteurs colonnes.

Propriété: Le rang d'une A.L. est le rang des vecteurs colonnes d'une matrice quelconque représentant f c'est-à-dire, quand on changera de bases dans E et dans F, on aura une autre matrice A' (nouveaux vecteurs colonnes, cf. ch. Matrices), mais de même rang !

Démonstration

Voir que $\boxed{Im(f) = f(E) = Vect[f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), ..., f(\overrightarrow{e_p})]}$: les vecteurs colonnes d'une matrice (image d'une base) forment une famille **génératrice** de $Im(f)$. D'où : $rg(f) = dim[f(E)] = dim\,Vect[f(\overrightarrow{e_j})]$ $= rg[f(\overrightarrow{e_j})_{1 \leqslant j \leqslant p}] = rg(A)$; et donc, si f est représenté aussi par A', $rg(A) = rg(A') = rg(f)$!

Exemple : $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 1$. Donc si on résoud $A.X_{3,1} = O_{2,1}$ on aura $\underline{3 - 1 = 2}$ lettres arbitraires !

21.3 Opérations avec les matrices correspondant aux A.L.

21.3.1 Opérations linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), n \geqslant 1, p \geqslant 1$

1. $\boxed{\text{On définit}}$ l'égalité de 2 matrices : $A = B$ si **même taille** (n, p) et $\forall i, j :\ a_{ij} = b_{ij}$ ce qui signifie : mêmes A.L. associées, de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ avec les bases canoniques, notées $(\overrightarrow{e_j})$ $(\overrightarrow{f_i})$.

   Puis : $A + B$=Matrice $(f + g)$ ce qui donne $A_{np} + B_{np} = (A + B)_{np}$ de terme général $(a_{ij} + b_{ij})$
   Et : $\lambda.A$=Matrice $(\lambda.f)$ ce qui donne $(\lambda.A)_{np}$ de terme général $(\lambda.a_{ij})$.

   $\boxed{\text{Exemple}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; alors $A - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$.

2. <u>Théorème</u>

   > Soit $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$. Avec les 2 opérations indiquées, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un e.v. identique à $\mathcal{L}(E, F)$.
   > Et on voit maintenant que chacun est de dimension $n.p$: $\underline{dim\mathcal{L}(E_p, F_n) = dim\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = n.p}$.

   <u>Démonstration</u>
   1) On peut vérifier la définition d'e.v.
   2) Le cas $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Recherche d'une base : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ... + c'.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne une famille génératrice à 6 éléments. Notons $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.
   ils sont libres : faire $a.E_{11} + b.E_{12} + ... + c'.E_{23} = O_{23}$ qui donne les 6 coefficients nuls. Donc base.
   $\boxed{\text{Ainsi}}$ $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ensemble **de <u>toutes</u> les matrices 2,3** est un e.v. sur $\mathbb{R}$ de dimension finie 2.3=6.

21.3.2 Produit de matrices, correspondant à la composition

1. <u>Définition</u> $\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } A_{np} = \text{Matr}(f \in \mathcal{L}(E,F)),\ B_{mn} = \text{Matr}(g \in \mathcal{L}(F,G)),\ (B.A)_{mp} \text{ sera la matrice de} \\ gof : E = \mathbb{K}^p \ \underline{\text{base}}\ (\overrightarrow{e_1}...\overrightarrow{e_p}) \longrightarrow F = \mathbb{K}^n \ \underline{\text{base}}\ (\overrightarrow{f_1}...\overrightarrow{f_n}) \longrightarrow G = \mathbb{K}^m \underline{\text{base}}\ (\overrightarrow{g_1}...\overrightarrow{g_m})\end{array}}$

   <u>Théorème</u> $\boxed{\text{Le résultat est : } C_{mp} = (B.A)_{mp} = B_{mn}.A_{np}, \text{ le produit s'effectuant } \underline{\text{lignes par colonnes}}}$

   <u>Car</u> la $k$ième colonne de $B.A$, matrice de gof, <u>est</u> $g[f(\overrightarrow{e_k})]$: $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ ... & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ ... \\ a_{nk} \end{pmatrix}$. Fini.

   $\boxed{\text{Ainsi}}$ on a : $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ où, par exemple,

   $c_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}.a_{21} + b_{23}.a_{31}$. On devine que : $\underline{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.a_{jk}, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant p.}$

2. <u>Conséquences</u>

   > Les propriétés des A.L. se traduisent donc avec les matrices [bonnes tailles à choisir] :
   > $ho(gof) = (hog)of \Longrightarrow C.(B.A) = (C.B).A$;
   > $(h + g)of = (hof) + (gof) \Longrightarrow (C + B).A = (C.A) + (B.A)$;
   > $ho(g + f) = (hog) + (hof) \Longrightarrow C.(B + A) = (C.B) + (C.A)$;
   > $(\lambda.g)of = go(\lambda.f) = \lambda.(gof) \Longrightarrow (\lambda.B).A = B.(\lambda.A) = \lambda.(B.A)$.
   > Donc pour les matrices <u>carrées</u> $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau (et une algèbre) exactement comme $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

3. <u>Deux remarques.</u>

   – • Même si les produits $B_{mn}.A_{np}$ et $A_{np}.B_{mn}$ sont possibles ($\Longleftrightarrow p = m$) et ont de plus même taille ($p = m = n$), on sait qu'il n'y a pas commutativité en général. Notre exemple était :
   $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$; $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: deux symétries <u>non</u> commutatives. Il se traduit par :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B.A \neq A.B$. $\boxed{\text{Remplissage en lignes } \textbf{et} \text{ en colonnes à voir}}$

– • De même, au ch. précédent, on avait vu que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ était non intègre et on avait un exemple de matrice nilpotente. Re-construisons un exemple $(dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f))$:

$fof = O \iff \forall \overrightarrow{x} \in E : f[f(\overrightarrow{x})] = \overrightarrow{0}$ vrai $\iff Im(f) \subset Ker(f)$. $\boxed{\text{Essai dans } \mathbb{R}^2 :}$
Si $Im(f) = Ker(f) = Vect(\overrightarrow{\imath})$: $f(\overrightarrow{\imath}) = \overrightarrow{0}$ [première colonne] ; $f(\overrightarrow{\jmath}) = k.\overrightarrow{\imath} \in Im(f)$, $k \neq 0$
$[k = 0 \Longrightarrow Ker(f) = \mathbb{R}^2,\ f = O]$. $k = 1$ donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ et $A^2 = A.A = O$!

21.3.3 Matrice inverse

1. Notations : $\boxed{\text{Soit } f \in \mathcal{L}(E,F). \text{ On dit que : } f \text{ est inversible à gauche s'il existe } g \in \mathcal{L}(F,E) \text{ tel que } gof = Id_E \text{ et } f \text{ inversible à droite s'il existe } h \in \mathcal{L}(F,E) \text{ tel que } foh = Id_F.}$

   En dim infinie, on peut avoit f inversible d'un côté seulement : cf. Exemples du ch. précédent.

   En dimension finie, voir après. Quand f inversible, on note $A^{-1} = Matr(f^{-1}, \overrightarrow{f_i}, \overrightarrow{e_j})$.

2. Attention :
   • On sait que A (ou f et dim. finies) inversible $\Longrightarrow dimE = dimF$ soit A forcément carrée.
   • Mais réciproque fausse : $O_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est carrée non inversible ! Idem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^2 = A.A = O$ avec $A \neq O$ est non inversible. (Sinon $A.A = O \Longrightarrow A^{-1}.A^2 = A^{-1}.O$, ce qui est $A = O$ et n'est pas le cas). On peut aussi dire : **les vecteurs colonnes de A sont liés.**

3. Théorème

   Si $dimE = dimF$ finie, on a : f inversible $\iff f$ inv. à gauche $\iff f$ inv. à droite.
   Traduction matricielle : **Pour A carrée (sinon non inversible),**
   A_{nn} inversible $\iff$ inv. à gauche $\iff$ inv. à droite. **Calcul : cf. après.**

   Démonstration
   • f inversible à gauche $\Longrightarrow f$ inversible :
   Ayant $gof = Id_E$, on a gof injective ; d'où f inj. [connu] donc, avec $dimE = dimF$ finie, bijective.
   • f inversible à droite $\Longrightarrow f$ inversible :
   Ayant $foh = Id_F$, on a foh surjective ; d'où f surjective [idem] ; donc, [idem] bijective.

21.3.4 Transposée d'une matrice

1. Matrice n, p : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}_{3,2}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}_{2,3}$.

   Propriétés $\boxed{\text{Avec de bonnes tailles : } {}^t({}^tA) = A\,;\ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB\,;\ {}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA\,;\ \text{[faciles]} \quad \text{Et [plus dur] (*)} \quad {}^t(B_{mn}.A_{np}) = ({}^tC)_{pm} = ({}^tA)_{pn}.({}^tB)_{nm}.}$

   Démonstration en compléments (*) : $(B.A) = (c_{ik})_{mp}$.

   Posons ${}^tC = (\gamma_{ki})_{pm}$, alors : $\gamma_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}.\alpha_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}.\beta_{ji}$. Fini.

2. Cas des matrices carrées

   $\boxed{\text{Soit } A \text{ carrée } n,n\,; \text{ on dit que } A \text{ est symétrique si } {}^tA = A\,; \text{ et antisymétrique si } {}^tA = -A.}$

   Matrices symétriques et antisymétriques 2x2 ? Montrer que l'on a deux sous e.v. supplémentaires.

   Voir que : $\mathcal{S} = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$; $\mathcal{A} = Vect(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$; $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. Donc $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$, qui est de dimension : 3+1=4 : c'est $\mathcal{M}_{2,2}$ car inclusion et même dimension finie.

   Attention : $O_{2,2}$ matrice symétrique, mais non matrice de symétrie et :
   $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de symétrie $(A^2 = I_2)$, mais non symétrique : ne pas confondre !

M+ **Exercices: Applications linéaires en dimension finie** **PTSI**

---

1. Matrices inverses. $\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Inversion en ligne}} : \textbf{ On a } Y = A.X \Longleftrightarrow A^{-1}.Y = X, \textbf{ si } A \textbf{ inversible}. \\ \text{Inverser une matrice c'est inverser un système par le pivot de Gauss par ex.}\end{array}}$

   Inverser les matrices $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1... & 1\\ 0 & 1... & 1\\ ... & & \\ 0 & 0... & 1\end{pmatrix} = T_n$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $\boxed{\text{en dim. finie, montrer : } Ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ supplém.} \Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}.}$

3. (a) En dimension quelconque, si $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifier que : $fof = O \Longleftrightarrow Im(f) \subset Ker(f)$.
   (b) Soit E de dim. finie n sur $\mathbb{K}$. Montrer : $Ker(f) = Im(f) \Longleftrightarrow [f^2 = O \text{ et } n = 2.rg(f)]$.

4. Rang de $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$? $D = (d_{i,j})_{2,3}$ et $E = \underset{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2}{(\ e_{i,j}\ )_{3,3}}$ sont-elles inversibles ?

5. (a) Dans $\mathbb{R}[x]$. Vérifier que $f : P(x) \mapsto P(x+1)$ est un endomorphisme ; donc aussi $\Delta = f - Id$.
   (b) Dans $E = \mathbb{R}_3[x]$: Noyau, image et rang de Δ ? Vérifier que $\Delta^4 = O$. Inverse de $Id - \Delta$?
   (c) Puis (avec $E = \mathbb{R}_3[x]$) inverse de $f = Id + \Delta$? Explisciter les matrices 4x4 de f et de f^{-1}.

6. Si f, g (et gof) automorphismes, montrer que : $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$. $(BA)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$ $\begin{pmatrix} si \\ matr. \\ (n,n)\end{pmatrix}$

7. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vérifier que $f : M \longmapsto {}^tM$ est une symétrie vectorielle ; en déduire deux sous e.v. supplémentaires et préciser les dimensions. [On pourra voir : $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, $fof = Id$. etc].
   Complément : Ecrire enfin la matrice 4x4 de f dans la base usuelle $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

8. $\boxed{\text{Rang.}}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E, F de dimensions finies ; et g ... (selon les cas)
   (a) Montrer que $rg(f) \leqslant dim(E)$; $rg(f) \leqslant dim(F)$; (*) $rg(gof) \leqslant min[rg(f), rg(g)]$
   (b) Montrer que $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$; puis $\mid rg(f) - rg(g) \mid \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
   (c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$. Montrer : $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = k.f$ (si $k \neq 0, \dfrac{1}{k}f$ projecteur).

9. (a) (*) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$; montrer que :
   $Ker(f) = Ker(gof) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0_F}\}$. $Im(g) = Im(gof) \Leftrightarrow F = Im(f) + Ker(g)$.
   (b) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $dim(E)$ finie : $Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

10. (*) Soit E de dim. finie f, g endomorphismes tels que $E = Im(f) + Im(g) = Ker(f) + Ker(g)$.
    Montrer que ces sommes sont directes et $f + g$ inversible.

Chapitre 22

Calcul matriciel

22.1 Diverses matrices pour une application linéaire

22.1.1 Composantes de l'image par une A.L. (rappel)

1. Théorème $\boxed{\text{Pour } f \text{ linéaire : } E \text{ base } (\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_p}) \to F \text{ base } (\overrightarrow{f_1}, ...\overrightarrow{f_n}) \text{ on a } \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \underline{Y = A.X}}$

   Déjà vu au ch. précédent et utilisé : c'est le remplissage en ligne. $A = Matr(f, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{f_i})$

2. Conséquence

Inversion en ligne : **On a** $Y = A.X \Longleftrightarrow A^{-1}.Y = X$, **si** A **inversible.**
Inverser une matrice c'est inverser un système ; par le pivot de Gauss par ex.

   $\boxed{\text{Exemple}}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad Y = A.X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = x' \\ 0.x + y + z = y' \\ 2x + 2y - z = z' \end{cases}$

   $\underset{pivot}{\Longleftrightarrow} ... \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} . \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. $\qquad$ Donc A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4} . \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

   Voir les calculs non rédigés

3. Remarque $\boxed{A \text{ inversible (nécessairement carrée)} \Longrightarrow {}^tA \text{ inversible et } ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).}$

   Démonstration On a donc A carrée et $A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$. En transposant : ${}^t(A^{-1}).{}^tA = I_n$ donc ${}^tA$ inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$. (Rappelons que pour une matrice carrée : inversible d'un côté $\Longrightarrow$ inversible). Fini. Question. Pourquoi est-ce une équivallence ci-dessus ?

22.1.2 Changement de bases pour un vecteur (donné)

1. Définitions

   Soit $\mathcal{B}(\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_p})$ et $\mathcal{B}'(\overrightarrow{e_1}', ...\overrightarrow{e_p}')$ deux bases ; supposons que $\overrightarrow{e_1}' = p_{11}.\overrightarrow{e_1} + p_{21}.\overrightarrow{e_2} + ... + p_{p1}.\overrightarrow{e_p}$...

   Par définition : $\boxed{P_{pp} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & ... \\ p_{21} & ... & ... \\ ... & & \\ p_{p1} & ... & \end{pmatrix} \text{ est appelée matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}'.}$

   On met les nouveaux vecteurs colonnes à l'aide des anciens.

   $\boxed{\text{Exemple}}$ Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$; nouvelle base (pourquoi ?). Ici $P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overrightarrow{I} & \overrightarrow{J} \end{array} & \end{array}$

   Question : peut-on lire à l'envers : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{I} + \overrightarrow{J}$? NON ! (pas ici).

2. Théorème $\boxed{\text{Soit un même vecteur } \overrightarrow{x} \text{ de matrice } X \text{ dans } \mathcal{B} \text{ et } X' \text{ dans } \mathcal{B}' \text{; alors } X = P.X'}$

Résultat nouveau très important.

Démonstration facultative (*)

Soit f l'endomorphisme de matrice P dans $(\overrightarrow{e_j})$; on a $f(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{e_j}'$ et f bijectif.

Soit $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j} = \sum_{j=1}^{p} x'_j.\overrightarrow{e_j}'$; alors $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\overrightarrow{e_j}'$.

Mais comme la matrice P de f est connue dans la base $\mathcal{B}$, on ne peut rien faire !

Essayons donc l'automorphisme f^{-1} de matrice P^{-1} dans $\mathcal{B}$.

Alors $f^{-1}(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{p} x'_j.\overrightarrow{e_j}$. $\overrightarrow{x}$ et $f^{-1}(\overrightarrow{x})$ sont connus dans $\mathcal{B}$! Donc : $X' = P^{-1}.X$.

3. Conséquence.

$\boxed{\textbf{On a même : } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}"} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}"}. \text{ D'où } (\mathcal{B} = \mathcal{B}") : P \textbf{ inversible et } P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}}$

Démonstration

On écrit $X = P_1X'$; $X' = P_2X"$. Donc $X = P_1.P_2X" = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}"}.X"$ et on termine aisément.

Bien retenir cette formule de changement de bases **pour les vecteurs** : $\boxed{X = P.X'}$

Remarque : (si on veut)

On peut inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ en colonnes... Ici : $\begin{cases} \overrightarrow{I} = 2.\overrightarrow{i} + 0.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k} \\ \quad ... \\ \quad ... \end{cases}$

Analogue à ci-dessus (exercice).

22.1.3 Effet d'un changement de bases sur une A.L.

1. Notations

Soit $f : \overrightarrow{x} \in E \longrightarrow f(\overrightarrow{x}) \in F$ linéaire.

Avec les bases $(\overrightarrow{e_1}, ...\overrightarrow{e_p})$ et $(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n})$, on a la matrice A ;

Avec les bases $(\overrightarrow{e_1}', ...\overrightarrow{e_p}')$ et $(\overrightarrow{f_1}', ..., \overrightarrow{f_n}')$, on a la matrice A'.

On note P_{pp} et Q_{nn} les matrices inversibles de changement de bases dans E et dans F.

Soit $\overrightarrow{x}$ de matrice X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$; idem pour $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$ avec Y et Y'.

On sait que : $Y = A.X$; $Y' = A'.X'$ (§1) et $X = P.X'$; $Y = Q.Y'$ (§2). Donc :

$Y' = Q^{-1}.Y = Q^{-1}AX = Q^{-1}.A.P.X' = A'.X'$.

L' unicité donne : $A' = Q^{-1}AP$ et $rg(A) = rg(A') = rg(f)$ (vu).

2. Théorème

A_{np}, A'_{np} représentant la même A.L. mais dans des bases différentes $\Rightarrow A' = Q^{-1}AP$
Deux matrices vérifiant une telle relation sont dites équivalentes ; elles ont même rang

Exemple

Soit $f : P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \longmapsto P'(x+1) \in \mathbb{R}_1[x]$; dans les bases $(1, x, x^2)$ et $(1, x)$, la matrice est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Prenons les bases $[1, (x+1), (x+1)^2]$ et $[1, x-1]$ alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ par $Q^{-1}.A.P$; **ou directement :** le 3ème vecteur colonne par ex : $f((1+x)^2) = 2(x+2)$ exprimé en base $(1, x-1)$: $6.1 + 2.(x-1)$

22.1.4 Conséquences sur le rang

1. Propriétés

D'abord : $r = rg(A_{np}) \leqslant min(n,p)$; et A inversible $\Longleftrightarrow r = n = p$. Ensuite :
Par une opération élémentaire sur les lignes (ou colonnes) d'une matrice, le rang est inchangé.

Démonstration

1) On a $r = dim[Im(f)] \leqslant dim(F) = n$; $r = dim[Im(f)] = dim(E) - dim[Ker(f)] \leqslant dim(E) = p$.
Et : A inversible $\Longrightarrow n = p$ [vu] et aussi $r = dim[Im(f)] = dim(F) = n$ car surjective.
Inversement $r = n = p \Longrightarrow f$ surjective de E dans F de même dim. finie : f inversible.

2) **En compléments :** Faisons **quelques calculs** : sur $A_{3,2}$

- Prenons I_3 ; remplaçons Ligne 3 par Ligne 3+λ.(ligne 1) $(L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda.L_1)$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ; calculons } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 + \lambda.a_1 & c_2 + \lambda.a_2 \end{pmatrix}$$: le même effet sur A.

Et comme on sait (ch.21) que : $rg(A') = rg(Q^{-1}.A.I_2) = rg(A)$, le rang n'a donc pas changé !

Remarque : La matrice à gauche est ici appelée "matrice de transvection".

- Il y a deux autres opérations élémentaires sur les lignes à voir : c'est la même chose [à faire].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = ...$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = ...$$

Remarque : La 1ère matrice à gauche est dite "de transposition" ; la 2ème de "dilatation"

- Et sur les colonnes ? C'est la multiplication "à droite" : Echangeons les colonnes 1 et 2 de I_2,

noté $C_1 \leftrightarrow C_2$ on a : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ ou $A.P = A'$: on a même effet sur A.

Comme : $rg(A') = rg(I_3.A.P) = rg(A)$ [P inversible] le rang n'a toujours pas changé !

2. Remarque (rang de la transposée)

Pour A_{np} : $Im(A) \subset \mathbb{K}^n$; $Im(^tA) \subset \mathbb{K}^p$. Mais : $rg(A) = dim[Im(A)] = dim[Im(^tA)] = rg(^tA)$!

Démonstration (*) En effet, prenant une base judicieuse de $E = E_2 \oplus Ker(f)$: $\overrightarrow{u}_1, ... \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{v}_{r+1} ..., \overrightarrow{v}_p$ [cf. théorème du rang] et de $F = Im(f) \oplus F_2$: $f(\overrightarrow{u}_1), ..., f(\overrightarrow{u}_r), \overrightarrow{b}_{r+1}, ..., \overrightarrow{b}_n$, on trouve P, Q

inversibles telles que : $Q^{-1}A_{np}P = (J_r)_{np} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ où les r premières lignes et colonnes sont I_r (des 0 partout ailleurs) et $r = rg(f) = rg(A) = rg(J_r)_{np}$.

Alors : $^tP.^tA.^t(Q^{-1}) =^t (J_r)_{np} = (J_r)_{pn}$ qui est aussi de rang r ; donc : $rg(^tA) = r$.

22.2 Diverses matrices pour un endomorphisme

22.2.1 Théorème (Effet d'un changement de Base)

Ici, A est carrée (n, n) et mêmes bases à gauche et à droite ; par suite $Q = P$.

Donc

A_{nn}, A'_{nn} représentant le même endomorphisme, mais dans des bases différentes, on a ici $A' = P^{-1}.A.P$. Deux matrices A et A' vérifiant une telle relation sont dites semblables. Elles ont alors même rang ; même trace (voir après) et même déterminant (ch. suivant). Noter enfin : $A = P.A'.P^{-1}$ et $A^n = P.(A')^n.P^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$. [facile mais à bien voir].

22.2.2 Exemple

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $\begin{cases} x' = (5x - 2y - z)/6 \\ y' = (-x - z)/2 \\ z' = (x + 2y + 7z/6 \end{cases}$; prouver que $fof = f$; conclusion ?

2. Solution

1) On a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Puis $\boxed{A^2 = A \text{ : par calcul.}}$ On sait alors que $(f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $fof = f) \Longrightarrow f$ proj. sur $Ker(f - Id) // Ker(f)$. Ici

• $Ker(f - Id)$: $f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ou $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ ou $AX = X$ ou $AX - X = O$: ... $\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -3x - 6y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

C'est le plan vect. $\Pi : x + 2y + z = 0$. Ou bien c'est $\boxed{\text{ici}}$ $Im(f)$, engendré par : $6.f(\overrightarrow{\imath}), 6f(\overrightarrow{\jmath}), 6.f(\overrightarrow{k})$

Retrouver Π (de dim. 2 !) ainsi : $\Pi = Vect[6.f(\overrightarrow{\imath}), 6f(\overrightarrow{\jmath}), 6.f(\overrightarrow{k})]$ **cf. sous.e.v. engendré**.

• $Ker(f)$: $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ ou $AX = O \Longleftrightarrow$ ... $\begin{cases} 5x - 2y - z = 0 \\ x + 0.y + z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y + x + 7z = 0 \\ x + z = 0 \\ 6x + 6z = 0 \end{cases}$ ... C'est la droite vect. : $\Delta = Vect(\overrightarrow{c}) = \mathbb{R}.\overrightarrow{c} = \mathbb{R}. \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, base de Π.

Conclusion : f est une projection de rang 2 sur Π // Δ.

2) Changement de base ici :

Forcément $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \Delta$ (ce qu'on peut voir car $\Delta \not\subset \Pi$). Alors $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une nouvelle base.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule P^{-1} et $P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (le faire). Ceci **sans calcul aussi** car : $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$!

22.2.3 Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

1. Par définition : $\boxed{\text{Pour } A_{nn} \text{ carrée, la trace de } A(a_{i,j}) \text{ est } Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = Tr(^tA).}$

2. Propriétés :

$Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire, soit : $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$ et $Tr(\lambda.A) = \lambda.Tr(A)$; vérifiant de plus : $Tr(B_{pn}.A_{np}) = Tr(A_{np}.B_{pn})$! (*)

Démonstration (*) : Attention, pour $Tr(A+B)$, chaque matrice est (n,n).

Pour : $Tr(B_{pn}.A_{np}) = Tr(A_{np}.B_{pn})$, notons : $B.A = C = (c_{ik})$.

On a : $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{p} c_{ii} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$; et sous cette dernière forme, on reconnait : $Tr(AB)$!

3. Conséquence : Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
   Soit f un endomorphisme représenté par A dans la base $\mathcal{B}$ et par $P^{-1}.A.P$ dans $\mathcal{B}'$.
   On a $Tr(P^{-1}.A.P) = Tr(A.P.P^{-1}) = Tr(A)$, qui est donc indépendante de la base choisie !

   On appelle $Tr(f)$, f endom. en dim. finie, la trace de n'importe qu'elle matrice représentant f.

   Question : Que représente $Tr(f)$? Dans le cas général, ce n'est pas clair.

   Exercice : Dans le cas particulier des projecteurs, en dimension finie, $Tr(p) = rg(p)$. cf. Ex.5.(a).

   Vérifions déjà sur l'exemple vu, f projecteur : $rg(A) = Tr(A) = 2 = Tr(D)$.

22.3 Matrices carrées d'ordre n : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [Anneau, même algèbre]

22.3.1 Les 3 opérations (révision)

$+$ des matrices ; $\centerdot$ des matrices [loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$] ; . par une constante de $\mathbb{K}$ [loi externe].
On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$ de dimension n^2 (ayant $E = \mathbb{K}^n$, $dimE = n$) ; et que, si $dimE \geqslant 2$, c'est un anneau non commutatif, non intègre. Attention $(A \centerdot B = A \centerdot C, A \neq O) \not\Rightarrow B = C$.

22.3.2 Matrices carrées particulières

1. $h_k : \overrightarrow{x} \longmapsto k.\overrightarrow{x}$, homothétie vect. de rapport k, si $k \neq 0$ a pour matrice dans toute base : $k.I_n$.

2. La $\boxed{\text{proj. vect.}}$ sur $Vect(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ // $Vect(\overrightarrow{k})$ dans $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Tandis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la sym. vect. / $Vect(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ // $Vect(\overrightarrow{k})$ dans $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

3. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$: $\left\{ \begin{array}{l} D \text{ est appelée matrice diagonale (carrée)} \\ T \text{ appelée triangulaire supérieure (carrée)} \end{array} \right.$

   Calculs à bien voir : Pour les matrices diagonales $D.D' = D'.D$ et D^k, $k \in \mathbb{N}^*$ facile.
   Pour les triangulaires : T, T' triang. sup. $\Rightarrow T.T'$ aussi mais $T.T' \neq T'.T$ en général. Surtout
   $\boxed{T \text{ inversible} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0 \text{ (et } T^{-1} \text{ triang.)}}$: vaut donc **aussi** pour les matrices diagonales.
   Analogue pour les matrices triangulaires inférieures (${}^tT$ triangulaire inférieure).

   Démonstration. Bien connaitre le cas des matrices diagonales pour commencer. Ensuite, vérifier que
   $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda' & a' \\ 0 & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & \dots \\ 0 & \mu\mu' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda' & a' \\ 0 & \mu' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & * \\ 0 & \mu\mu' \end{pmatrix}$ en général. Equivalences :

   $(\Leftarrow)$ Si $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$: résolvant $T \centerdot X = O$, on a $X = O$; d'où $T_{(n,n)}$ est injective ; donc bijective.
   $(\Rightarrow)$ Inversement, si $\lambda_k = 0$, $\overrightarrow{v}_1, \dots \overrightarrow{v}_k$ sont dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e}_{k-1})$: (pourquoi ?) donc liés !
   L'endomorphisme associé n'est pas bijectif (l'image d'une base non base) ; T non inversible.

M+ **Exercices: Calcul matriciel** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Calcul de } M^n}$ Soit $A = \begin{pmatrix} b & b-a \\ -a-b & -b \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2 puis A^n, $n \in \mathbb{N}^*$. (A^{1917} ?)
   (b) Calculer T^2; T^3; puis T^n, $n \in \mathbb{N}^*$. [Rappeler l'identité $a^{n+1} - b^{n+1} =$?]
   (c) En écrivant $C = I_3 + N$ [<u>Binôme de Newton</u>, N nilpotente commutant avec I], calculer C^{13}.
   (d) Calculer J^2 en fonction de $I = I_3$ et J ; <u>en déduire que J est inversible</u> et préciser J^{-1}. Préciser le reste de la division de x^n par x^2−x−2. Puis : J^n. (par "polynôme annulateur".)

2. $\boxed{\text{Utilité du calcul de } M^n,\ M \text{ matrice.}}$ Soit $(u_n), (v_n)$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver A telle que $X_{n+1} = A.X_n$; en déduire que $X_n = A^n.X_0$.
   (b) On va chercher A^n par un changement de base ici.
   Notons $A = Matr[f, (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})]$, f endomorphisme. Calculer $f(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$ puis $f(2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath})$.
   Déduire $\exists P$ inversible : $P^{-1}.AP = D$, où $D = diag(1, 4)$ (**car ci-dessus** $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, $f(\overrightarrow{v}) = 4\overrightarrow{v}$.) Conclure que : <u>$A = P.D.P^{-1}$</u>; <u>$A^n = P.D^n.P^{-1}$</u> et achever les calculs.

3. Soit A, B carrées telles que $A+B+AB = O$; montrer que $AB = BA$. [<u>Ind</u>. Calculer $(I+A)(I+B)$.]

4. Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ préciser $\mathcal{C}(A) = \{M : A.M = M.A\}$. Montrer que $M^2 = A \Longrightarrow M \in \mathcal{C}(A)$.

5. $\boxed{\text{Avec la trace}}$ (a) Prouver que pour un projecteur, en dimension <u>finie</u>, $Tr(p) = rg(p)$. $\left(\begin{matrix} \textit{Base} \\ \textit{judicieuse} \end{matrix}\right)$.
   (b) Montrer qu'on <u>ne peut pas</u> trouver deux matrices (carrées) A, B telles que $AB - BA = I_n$.

6. $\boxed{\text{Vérifier que}}$ I_2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même rang, trace, déterminant ; <u>mais ne sont pas semblables</u>.

7. $\boxed{\underline{\text{Discussion}} \text{ de l'équation } f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}\,(*),\ f \in \mathcal{L}(E,F)}$ Que dire si $\overrightarrow{b} \notin Im(f) = f(E)$?
   <u>On suppose maintenant $\overrightarrow{b} \in Im(f)$</u> et soit $\overrightarrow{x_1}$ une solution. Vérifier alors $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_1} \in Ker(f)$.
   Donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{t}$ dans $Ker(f)$, noté "$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + Ker(f)$", énoncé comment ?
   <u>1er exemple</u> : $A_{np}.X_{p1} = B_{n1}$. Nombre de solutions selon le rang $r = rg(A)$ (quand il y en a).
   <u>2ème exemple</u> : $y \underset{f}{\longmapsto} a(x)y' + b(x)y$. Ici $(*)$ est : $f(y) = c(x)$. Préciser le cadre convenable.

8. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices du type $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que <u>$\mathcal{A}$ est un sous e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$</u>. Calculer U^2, V^2, UV, VU ; <u>structure de $(\mathcal{A}, +, .)$</u> ?

9. Soit $\mathcal{A} = \{a.A + b.I_2,\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De $A^2 + A - 6I = O$, <u>déduire que</u> $\mathcal{A}$ est stable par **.**. Résoudre x^2 =x dans $\mathcal{A}$; vérifier que les solutions autres que O et I forment une base ; déduire que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau commutatif (!), non intègre.

Chapitre 23

Déterminants 2x2, 3x3, etc.

23.1 Déterminants 2x2

23.1.1 Notations

Soit le système 2x2 (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $\boxed{(S) \Leftrightarrow x\overrightarrow{v}_1 + y\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow A.X = B \Leftrightarrow f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}.}$

où : $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et : f endomorphisme de matrice A, tout cela dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$ par exemple.

Remarques On est en dim. 2 et A est carrée.

- D'où : $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ libres $\Leftrightarrow$ générateurs $\Leftrightarrow$ base $\Leftrightarrow$ A inversible $\Leftrightarrow$ f bij. $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective !
- Dans le cas de matrice inversible :

  le système a une solution unique; celà $\forall \overrightarrow{b}$ (quel que soit le second membre), à savoir : $X = A^{-1}.B$.

23.1.2 Résolution

Posons $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a.b' - b.a'$; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = c.b' - b.c'$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a.c' - c.a'$ de même :

Théorème

> On a A inversible $\Leftrightarrow D \neq 0$, D étant appelé déterminant principal; dans ce cas on dit système de Cramer, l'unique couple solution est $x = \dfrac{D_x}{D}, y = \dfrac{D_y}{D}$. Si $D = 0$, on regarde.

Démonstration

1) Voir que $D = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ liés (exercice). De même formules de Cramer laissées; **et cf. III.**

2) Si $D = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Remarquons pour } f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} : \bullet \text{ Soit } \overrightarrow{b} \notin Im(f) : \text{ce qui équivaut à pas de solution.} \\ \bullet \text{ Soit } \overrightarrow{b} \in Im(f) : \text{ au moins une solution } \overrightarrow{x_1} \text{ et alors (linéarité) } "\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + Ker(f)" \\ \quad \text{dans ce cas, il y a : } dimKer(f) = \text{(nombre d'inconnues} - \text{rang) lettres arbitraires.} \end{array} \right.$

Exemple Résoudre $\begin{cases} m.x + y = m - 1 \\ x + my = m^2 + 1 \end{cases}$

On a $D = m^2 - 1$. Donc pour $m \neq \pm 1$, une solution unique (finir les calculs).

Si $m = 1$, le système devient $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Impossible.

Si $m = -1$, on a $\begin{cases} -x + y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow x - y = 2$ Infinité de solutions (une droite affine).

23.2 Déterminants 3x3

23.2.1 Notations et résultats énoncés

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; on va considérer dét$(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Si $\overrightarrow{v}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ analogues, exprimés en base $\mathcal{B}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de E, on dira aussi que c'est : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$.

1. dét(A) est un nombre [on dit "forme"] et $\boxed{\text{dét}(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible} \Leftrightarrow \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3 \text{ nouvelle base.}}$
2. Linéarité /1ère colonne.
   - $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) + \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ et
   - $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\lambda \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \lambda.\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ Idem / chaque colonne : "forme trilinéaire".

   $\boxed{\text{D'où}}$ 1) $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1 + \lambda \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) + 0$ [développer le terme à gauche]

   2) $\text{dét}(\lambda.A) = \lambda^3.\text{dét}(A)$; alors que pour les dét 2x2 : $\begin{vmatrix} \lambda.a & \lambda.b \\ \lambda.c & \lambda.d \end{vmatrix} = \lambda^2. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$!
3. Si on transpose 2 colonnes, on change le signe : forme trilinéaire "alternée" (ou "antisymétrique").

   $\boxed{\text{D'où}}$ $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_1) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ (2 changements de signes.)
4. Développement suivant une colonne de $A = (a_{i,j})$.
   - Supprimons ligne i, colonne j : il reste un déterminant 2x2, noté D_{ij} appelé mineur relatif à a_{ij}.
   - Posons ensuite $\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}}$ Δ_{ij} est appelé cofacteur de a_{ij}

   Exemple : le cofacteur de a_{32} est $(-1)^{3+2}. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Les signes : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

   - Développement/Colonne 2 : $\text{dét}(A) = a_{12}.\Delta_{12} + a_{22}.\Delta_{22} + a_{32}.\Delta_{32}$. Idem / autres colonnes.

   $\boxed{\text{D'où}}$ 1) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 \\ * & * & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$. [Colonne 3] On retrouve $\boxed{A \text{ (triang.) inversible} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{3} \lambda_k \neq 0.}$

   2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{11}.a_{32}.a_{23}$.

   C'est la règle de Sarrus : Mais si A contient des lettres, on vise une expression **factorisée**.

23.2.2 Des exemples

. $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 2 & 5 & 17 \\ 3 & 6 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -6 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 3 & -6 & -20 \end{vmatrix} = (-3).(-1). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 = 6$

(En faisant $C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1$; puis $C_3 \leftarrow C_3 - 13C_1$; mise en facteurs C_2, C_3 ; $C_3 \leftarrow C_3 - 9C_2$;...)

. $D = \begin{vmatrix} 1 & cos(x) & cos(2x) \\ cos(x) & cos(2x) & cos(3x) \\ cos(2x) & cos(3x) & cos(4x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & cos(x) & 2.cos(x).cos(x) \\ cos(x) & cos(2x) & 2.cos(2x).cos(x) \\ cos(2x) & cos(3x) & 2.cos(3x).cos(x) \end{vmatrix}$ (avec $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$)

Et donc : $D = 0$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) car les vecteurs colonnes sont liées.

. $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 1-a & 0 \\ 2a & 0 & 1-2a \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 2a & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1)(3a+1)$

(fin par Sarrus ; on aurait pu faire $C_2 - C_1$ ... L'important est qu'on sache quand D est non nul).

23.2.3 Autres résultats

1. $\boxed{\text{dét}({}^tA)=\text{dét}(A)}$ Donc
• Le caractère linéaire a lieu sur chaque ligne.
• Egalement le caractère alterné.
• Enfin, on peut développer par rapport à une ligne.
Dans l'exemple vu, pour $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \end{vmatrix}$: si on remplace L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$ sans changer le résultat, on voit que $3a + 1$ se met de suite en facteur.

2. $\boxed{\text{dét}(B.A)=\text{dét}(B).\text{dét}(A).}$ (matrices carrées). Donc
• Souvent $B.A \neq A.B$; cependant même déterminant (et même trace).
• Si A inversible, $A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$ donne dét(A^{-1}).dét(A)=1 ; donc $\boxed{\text{dét}(A^{-1}) = 1/\text{dét}(A).}$
• Déterminant d'un endomorphisme en dim finie (2 ou 3) :
On a donc f représenté par A ou par $P^{-1}AP$ selon les bases ; or dét$(P^{-1}AP)$=dét(A). D'où

<u>Définition</u> Pour f endomorphisme en dim. 2 ou 3, on appelle dét(f) le déterminant de n'importe quelle matrice représentant f.

3. Remarques
• Pour A carrée, dét$({}^tA.A)$ =dét$(A)^2$.
• $Tr(B.A)$ inconnue ; dét$(A + B)$ inconnu.
• Si A_{33} antisymétrique : ${}^tA = -A \Rightarrow \text{dét}({}^tA) = \begin{cases} \text{dét}(A) \text{ et :} \\ (-1)^3.\text{dét}(A) \end{cases}$ donc dét(A)=0.
Mais faux pour les matrices antisymétriques 2x2 : $\begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} = c^2$.

23.2.4 Déterminant de Van Der Monde

Il s'agit de $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = V(a,b,c)$. On a $D = (b-a)(c-a)(c-b)$; donc <u>$D \neq 0 \Leftrightarrow a, b, c$ distincts.</u>

Démonstration[1]

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a). \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = ...$$

23.2.5 Généralisation

. Tout se généralise au cas $n = dim(E) \geqslant 3$, sauf la règle de Sarrus (un dét. 4x4 : $4! = 24$ termes).
. Par exemple : pour f endomorphisme (f bijectif) $\Leftrightarrow$ dét$(f) \neq 0$ et dét(gof)=dét(g).dét(f).
Ou aussi, dét$(\lambda.A) = \lambda^n$.dét(A). Exercices (*) : dét$(|\ i-j\ |)_{n,n} = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$;

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I \end{vmatrix} = det(A).det(C) ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n & 1 & 2 & ... & n-1 \\ n-1 & n & 1 & ... & n-2 \\ ... & & & & \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.\frac{n^{n-1}.(n+1)}{2}.$$

---

[1] Autre preuve :
Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$: $D(x)$ est un <u>polynôme en x</u> de degré au plus 2, de terme dominant $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} .x^2$;
Si $b = a$, déterminant nul : 2 lignes égales.
Si <u>$b \neq a$</u>, c'est un polynôme de degré 2, nul en a, b distinctes ; donc $D(x) = (b-a)(x-a)(x-b)$.

23.3 Utilisations

23.3.1 Système carré 3x3

Soit $(S)\left\{\begin{array}{c} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a"x+b"y+c"z=d" \end{array}\right.$. Comme pour les systèmes 2x2, on définit : D [déterminant principal]

et D_x [remplaçant Colonne des x par Celle du 2è membre], D_y, D_z : idem.

Alors $\boxed{D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible} ; \ \text{solution unique } x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}, z=\frac{D_z}{D}. \qquad \text{Si } D=0, \text{ on regarde.}}$

Démonstration des "formules de Cramer": où l'on voit l'importance de la linéarité.

Déjà $(S) \Longleftrightarrow x\overrightarrow{v}_1+y\overrightarrow{v}_2+z\overrightarrow{v}_3=\overrightarrow{b}$. Pour x [et analogue pour les autres]

on a : $\text{dét}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \text{dét}(x\overrightarrow{v}_1+y\overrightarrow{v}_2+z\overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)=x.\text{dét}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$. Donc : $D_x=x.D$.

Exemples $(S_1)\left\{\begin{array}{l} 2x \quad +\lambda y \quad -z=5 \\ (\lambda-5)x+3y+7z=7 \\ x \quad +3y \quad +2z=4 \end{array}\right.$ $\qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} x \quad +y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x \quad -y \quad +2z \quad = \quad 0 \\ 2x \quad -my \quad +3z=m+2 \end{array}\right.$

Pour (S_1) $D \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \notin \{1,6\}$; si $D=0$, pivot de Gauss. Pour (S_2), $D=m(m-2)(m+2)$.

23.3.2 Matrice inverse d'une matrice carrée

On a $\boxed{A \text{ inversible} \Leftrightarrow det(A) \neq 0 ; \text{ dans ce cas } A^{-1}=\frac{1}{det(A)}.\left(\begin{array}{c}\text{Matrice} \\ \text{transposée} \\ \text{des cofacteurs}\end{array}\right) \text{ et } \ \text{dét}(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}.}$

Démonstration

Car : $A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1=\frac{1}{det(A)}.\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{D}[y_1.\Delta_{11}+y_2.\Delta_{21}+y_3.\Delta_{31}]$; x_2; x_3 idem.

Remarques

- Pour une matrice 3x3, ça fait 10 déterminants ! (et transposer) ! C'est donc une formule théorique.
- Si matrice 2x2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Et $det(A^{-1})=\frac{1}{(ad-bc)^2}.(ad-bc)$!

23.3.3 Equation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (sur un exemple déjà vu avec le Pivot)

. 1ère solution : $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi=Vect[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}] \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta : \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ... cf. ch. E.v.

. 2ème solution chercher $(a,b,c) \neq (0,0,0)$: Π ait une équation du type $ax+by+cz=0$ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \Pi)$.

. $\boxed{\text{3ème solution}}$ $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}=0$. Car $(\Rightarrow)$ 3 vecteurs d'un plan sont liés $\Leftrightarrow$ dét. nul.

$(\Leftarrow)$ Inversement : ces 3 vecteurs sont donc liés ; $\exists \alpha, \beta, \gamma$ non tous nuls : $\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v}+\gamma.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$. Alors $\gamma \neq 0$ sinon $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ seraient liés : or on a un vrai plan ! Celà termine : $\overrightarrow{x}=-1/\gamma.(\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v})$.

Remarques finales

- Orientation d'un e.v. réel de dim 3 : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On a $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$. Donc, sur $\mathbb{R}$, $\text{dét}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'>0$ ou $\text{dét}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'<0$. On dit que $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$; ou bien l'orientation inverse.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées **on verra** [$\mathbb{R}^3$ e.v. euclidien] que $\text{dét}(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})=\text{dét}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'=\pm 1$. Donc avec $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}"}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}"}$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ o.n. directes, on déduit $det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})=det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. C'est le "produit mixte", noté $\text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ou $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$: dét. dans n'importe quelle base o.n.d. ! (ch.24) **Et** $\text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})=[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$. **D'où :** $\overrightarrow{x} \in \Pi \Longleftrightarrow (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{x}=0$. **Solution 3bis) !**

Retenir : $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, **$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ libres.**

23.4 (*) Exercices en compléments

23.4.1 Matrices à diagonale dominante (Théorème d'Hadamard)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice telle que $\forall i, \mid a_{ii} \mid > \sum_{j \neq i;\ j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid$; montrer que A est inversible. Corrigé :

- L'énoncé dit que sur la ligne i (i quelconque) $\mid a_{ii} \mid>$ Somme des valeurs absolues (ou modules) des autres termes (sur $\mathbb{C}$ peut-être).
- Pour les matrices 2x2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, celà donne $\mid a \mid > \mid b \mid$; $\mid d \mid > \mid c \mid$; et il est clair que dét$(A) \neq 0$.
  Mais on ne va pas continuer avec les déterminants, même pour $n = 3$:
- Contraposée : si A non inversible, $\exists \lambda_k$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$.
  Soit i tel que $\mid \lambda_i \mid = max \mid \lambda_k \mid > 0$. Alors pour cette ligne i : $-\lambda_i.a_{ii} = \sum_{k \neq i;\ 1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k.a_{ik}$.
  On divise par λ_i ; on prend les modules ; l'inégalité triangulaire conclut.

23.4.2 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $a_0, ..., a_n$ $n+1$ valeurs distictes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ noté $\mathbb{K}$.

On considère, pour $k \in [[0, n]]$, les polynômes $L_k(x) = \dfrac{(x - a_0)...(x - a_{k-1})(x - a_{k+1})...(x - a_n)}{(a_k - a_0)...(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})...(a_k - a_n)}$
où le terme manquant en haut est $(x - a_k)$ et en bas $(a_k - a_k)$, pour k variant de 0 à n.

1. Préciser les valeurs de $L_i(a_j)$ à l'aide du symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.
2. Montrer que l'on a une base de $\mathbb{K}_n[x]$. Composantes du polynôme $P(x)$? Que dire de $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)$?
3. Pour $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $a_0 < a_1 < a_2$ dessiner $L_0,\ L_1,\ L_2$ (3 paraboles et q.1).

23.4.3 Autres énoncés

1. Noyau et image d'endomorphisme. a) $\begin{cases} x' = (1+m)x + 3y \\ y' = -x + (1-m)y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x + a.z \\ y' = (a-1)x + (b-1)y \\ z' = y + b.z \end{cases}$

   [Pour a) 2 valeurs particulières de m à voir. Pour b) cas où, au choix, f bij., dét$(f) \neq 0$, $rg(f) = 3$, $Ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, $Im(f) = E$, A inversible. Puis : si autres cas (lieu de (a, b) ?) voir $rg(f) = 2$.]

2. Rang de : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & b \\ 1 & 3 & 2a-1 & c \end{pmatrix}$ [Op. élémentaires avec ou sans noyau.]

3. Soit f un endomorphisme tel que $f^{n-1} \neq O,\ f^n = O;\ n \geqslant 1$. n est dit indice de nilpotence.
   Montrer l'existence de $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), ..., f^{n-1}(\overrightarrow{u})$ soit libre. Et donc : $n \leqslant dim(E)$.
   On prend $n = 3 = dimE$. Matrice de f dans la base $(f^2(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u})$? Existence d'une telle application ? Déduire que $\varphi o f = f o \varphi \Leftrightarrow \varphi = a.Id + bf + cf^2$; puis que l'équation $\varphi^2 = f$ est impossible.

4. Soit f, g endomorphismes tels que $fog - gof = Id$. Prouver $fog^n - g^n of = n.g^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$.
   Rappeler pourquoi est-ce impossible en dimension finie (avec la Trace).
   Cas de $R[x]$ $g :\ P(x) \mapsto x.P(x)$ et $f :\ P(x) \mapsto P'(x)$?

M+ **Exercices: Déterminants** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Calculs}}$ (a) Factoriser $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ (b) Vérifier $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$

2. (a) Factoriser $\begin{vmatrix} 1 & cos(a) & sin(a) \\ 1 & cos(b) & sin(b) \\ 1 & cos(c) & sin(c) \end{vmatrix}$ (b) Soit $D = \begin{vmatrix} sin(a_1+b_1) & sin(a_1+b_2) & sin(a_1+b_3) \\ sin(a_2+b_1) & sin(a_2+b_2) & sin(a_2+b_3) \\ sin(a_3+b_1) & sin(a_3+b_2) & sin(a_3+b_3) \end{vmatrix}$:

   Montrer que la colonne j de D s'écrit $sin(b_j).\overrightarrow{c} + cos(b_j).\overrightarrow{s}$; $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{s}$ fixes : $D = 0$!

3. Soit le système $\begin{cases} x+y-3z=-13 \\ 2x+y-2z=-8 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Calculer le } \boxed{\text{déterminant principal.}} \text{ Conclusion ?} \\ \text{Que penser d'une résolution par les déterminants ?} \end{array} \right.$

4. $\boxed{\text{Equation cartésienne}}$ de $Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$? [C'est une question de cours.]

5. Divers et autres systèmes : (a) $\boxed{\text{Montrer que : } A \text{ nilpotente} \Rightarrow \text{dét}(A) = 0.}$

   (b) Résoudre $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$. (c) Soit $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0 \\ x+by+b^2z+b^3=0 \\ x+cy+c^2z+c^3=0 \end{cases}$ avec a,b,c distincts :

   ce dernier : montrer qu'on a une solution unique ;

   (*) puis sans calculs que : $x=-abc,\ y=ab+ac+bc,\ z=-(a+b+c)$!

6. $\boxed{\textbf{Révisions.}}$ Dans E espace vectoriel de dim. 2, muni d'une base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, trouver la matrice A de la symétrie vectorielle s par rapport à la droite vectorielle $y=-x$ de direction $y=2x$?

   $\boxed{\text{Indications}}$ Justifier que $s(\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}) = \overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}$; calculer de même $s(\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath})$; en déduire la matrice A' de s en base (?) ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}$). Justifier que dans $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ la matrice est $A = P.A'.P^{-1}$, P à préciser et finir les calculs. (Et si B proj. sur $y=-x$ $//y=2x$?)

   $\boxed{\text{Vérifier}}$ avec la trace ; le déterminant ; puis avec A^2. Pourquoi a-t-on ici $A^{-1}=A$? [Usuellement, on part d'une matrice et on en donne une description géométrique. Ici, c'est l'exercice inverse.]

7. $\boxed{\textbf{Calculer } M^n}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [$C = I+N$ ici].

8. Inverser : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dét(A^{-1}) ? $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ [celle-ci déjà vue].

   Les déterminants sont facultatifs et **souvent médiocres ici**.

9. Curiosité : Soit B_{32} et A_{23} ; dét(BA) et dét(AB) existent ; on se demande s'ils sont égaux !

   Vérifier que dét$(AB) \neq 0$ dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer dét$(BA)$.

   (*) En général : rappeler pourquoi $rg(BA) \leqslant min[rg(A), rg(B)] \leqslant 2$; conséquence sur dét(BA) ?

Chapitre 24

Géométrie de l'espace $\mathbb{R}^3$

24.1 Espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$; espace vectoriel associé.

24.1.1 Points, Vecteurs [On revient aux points ici !]

$\mathbb{R}^3$ étant l'ensemble des triplets de réels. On considère :

- soit $\mathbb{R}^3 = \mathcal{E}$ comme ensemble de points ; on dit ici : espace affine $\mathcal{E}$. $(1, 2, -5)$ sera un point A.
- soit $\mathbb{R}^3 = E$ comme ensemble des vecteurs associés : on dit alors l'espace vectoriel E associé à l'espace affine $\mathcal{E}$. $(\pi, -1, 4)$ sera ici un vecteur $\overrightarrow{u}$, dans ce contexte !

La donnée de trois vecteurs non coplanaires $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$.
La donnée d'une origine (un point O) et d'une base de E est un repère de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ affine : $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Lien entre $\mathcal{E}$ et E : Si $A \in \mathcal{E}$; alors $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in E$ (Notation de Grassman : $M = A + \overrightarrow{AM}$)
et on peut changer de point-origine avec la relation de Châsles : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

24.1.2 Le plan affine dans $\mathcal{E}$ muni d'un repère

Le plan affine $\mathcal{P}(A(x_0, y_0, z_0)$, dirigée par le plan vectoriel $\Pi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vecteurs non colinéaires) est tel que
$\boxed{M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \exists\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}}$ λ, μ "paramètres" décrivant $\mathbb{R}$.

Un système d'équations paramétriques d'un plan affine contient 2 paramètres : peu commode !

On préfère pour le plan une équation cartésienne.

Deux exemples

1. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}[A(1, 0, 1); \overrightarrow{u}(1, 1, 1), \overrightarrow{v}(1, 2, 3)$ non colinéaires.]

   Raisonner par équivalence. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists\lambda, \mu \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda + \mu = x - 1 & (1) \\ \lambda + 2.\mu = y - 0 & (2) \\ \lambda + 3.\mu = z - 1 & (3) \end{cases}$ (1) et (2) donnent :

   $\mu = y - x + 1;\ \lambda = 2x - y - 2$. En reportant dans (3) trouver : $x - 2y + z = 2$ ou toute autre équation proportionnelle. **Faire aussi avec** $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = 0$ (idem).

2. **Bien voir que** $2x - y = 1$ **désigne un PLAN affine** // $0z$ **(non pas une droite !)**

Théorème

> En cartésiennes, une équation du plan $\mathcal{P}$ est du type $ax + by + cz = d, (a, b, c) \neq 0$.
> On obtient les plans parallèles en ne faisant que varier que le coefficient d. Ainsi : $ax + by + cz = 0$ est aussi appelé plan vectoriel Π, **directeur** du plan affine $\mathcal{P}$.

Démonstration générale avec les **déterminants (*) :** Le plan vectoriel associé [vu] : $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) = 0$.
Le plan affine a pour équation : $\boxed{det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = 0.}$ Car $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \Rightarrow$ vecteurs liés. Et si vecteurs liés : $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ libres $\Rightarrow c \neq 0$: $\overrightarrow{AM} = \alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}$!

24.1.3 La droite (affine) dans $\mathcal{E}$ muni d'un repère

La droite définie par $A(x_0, y_0, z_0)$, dirigée par $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ est telle que $\boxed{M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u}.}$

ou $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = \lambda.\alpha \\ y - y_0 = \lambda.\beta \\ z - z_0 = \lambda.\gamma \end{cases} \text{ en paramétriques.}}$ En cartésiennes, $\underline{\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}}$ avec

la convention : Quand on a, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{p}{\alpha} = \dfrac{q}{\beta} = \ldots$ avec au moins un dénominateur non nul : si un dén. est nul, le numérateur correspondant aussi ! (en effet, le rapport existe dans $\mathbb{R}$, noté λ).

Comme $\underline{ax + by = c,\ (a, b) \neq (0, 0) \text{ est un PLAN affine}}$ dans $\mathbb{R}^3$ (d'ailleurs$//Oz$ aisément !) on a :

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, une droite affine en cartésiennes apparaît comme intersection de 2 plans affines non parallèles ; **il y a donc 2 équations cartésiennes pour une droite affine de $\mathbb{R}^3$.** En paramétriques : 1 paramètre ; en cartésiennes : 2 équations. Droite préférée en paramétriques.

Ainsi $\mathcal{D}(A(1, 2, 3), \overrightarrow{u}(1, -1, 1))$ $\boxed{\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}}$ **en cart.** $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z - 3}{1}$ $\boxed{x + y = 3 \cap y + z = 5.}$

Résumé

. Dans $\mathbb{R}^3$, un plan affine est plus commode en cartésiennes : 1 seule équation.
. Mais une droite affine est plus commode en paramétriques : 1 seul paramètre.

24.2 Espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$: vecteurs et produit scalaire

24.2.1 Angles et normes de vecteurs [on ajoute l'orthogonalité]

1. Définition du produit scalaire.
   Soit 2 vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, on définit le produit scalaire par :
   $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.cos(\alpha) \quad \text{où} \quad \alpha = \text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).}$ Donc $\boxed{\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}; \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.}$
   A noter
   1) **L'inégalité Cauchy-Schwartz :** $\boxed{|\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\ | \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.}$ ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$ possible !)
   2) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Et : $\overrightarrow{0}$ **est le seul vecteur orthogonal à lui-même**.

2. $\boxed{\text{Propriétés}}$ Un p.s. est une **forme bilinéaire symétrique, définie, positive** :
   1) On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}$: on dit ici "forme".
   2) Linéarité par rapport au 1er vecteur $(a.\overrightarrow{u}_1 + b.\overrightarrow{u}_2) \cdot \overrightarrow{v} = a.(\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{v}) + b.(\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{v})$
   Et aussi par rapport au 2ème vecteur : forme "bilinéaire".
   3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$: forme bilinéaire "symétrique".
   4) $\forall\ \overrightarrow{u} \in E = \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0$: "positive".
   5) Enfin $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$: définie". [Preuves en exercice (*)]

3. $\boxed{\text{Norme de vecteurs}}$ $\overrightarrow{u} \mapsto \|\overrightarrow{u}\|$ **est une "norme", c'est dire** $\|\overrightarrow{u}\| \in \mathbb{R}^+$ **et 3 autres axiomes :**
   1) $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ **2)** $\|\lambda.\overrightarrow{u}\| = |\ \lambda\ | .\|\overrightarrow{u}\|$ **si λ réel.**
   3) Enfin l'inégalité triangulaire, appelée ici de Minkowski : $\boxed{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.}$

   Démonstration 1) vu. 2) vu aussi car $(\lambda.\overrightarrow{u}) \cdot (\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda^2.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u})$; etc.
   3) **Calcul essentiel :** $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$, par bilinéarité ; symétrie : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$. Puis $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant |\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\ | \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$.

   Exercices . L'inégalité de (C-S) est une égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
   . L'inégalité de (M) est une égalité $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ colinéaires de même sens (car de plus : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \geqslant 0$.)

24.2.2 Théorèmes géométriques

1. $\boxed{\text{Théorème de Pythagore généralisé ou d'Al-Khashi : } \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.}$
   Démonstration vue.
   Interprétation
   Soit un triangle A, B, C; $BC = a$, etc ; alors $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$;
   ou la relation des cosinus : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(A)}$ car $cos(\pi - A) = -cos(A)$.

   Remarque. **Le p.s. à l'aide de la norme :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

2. $\boxed{\text{Théorème de la médiane ou du parallélogramme } \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2.[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2].}$
   Car $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Interprétation vue au chapitre $\mathbb{C}$ et Géométrie.

24.2.3 Bases orthonormées à 3 vecteurs, ici

Bien sûr $\boxed{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \text{ est une base orthonormée si vecteurs orthogonaux et } \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1.}$

1. 1er intérêt : le produit scalaire est facile.
   Soit $\vec{u} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$, $\vec{v} = x'.\vec{\imath} + y'.\vec{\jmath} + z'.\vec{k}$;
   Dans une base quelconque, le produit scalaire est compliqué (faire le calcul comme dans $\mathbb{R}^2$).
   Mais $\boxed{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \text{ orthonormée} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz' \; ; \quad \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2+z^2.}$
   Ainsi $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, connu !

2. 2è intérêt : de même, les composantes sont faciles.
   Ecrivons $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; alors : $\vec{u}\cdot\vec{\imath} = x$, $\vec{u}\cdot\vec{\jmath} = y$, $\vec{u}\cdot\vec{k} = z$.
   Et donc $\boxed{\text{en base orthonormée, on a l'égalité } \vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{\imath}).\vec{\imath} + (\vec{u}\cdot\vec{\jmath}).\vec{\jmath} + (\vec{u}\cdot\vec{k}).\vec{k}.}$

   Remarque importante en pratique :
   Si $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ est une base **seulement** orthogonale (donc $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ non nuls en particulier)
   on a ici $\boxed{\vec{u} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|^2}\right).\vec{e_1} + \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|^2}\right).\vec{e_2} + \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{e_3}}{\|\vec{e_3}\|^2}\right).\vec{e_3}.}$
   En effet : $\vec{u} = \lambda.\vec{e_1} + \mu.\vec{e_2} + \nu.\vec{e_3}$ donc $\vec{u}\cdot\vec{e_1} = \lambda.(\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}) = \lambda.\|\vec{e_1}\|^2$. D'où λ.

24.3 Produit vectoriel, produit mixte dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$

24.3.1 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien orienté

"E.v.e. orienté " signifie : $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, orthonormée, donne l'orientation ("règle du tire-bouchon" usuelle).

On définit $\vec{u}\wedge\vec{v}$ comme le vecteur de norme $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\mid sin(\vec{u},\vec{v})\mid$ [nul si $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires] de direction orthogonale au plan vectoriel $(\vec{u}, \vec{v})$, de sens tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ soit directe.

Propriétés

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires (équivalence)} \\ (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\wedge\vec{v} = \vec{u}_1\wedge\vec{v} + \vec{u}_2\wedge\vec{v} \; ; \quad (\lambda.\vec{u})\wedge\vec{v} = \lambda.(\vec{u}\wedge\vec{v}) \\ \vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v} \; ; \quad \text{et donc linéarité aussi par rapport au 2ème vecteur} \\ \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\| = \textbf{Aire} \text{ (géom. ici) du parallélogramme construit sur } \vec{u}, \vec{v}. \end{array}}$$

Démonstration **en compléments** (*). Bien voir par contre : $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$.
Voyons $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\wedge\vec{v} = \vec{u}_1\wedge\vec{v} + \vec{u}_2\wedge\vec{v}$, le reste étant facile. Cas $\vec{v} \neq \vec{0}$ sinon évident.
Supposons même que $\vec{v} = \vec{K}$ unitaire, car si on prend $\vec{v} = \mu.\vec{K}$, c'est aisé.

Notons $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ une autre base orthonormée directe. Posons $\overrightarrow{u} = X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J} + Z.\overrightarrow{K}$ et $\overrightarrow{p} = X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J}$. Assez aisément : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{K} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{K}$ (même dir., même sens, module) ; comme $(X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J}) \wedge \overrightarrow{K}$ est colinéaire à $Y.\overrightarrow{I} - X.\overrightarrow{J}$ (avec le produit scalaire) et de même norme $(\sqrt{X^2+Y^2})$, on déduit facilement que : $(X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J}) \wedge \overrightarrow{K} = Y.\overrightarrow{I} - X.\overrightarrow{J}$. Donc ici : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J} + Z.\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{K} = Y.\overrightarrow{I} - X.\overrightarrow{J}$ et la linéarité par rapport au 1er vecteur (le caractère additif surtout) est alors bien visible !

24.3.2 Conséquence

Avec $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ dans une base orthonormée directe quelconque, on a donc : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) + y\overrightarrow{j} \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) + z\overrightarrow{k} \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) = ...$ (linéarité par rapport à chaque vecteur) ou bien :

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = ... = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}$.

Que l'on retiendra ainsi : $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ ou } yz' - zy' \\ zx' - xz' \text{ ou } \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ ou } xy' - yx' \end{pmatrix} \;!$$

Remarques (seule la 1ère est importante)

- Attention : Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est une base, mais pas forcément orthogonale ! Par contre si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ unitaires et orthogonaux, c'est une nouvelle base o.n. ; et même directe.
- On a encore l'identité de Lagrange : $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2.\|\overrightarrow{v}\|^2$.
- Formule du double produit vectoriel $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}).\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$. En exercice.

24.3.3 Produit mixte dans $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien orienté

On définit le produit mixte par $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$. Donc, en base o.n.d., si $\overrightarrow{w} = x"\overrightarrow{i} + y"\overrightarrow{j} + z"\overrightarrow{k}$ alors : pm, aussi appelé déterminant des 3 vect. en base o.n.d., noté au choix Dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ou $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ vaut : $\begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = xy'z" + yz'x" + zx'y" - zy'x" - yx'z" - xz'y"$ (règle de Sarrus).

Remarques et interprétation

- Nous n'avons ici les déterminants qu'en base orthonormée directe (notés Dét au lieu de dét) ; ils sont indépendants de la base o.n.d. choisie ! [on ne met plus $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ dans ce qui suit] car Dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ (notation). Cf. **fin ch.23.**
- Avec cette relation, on a aisément :
  | produit mixte | =Volume (géométrique ici) du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.
  Car $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$=Aire **(vu)** et Surf-base.hauteur = Volume du parallélépipède ...

24.3.4 Propriétés

Les propriétés de Dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ [dét. en base o.n.d.] sont celles des **déterminants.**

Exemple Dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -$Dét$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = +$Dét$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$; d'où $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u}$!
Etc.

Remarque : déterminants 2x2 en base orthonormée. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$; on plonge $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ en écrivant $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + 0.\vec{k}$; idem avec $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + 0.\vec{k}$. Alors :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & 0 \\ y & y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{k} = \left(\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.sin(\vec{u},\vec{v}).\vec{k}\right) \cdot \vec{k} = \|\vec{u}.\|\vec{v}\|.sin(\vec{u},\vec{v}) = Aire.$$

Un déterminant 2x2 en base orthonormée directe, qu'on peut écrire Dét$(\vec{u},\vec{v})$ vaut donc

$\boxed{\text{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.sin(\vec{u},\vec{v}) \text{ et } \textbf{représente l'Aire (alg.) du parallélogramme}}$ construit à partir des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$; (c'est un produit mixte dans $\mathbb{R}^2$ si on veut ; mais terme à éviter ici).

24.4 Espace affine (les points ici), euclidien (vu) : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$

24.4.1 Plan affine et sphère en repère orthonormé

1. Distance, Angle, Repère orthonormé.

Soit l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$: ensemble des points ; on munit l'espace vectoriel E (les vecteurs associés) d'un produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.|\vec{v}\|.cos(\alpha) = xx' + yy' + zz'$ en base orthonormée, qui donne angles et distances : $\delta(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})}$.

2. Le plan affine dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ affine euclidien avec repère orthonormé.

- Aspect vecteurs : Soit $\vec{n} \neq \vec{0}$; les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ forment un "plan vectoriel" noté $\vec{n}^\perp$ d'équation : $\boxed{\vec{u}(x,y,z) \in \vec{n}^\perp \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = 0.}$

- Aspect points : le plan affine $\mathcal{P}[A(x_0,y_0,z_0)$, orthogonal à $\vec{n}]$ a pour équation :
$\boxed{M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ qui donne } a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.}$

Théorème

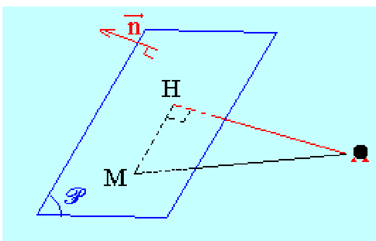
Posant $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, on a $\mathcal{P} : ax + by + cz = d$, $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ étant orthogonal au plan. De plus $\forall M_1 \in \mathcal{E}$, on a $\delta(M_1, \mathcal{P} : ax + by + cz = d) = \dfrac{|\ ax_1 + by_1 + cz_1 - d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Le 1er point est ci-dessus : plus facile avec un vecteur orthogonal.
Le 2ème (*) : exactement comme dans le cas Géométrie de $\mathbb{R}^2$, à relire ici.

. Dans $\mathbb{R}^3$, plan affine en cartésiennes : 1 équation $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ ou $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = cte$
. Mais la droite affine est plus aisée en paramétriques : 1 paramètre $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u}$.

Remarque. On a vu que le plan affine avait pour équation dét$(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}) = 0$; d'où en base orthonormée directe $\boxed{\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}) = 0 \text{ ou } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0.}$ Correct : $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \mathcal{P}.}$

$\boxed{\text{Exemple}}$ Plan orthogonal à $\vec{n}(1,1,2)$, passant par $A(1,2,3)$; distance de l'origine au plan ?



Trouver $x + y + 2z = 9$ et $\delta = 9/\sqrt{6}$. Fig.

3. La sphère en repère orthonormé. **Au choix :**

$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 - d \geqslant 0.}$

24.4.2 Problèmes d'intersection dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ affine euclidien

1. Intersection plan affine-plan affine (**surtout l'exemple**).

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \vec{0} \ \text{ ici et } \ \boxed{\vec{n} \perp \mathcal{P}} \qquad \text{et} \quad \vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} \neq \vec{0} \ \text{ idem.}$$

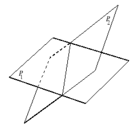
Théorème: Si les plans ne sont pas parallèles $[\Leftrightarrow \vec{n},\ \vec{n'}$ non colinéaires], l'intersection des 2 plans affines est une droite affine de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$. Droite affine dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Exemple. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2.x-3.y=0 \end{array}\right.$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\boxed{\vec{n} \perp \mathcal{P}}$ $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ et $\boxed{\text{non colinéaire à } \vec{n}.}$

3 lettres, 2 équations ; en général 1 lettre arbitraire ; par ex. x ici : $x = x,\ y = \dfrac{2}{3}x,\ z = 1 - \dfrac{5}{3}x$

qu'on écrit $[M = A + \lambda.\vec{u}]$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x.\begin{pmatrix}1\\2/3\\-5/3\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$.

On dit que $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2.x-3.y=0 \end{array}\right.$ est un système d'équations cartésiennes $\boxed{\text{peu commode}}$ de $\mathcal{D}$ et



$\mathcal{D}(A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix})$ une représentation paramétrique $\boxed{\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u}}$ $\boxed{\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'}}$

2. Intersection plan affine-droite affine (**surtout l'exemple**).

$\mathcal{P} : ax+by+vz=d,\ \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ en cartésiennes. $\mathcal{D} : \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda.\alpha \\ y = y_0 + \lambda.\beta \\ z = z_0 + \lambda.\gamma \end{array}\right.$ λ décrit $\mathbb{R}$, paramétre.

Théorème: Si $\mathcal{D}$ non parallèle à $\mathcal{P}$ ou si $\vec{u} \centerdot \vec{n} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma \neq 0$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = 1$ point.

Exemple. Soit $\mathcal{P} :\ x+y+z=1$ et $\mathcal{D}(A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix})$. $\mathcal{D} : \begin{pmatrix}x = 1+2.t\\ y = 2+2.t\\ z = 3+t\end{pmatrix}$.

Déjà $\boxed{\mathcal{D} \text{ non parallèle à } \mathcal{P}}$ car $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \centerdot \vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 5 \neq 0$. Puis en reportant :

$1+2.t+2+2.t+3+t=1$ ou $5.t=-5$, $t=-1$: un unique point d'intersection $I\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

[Complément : on peut éviter le choix d'un repère avec $\mathcal{D} : \overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u}$; $\mathcal{P} : \vec{n} \centerdot \overrightarrow{BM} = 0$ ...]

3. Droite affine-droite affine. 2 droites affines sont **en général non coplanaires**. cf. fin.

4. Complément : Intersections droite ou plan avec la sphère.
   - Droite affine-sphère : exactement comme dans le cas de $\mathbb{R}^2$, à relire.
     - Donc le théorème de la puissance d'un point se généralise à la sphère.
     - Mais pas le théorème de l'angle inscrit. (Que dit-il ?)
   - Plan affine-sphère. Voyons juste un calcul : Soit la sphère $CM^2 = R^2$; H la projection orthogonale de C sur $\mathcal{P}$, d'où le plan : $\overrightarrow{HM} \centerdot \vec{n} = 0$. A l'intersection $(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HM})^2 = R^2$ donc $\overrightarrow{CH}^2 + 2.\overrightarrow{CH} \centerdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM}^2 = R^2$; ou encore : $\overrightarrow{HM}^2 = R^2 - \overrightarrow{CH}^2$ et $M \in \mathcal{P}$.
     Ainsi : $\boxed{\text{on obtient un cercle de centre } H \text{ si et seulement si } \delta ist(C,\mathcal{P}) \leqslant R\,;\ \text{ et } \emptyset \text{ sinon.}}$

24.4.3 Utilisation du produit vectoriel et du produit mixte (dét 3x3)

1. Equation cartésienne du plan affine $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: **revoir**

   Le plan affine avec $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ non colinéaires, a pour équation : $\boxed{M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = 0.}$

   $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & x - x_0 \\ \beta & \beta' & y - y_0 \\ \gamma & \gamma' & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$, type $a.x + b.y + c.z = d$, ou $\boxed{(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \,.\, \overrightarrow{AM} = 0, \text{ on trouve } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \mathcal{P}.}$

2. Distance d'un point à une droite dans $\mathbb{R}^3$ Exercice $\boxed{\delta[M_1, \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})] = \dfrac{\|\overrightarrow{AM_1} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.}$

   En effet, observons que la droite est en paramétriques ici :

   Soit H_1 la projection orthogonale de M_1 sur la droite ; M_1H_1 est le minimum de distance et $\|\overrightarrow{AM_1} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|(\overrightarrow{AH_1} + \overrightarrow{H_1M_1}) \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{H_1M_1} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{H_1M_1}\|.\|\overrightarrow{u}\|$; d'où $\delta = H_1M_1$.

3. Exercice : Condition nécessaire et suffisante (C.N.S.)pour $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ coplanaires

   Dans $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\text{Les deux droites } \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) \text{ et } \mathcal{D}'(B, \overrightarrow{v}) \text{ sont coplanaires} \Leftrightarrow \text{Dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.}$

   Pour $\Rightarrow$ on a 3 vecteurs dans le plan vectoriel associé $(a.x + b.y + c.z = 0)$: déterminant nul.

   Pour $\Leftarrow$ 2 cas : si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ colinéaires, alors droites parallèles, donc coplanaires.

   si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires : $\overrightarrow{AB} = cte\overrightarrow{u} + cte\overrightarrow{v}$; chaque droite est inclue dans le plan affine $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ car B appartient à ce plan ! (son équation est du type $a.x + b.y + c.z = d$ bien sûr).

   (*) **Complément** qui complète la C.N.S. Distance de 2 droites en paramétriques dans $\mathbb{R}^3$

   Théorème

   > Si 2 droites $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}), \mathcal{D}'(B, \overrightarrow{v})$ sont non coplanaires, $\exists\,!\ \Delta$ droite perpendiculaire commune à ces 2 droites, les coupant en H et K. Le minimum de la distance PQ ; P, Q décrivant chacune des droites est : $HK = \delta = \dfrac{|\,[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\,|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}$.

   En effet : (*)

   $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont non colinéaires ici, d'où $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ base de $\mathbb{R}^3$. ($[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ =Dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.)

   1) Donc $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est un PLAN affine ; de même $\mathcal{P}'(B, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. Et une droite est perpendiculaire commune (en particulier dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$) si et seulement si elle est dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$; or ces plans sont non parallèles (pourquoi ?) donc sécants selon une droite unique.

   2) Puis $PQ^2 = [(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{KQ}) + \overrightarrow{HK}]^2 = HK^2 + (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{KQ})^2 + 0 \geqslant HK^2$; et égalité $\Leftrightarrow \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{0}$ qui s'écrit $a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et exige $a = b = 0$ $(P = H,\ Q = K)$ car $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires !

   3) Enfin : $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{HK}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{HK}] =$
   $= (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \,.\, \overrightarrow{HK} = \pm\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|.\delta.$ Et valeurs absolues.

24.4.4 Divers systèmes de coordonnées.

1. $\boxed{\text{Cartésiennes :}}$ Pour $M(x, y, z)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. **Figure ?**

2. $\boxed{\text{Cylindriques :}}$ Dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on prend les coordonnées polaires pour m : (ρ, θ) et ensuite $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + z.\overrightarrow{k}$. Donc $M(\rho, \theta, z)$ dans la base : $\overrightarrow{u}[cos(\theta), sin(\theta), 0]$, $\overrightarrow{u}_1[-sin(\theta), cos(\theta), 0]$, $\overrightarrow{k}$.

   Le petit déplacement étant $\overrightarrow{dM}(d\rho, \rho.d\theta, dz)$ dans cette base "locale". **Fig. ?**

3. $\boxed{\text{Sphériques :}}$ Attention ici, on prend $r = OM \neq \rho = Om$ où m était la projection orthogonale de M sur Oxy. On prend en général $\theta = (Oz, OM)$, angle variant entre 0 et π : co-latitude ;

   et : $\varphi = (Ox, Om)$ angle variant de 0 à $2.\pi$: longitude.

   Dans la base "locale" orthonormée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, (soit r seul croît, soit ...) le petit déplacement est $\overrightarrow{dM}(dr, r.d\theta, r.sin(\theta).d\varphi)$ et le petit volume $dr.\ r.d\theta.\ r.sin(\theta).d\varphi$. **Fig. ?** [$\Rightarrow$ volume de la sphère !

   $$\int\!\!\int\!\!\int r^2.sin(\theta)dr.d\theta.d\varphi = \int_0^R r^2.dr[\int_0^\pi sin(\theta).d\theta(\int_0^{2\pi} d\varphi)] = 4.\pi.R^3/3.]$$

M+ **Exercices: $\mathbb{R}^3$ affine/ affine euclidien.** **PTSI**

---

1. **Equation de plan affine** :
   (a) Equation du plan affine $\mathcal{P}$ passant par $A(1,2,3)$ dirigé par le plan vectoriel $\Pi : 2x+3y-z=0$.
   (b) Inversement partant de l'équation cartésienne de $\mathcal{P} : 2x+3y-z=5$, trouver une représentation paramétrique du type $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$, en prenant les lettres x, y arbitraires.

2. **Autres méthodes dans $\mathbb{R}^3$, affine euclidien** :
   (a) Equation du plan affine passant par $A(3,2,1)$, dirigé par Π : $\overrightarrow{u}(1,2,-1), \overrightarrow{v}(1,-2,1)$ [libres] en écrivant $\exists\lambda,\mu : \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ et en éliminant les paramètres λ,μ avec les 3 équations.
   (b) Trouver une équation du même plan, en prenant cette fois $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ **comme vecteur normal**.
   (c) Puis aussi **en écrivant** $\text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = 0$. [Pareil, finalement : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.]

3. (a) Dans $\mathbb{R}^3$, affine euclidien. Quel est $\left\{M : \ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OM} = k\right\}$, k étant donné, $(\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0})$?
   (b) (*) Analogue avec le produit vectoriel. Quel est $\left\{M : \ \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{b}\right\}$, $(\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0})$?

4. Montrer que $D_1(x=1+t, y=1+2t, z=1-2t)$ et $D_2(x=2t, y=-1+4t, z=3-4t)$ sont confondues. Et situées dans le plan affine : $\mathcal{P}(x=2+2v,\ y=3+u+3v,\ z=-1-3u-v)$.

5. Distances. Point-point : $\delta\left(M_1(x_1,y_1,z_1), M(x,y,z)\right)$? Et, cours (*) : point-plan, point-droite.

6. Calcul de distances. Soit $\mathcal{D}$=$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P} : x+y+z=1$, $\mathcal{P}' : 2x-3y=0$. Calculer $\delta(O,\mathcal{D})$:
   (a) En donnant une équation paramétrique de $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{u})$ en posant $y=2.t$ et avec la formule vue.
   (b) (*) En calculant **le minimum** de $\text{dist}^2(O,M_t) = f(t)$ quand M_t décrit la droite $\mathcal{D}$.
   (c) (*) Enfin en vérifiant que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_\lambda$" : $2x-3y+\lambda.(x+y+z-1)=0$; puis en trouvant λ tel que $\mathcal{P}' \perp \mathcal{P}_\lambda$" ; et alors en calculant $\text{dist}(O,\mathcal{P}_\lambda$") !

7. Dans un tétraèdre régulier A,B,C,D de centre O, calculer $cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$; $cos(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})$, I milieu$[CD]$.

8. (a) (*) Cours. C.N.S. pour que les droites $(A,\overrightarrow{u})$ $(B,\overrightarrow{v})$ soient coplanaires avec $\text{Dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
   (b) $(*)$ Cas où $\mathcal{D}$ est définie par les points $A(0,1,1)$ et $P(1,0,1)$; et $\mathcal{D}'$: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right.$?

9. (**) Perpendiculaire commune et distance entre 2 droites non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$:
   Cas où $\mathcal{D}$ est définie par les points $A(0,1,1)$ et $P(1,0,1)$; et $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ x+y-z=-2 \end{array}\right.$?
   [Réponse : $A'(-3,1,0)$ et $\overrightarrow{u}'(3,-2,1)$ par exemple ; $\mathcal{D}$" $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x+4y+5z=1 \end{array}\right.$ et $\delta = 2/\sqrt{3}$].

10. (**) Des quadrilatères aux théorèmes de Ptolémée. Soit A,B,C,D un quadrilatère convexe :
    (a) Montrer que $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4IJ^2$, I milieu de $[AC]$ et J de $[BD]$.
    (b) En déduire : A,B,C,D parallélogramme $\Leftrightarrow AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2$.
    (c) Montrer : A,B,C,D cocycliques $\Rightarrow cosB = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$: $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$.
    Déduire : $AC^2 = x^2 = \dfrac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}$, $y=BD$ analogue ; donc $\boxed{xy = ac+bd;\quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}}$.

Chapitre 25

Transformations de l'espace $\mathbb{R}^3$

25.1 Projections et symétries vectorielles orthogonales

25.1.1 Résultat fondamental. Tout est en vectoriel aux I, II

1. Théorème de la projection orthogonale dans $E = \mathbb{R}^3$ vectoriel

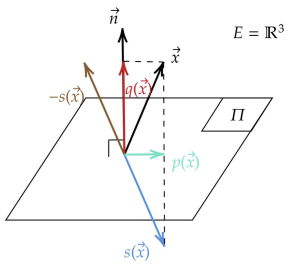
   • La projection **vectorielle orthogonale** sur $Vect(\vec{u})$ est telle que $\boxed{\vec{x_1} = p(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}.}$

   • La projection **orthogonale sur** $Vect(\vec{u}, \vec{v})$ $\vec{u} \perp \vec{v}, (\neq \vec{0})$ est $\boxed{p(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u} + \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}.\vec{v}.}$

   Dém. Au cas 2) : $p(\vec{x}) = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$; et $\vec{x} \centerdot \vec{u} = \big(p(\vec{x}) + q(\vec{x})\big) \centerdot \vec{u} = p(\vec{x}) \centerdot \vec{u} = \alpha.\|\vec{u}\|^2$ ...

2. $\boxed{\text{Remarques}}$ Dans l'un ou l'autre cas, soit $\vec{x_1}$ cette proj. : $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ avec $\vec{x_1} \in E_1$, $\vec{x_2} \in E_1^{\perp}$.
   Comme $\vec{x_2} \perp \vec{x_1}$, on a : $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \|\vec{x_2}\|^2$. Pourquoi ? Dessin ? Donc, pour
   $\boxed{s(\vec{x}) = \vec{x_1} - \vec{x_2} \text{ symétrie orthogonale par rapport à } E_1, \text{ on a } \|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \text{ : conserve la norme.}}$
   Tandis que pour $p = proj._{\perp}$ (orthogonale) : $\|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$. [**Bien sûr** $Id + s_{/E_1} = 2p_{/E_1}$.]

25.1.2 Dans $\mathbb{R}^3$ eve., matrice M de s, sym$_{\perp}$/plan Π d'équation $2x - 3y + z = 0$



Solution : **Avec une base de $\Pi^{\perp}$, de dim. 1** D'abord, si $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ orthonormée, alors
$\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \ \Pi \ : \ ax + by + z = 0.}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ base de $\Pi^{\perp}$. Si q est la $proj._{\perp}$ sur $Vect(\vec{n}) = \Pi^{\perp}$, par lignes, $\vec{x} : X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto q(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}.\vec{n} = \dfrac{1}{14}.(2x - 3y + z).\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A.X.$

Ou bien A par colonnes par $q(\vec{\imath})$ ... Puis $\vec{x} - s(\vec{x}) = 2.q(\vec{x})$; d'où $M = I_3 - 2A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Solution bis : Au lieu de prendre q, on prend $p = proj._{\perp}$ sur Π [bien sûr $p + q = Id$].

Trouvons une base orthogonale de Π de dim. 2 : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ convient.

[Puis $p(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}.\vec{a} + \dfrac{(\vec{x} \centerdot \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$. D'où B matrice de p ; et $I_3 + M = 2B$ donne M : laissé].

$\boxed{\text{Vérifions}}$ $Tr(A) = rg(A) = 1$ (proj.) ! $M.M = I_3$! (*) $Tr(M) = +1$, dét$(M) = -1$ (cf. M' en base $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n}$). Enfin on voit au II que ${}^tM.M = I_3$ était attendu, donc ${}^tM = M^{-1}$. Comme $M^{-1} = M$ ici, celà explique **que** ${}^tM = M$ ou que M soit symétrique ; **donc** A **aussi** car $A = \frac{1}{2}(I_3 - M)$.
(Rappel : une symétrie **orthogonale conserve la norme** de tout vecteur, pas une projection.)

25.2 Isométries vectorielles. Changements de bases o.n.

25.2.1 Définitions. Matrice en base orthonormée

1. Définition

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme). On dit que 1) u conserve la norme si $\forall \overrightarrow{x}, \|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$
> 2) Et que u conserve le produit scalaire si $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} : u(\overrightarrow{x}) \cdot u(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$. Clair que 2) $\Rightarrow$ 1).

En fait

> Pour u endomorphisme, 1) $\Leftrightarrow$ 2) et dans ces conditions u est injectif. Donc si on est en dim. finie, u est bijectif : on dit automorphisme orthogonal ou **isométrie vectorielle**.
> On appelle e.v. **"euclidien"** : tout e.v. réel, muni d'un produit scalaire, et **de dim. finie**

En effet
Voyons 1) $\Rightarrow$ 2) : Rappelons une expression du p.s. à l'aide de la norme
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{b}\|^2]$. Donc :
$u(\overrightarrow{x}) \cdot u(\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}[\|u(\overrightarrow{x}) + u(\overrightarrow{y})\|^2 - \|u(\overrightarrow{x})\|^2 - \|u(\overrightarrow{y})\|^2] = \frac{1}{2}[\|u(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})\|^2 - \|u(\overrightarrow{x})\|^2 - \|u(\overrightarrow{y})\|^2]$
$=$ (avec l'hypothèse) $= \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x}\|^2 - \|\overrightarrow{y}\|^2] = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$.
Bien voir u injectif :
Si $\overrightarrow{x} \in Ker(u)$, $u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. La norme : $\|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{0}\| \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$!

2. Théorème

> Pour u endomorphisme : u isométrie vectorielle $\Leftrightarrow$ u transforme une base o.n. en une base o.n.

Démonstration
$\Rightarrow$ évident car u conserve à la fois la norme et le produit scalaire.
$\Leftarrow$ Soit $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base o.n. et $(\overrightarrow{e_1}', ..., \overrightarrow{e_n}')$ son image o.n. par u. Montrons alors que u conserve la norme de tout vecteur de E. Pour $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\overrightarrow{e_i}$, on a $u(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i.\overrightarrow{e_i}'$ car $\overrightarrow{e_i}' = u(\overrightarrow{e_i})$.
D'autre part $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ car $(\overrightarrow{e_i})$o.n. $\|u(\overrightarrow{x})\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ car $(\overrightarrow{e_i}')$o.n. Egaux !

3. Traduction Soit A la matrice de u en base o.n.$(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$:
u isométrie vect. $\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A $u(\overrightarrow{e_1}), ..., u(\overrightarrow{e_n})$ sont o.n. Ou bien, avec ${}^tA.A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\overrightarrow{e_1}) \cdot u(\overrightarrow{e_1}) & u(\overrightarrow{e_1}) \cdot u(\overrightarrow{e_2}) & \dots & u(\overrightarrow{e_1}) \cdot u(\overrightarrow{e_n}) \\ u(\overrightarrow{e_2}) \cdot u(\overrightarrow{e_1}) & u(\overrightarrow{e_2}) \cdot u(\overrightarrow{e_2}) & \dots & u(\overrightarrow{e_2}) \cdot u(\overrightarrow{e_n}) \\ & \dots & & \\ u(\overrightarrow{e_n}) \cdot u(\overrightarrow{e_1}) & u(\overrightarrow{e_n}) \cdot u(\overrightarrow{e_2}) & \dots & u(\overrightarrow{e_n}) \cdot u(\overrightarrow{e_n}) \end{pmatrix}$$

on a l'écriture équivalente : u isométrie vect. $\Leftrightarrow$ ${}^tA.A = I_n$: on dit que A **est orthogonale**.

4. **Résumé.** **Soit A la matrice de u en base o.n.$(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$. Alors :** (on note $A \in \mathbb{O}$)

> u isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : les vecteurs col. sont o.n. $\Leftrightarrow$ ${}^tA.A = I_n$
> $\Leftrightarrow$ ${}^tA = A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $A.{}^tA = I_n$ (**ce qui est ${}^tA$ orthogonale**) $\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de A sont o.n.
> On peut aussi considérer que A est une matrice de changement de bases orthonormées.

Et : $A \in \mathbb{O} \Rightarrow$ dét$(A) = \pm 1$ $[det({}^tA) = det(A)]$. Réciproque fausse : $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{\imath}) = 2.\overrightarrow{\imath}$!

25.2.2 Isométries vectorielles en dim. 2

1. Théorème

> En dim. 2 en base o.n. on a exactement 2 types de matrices orthogonales. Dessins ?
> $A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ dét(A)=+1 : rotation vectorielle d'angle α ; et $\mathbb{O}_2^+$ abélien
> $A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$ dét$(A) = -1$: sym. orth./$y = x.tan(\frac{\alpha}{2})$ angle polaire $\frac{\alpha}{2}$.

Démonstration $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonale $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{array} \right.$ par Théorème (ou ${}^tA.A = I_2$).

Posons $a = cos(\alpha), c = sin(\alpha)$; $b = cos(\beta), d = sin(\beta)$; il reste $cos(\alpha - \beta) = 0$.

- Si $\alpha - \beta = \dfrac{-\pi}{2} + k.2\pi$, cas 1) et vu les colonnes, on reconnait la rotation vectorielle d'angle α.
- Si $\alpha - \beta = \dfrac{+\pi}{2} + k.2\pi$, cas 2). Alors : ${}^tA = A^{-1}$ [connu] et ${}^tA = A$ [observé] ; donc $A.A = I_2$ ou A matrice d'une symétrie / $Ker(A - I_2), //Ker(A + I_2)$ [Théorème]. Puis calculs **ou remarques** :

$$Ker(A - I_2) = Vect\overrightarrow{I} \begin{pmatrix} cos(\alpha/2) \\ sin(\alpha/2) \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} x.cos(\alpha) + y.sin(\alpha) = x \\ x.sin(\alpha) - y.cos(\alpha) = y \end{array} \right. \text{ ... et } \left\{ \begin{array}{l} 1 + cos(\alpha) = 2.cos^2(\alpha/2) \\ 1 - cos(\alpha) = 2.sin^2(\alpha/2) \\ \sin(\alpha) = 2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2) \end{array} \right.$$

Et une symétrie conservant la norme est orthogonale : $\|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\|^2 = \|\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\|^2 \Rightarrow \overrightarrow{x_1} \centerdot \overrightarrow{x_2} = 0$.

2. **Remarques**. **Avec $\mathbb{C}$, le calcul précédent est inutile car connu !**

- Avec $\mathbb{C}$, cas 1) : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{z' = e^{i.\alpha}.z}$ cas 2) : $\boxed{z' = e^{i.\alpha}.\overline{z}}$.
- Au 2), en base o.n. directe $(\overrightarrow{I} \begin{pmatrix} cos(\alpha/2) \\ sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \overrightarrow{J})$, la matrice est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où vérification de la Trace. Et si P la matrice de passage de $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ à $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$: $P^{-1} = {}^tP$ et $P^{-1}AP = D$.
- Attention. $-Id$: en **dim. 2**, $diag(-1,-1)$ isométrie positive ; en **dim 3** : $diag(-1,-1,-1)$ isométrie négative ! Idem **sur les symétries orthogonales/une droite vectorielle** : en dim 2, c'est une isométrie négative ($\in \mathbb{O}_2^-$), avec le déterminant ; mais, par contre : en dim 3, en base judicieuse, la matrice est $D = diag(-1,-1,1)$: isométrie positive ($\in \mathbb{O}_3^+$).

25.2.3 Isométries vectorielles en dim. 3

1. Théorème

> Les isométries vectorielles positives de $\mathbb{R}^3$ sont toutes des rotations vectorielles axiales. Les négatives sont plus compliquées ; simplement : $u \in \mathbb{O}_3^- \Leftrightarrow -u \in \mathbb{O}_3^+$.

Démonstration : **ADMIS, mais expliqué.**

- Déjà, sauf si $u = Id$, (de matrice I_3 dans toute base), il y a un $\boxed{\text{axe unique : } \{\overrightarrow{x}/u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\}}$ qui est une droite vectorielle $Vect(\overrightarrow{K})$; c'est aussi $Ker(u - Id)$.
- Ensuite, en base o.n. judicieuse $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, la matrice serait $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Angle : forcément Tr}(A) = 2cos(\alpha) + 1.}$ Pour $sin(\alpha)$ l'axe étant orienté $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{A vue (cf. Ex.)} \text{ ou } \textbf{cf.} \\ 25.2.4 : sign[\overrightarrow{x}, r(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{K}]. \end{array} \right.$

2. $\boxed{\text{Exemple}}$ Dans $\mathbb{R}^3$ e.v. $\boxed{\text{euclidien}}$ usuel, décrire l'endomorphisme u de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution [On utilisera que $u(\overrightarrow{\imath}) = \overrightarrow{k}$, à la fin : **1ère colonne de** A.]

- Soit $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ les vecteurs colonnes ; il est clair que $\|\overrightarrow{v}_1\| = \|\overrightarrow{v}_2\| = \|\overrightarrow{v}_3\| = 1$ $\boxed{\text{et}}$ que $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = 0 = \overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_2.\overrightarrow{v}_3$ (ou ${}^tA.A = I_3$). Donc u : isométrie vectorielle par Théorème.

. dét$(A) = +1$: isométrie positive.[1] Donc rotation axiale par un autre Théorème .

$\boxed{\text{Axe}}$: $AX = X$ conduit à ... $Vect\overrightarrow{\Omega}$, $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. $\boxed{\text{Angle}}$: $2.cos(\alpha) + 1 = 0$, $\alpha = \pm\dfrac{2.\pi}{3}$.

Orientons l'axe par $\overrightarrow{\Omega}$; $u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{k}$: à vue $\alpha = \dfrac{-2\pi}{3}$ ou 10 lignes plus bas : $sin(\alpha)$ du signe de $Det(\overrightarrow{i}, u(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{\Omega}) = [\overrightarrow{i}, u(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{\Omega}] = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\Omega}] < 0$: idem. (Ici $A^3 = I_3$: $A^{-1} = A^2 = {}^tA$.)

25.2.4 Utilisation du produit mixte et du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

1. Rappel. Soit une base **o.n.** $\mathcal{B}$ de référence et une autre base $\mathcal{B}'$ **o.n. directe** donc dét$_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = +1$.
   D'où pour 3 vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, dét$_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ =dét$_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$; ce déterminant, indépendant de la base o.n.d. choisie, est appelé produit mixte et noté Dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ou $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.
   Et on a avec le produit vectoriel : $\boxed{\text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}}$ ... cf. ch. Géométrie de $\mathbb{R}^3$.

2. **Utilisations**
   • Dans A_{33} orthogonale, si $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sont les 2 premiers vecteurs o.n. le 3ème est $\overrightarrow{v}_3 = \pm\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2$!

   • Soit r la rotation d'angle α autour de $Vect(\overrightarrow{\omega})$, $\|\overrightarrow{\omega}\| = 1$, $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\Omega}/\|\overrightarrow{\Omega}\|$. Si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{\omega}$, dans $\overrightarrow{\omega}^\perp$:
   $r(\overrightarrow{a}) = cos(\alpha).\overrightarrow{a} + sin(\alpha).\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}$ $(\|r(\overrightarrow{a})\| = \|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}\|)$. Si $\overrightarrow{x}$ quelconque : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{\omega}$
   $r(\overrightarrow{x}) = r(\overrightarrow{a}) + \lambda.\overrightarrow{\omega}$; $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}$ et $\boxed{[\overrightarrow{x}, r(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{\omega}] = \|\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}\|^2.sin(\alpha) \text{ du signe de } sin(\alpha)}$
   car $[\overrightarrow{x}, r(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{\omega}] = [\overrightarrow{a}, r(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{\omega}] = [\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{a}, r(\overrightarrow{a})] = (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}).r(\overrightarrow{a}) = \|\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}\|^2.sin(\alpha)$. $\boxed{\lambda = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\omega}}$
   d'où $r(\overrightarrow{x}) = cos(\alpha).[\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\omega}).\overrightarrow{\omega}] + sin(\alpha).\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\omega}).\overrightarrow{\omega}$ (formule d'Olinde Rodrigues).

3. Etude de $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ en base o.n.directe. f est un end. de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$.
   Si $\overrightarrow{\Omega} \neq \overrightarrow{0}$, $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{\Omega})$, $Im(f) = \overrightarrow{\Omega}^\perp$.
   Inversement, ayant une matrice antisymétrique en base o.n.d., on sait donc l'interpréter [2] !

25.3 Sur les applications affines de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ affine

25.3.1 Définition et expression d'une application affine

Soit $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux e.a. associés aux e.v. $E.F.$ $f : M \in \mathcal{E} \to M' \in \mathcal{F}$ est dite affine, s'il existe une A.L., forcément unique notée $\overrightarrow{f}$ (changement de notation pour les AL) telle que $\boxed{\forall O, M : \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})}$.

Remarque
Au lieu de dire "$\forall$ O, M...", il est équivalent de dire "$\forall M$", O fixé. En effet :
Si $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ pour $O \in \mathcal{E}$ fixé, alors $\overrightarrow{O'I'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OI})$; par différence $\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM})$, $\forall I, M$.

Théorème

Donc $\boxed{M' = O' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})}$. Si $\mathcal{E}$ est d'origine O, $\mathcal{F}$ d'origine Ω, $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{\Omega O'}$.
D'où **en dimensions finies** p pour $\mathcal{E}$, n pour $\mathcal{F}$, **l'écriture matricielle** $Y = A.X + B$.

Démonstration
En dimensions finies : $\overrightarrow{\Omega M'} = y_1\overrightarrow{f_1} + ... + y_n\overrightarrow{f_n}$, de composantes Y (ou encore M' de coordonnées Y) ; et $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + ... + x_p\overrightarrow{e_p}$ de composantes X (ou M de coordonnées X) ; $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ connu : $A_{np}.X$;
et $\overrightarrow{\Omega O'} = B_{n1}$ dans F est aussi connu [c'est-à-dire : composantes du vecteur dans la base $(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n})$ ou bien ce sont les coordonnées du point O' dans le repère $(\Omega; \overrightarrow{f_1}, ...y_n\overrightarrow{f_n})$.]

---

[1] Remarque en complément (*) On a $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}.(\Delta_{ji})$; et de plus ici : $A^{-1} = (a_{ji})$ [on a transposé]
Donc $\Delta_{ij} = \pm a_{ij}$: ce signe est dét(A). Ci-dessus : $a_{12} = 1$; $\Delta_{12} = -(-1)$: dét$(A) = +1$.

[2] Exemple (*) Si r rotation, $(r - r^{-1})/2$, en base o.n.d. est l'endomorphisme $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{\omega}.sin(\theta) \wedge \overrightarrow{x}$.
D'où $\overrightarrow{\omega}.sin(\theta)$ obtenu avec la partie antisymétrique $(A - {}^tA)/2$ de la matrice A si on veut !

25.3.2 Homothéties affines et Translations, donc $\mathcal{F} = \mathcal{E}$

1. Lien affine-vectoriel. Appl. Linéaire : | Appl. affine : (Preuve **et exemples** après)

   L'appl. Lin. (end.) $\overrightarrow{f} = Id_E$ de matrice I_n| $\Leftrightarrow f$ translation (Une translation n'est pas linéaire !)
   Et si $k \notin \{0,1\}$, $\overrightarrow{f} = k.Id_E$ (hom. vect.) | $\Leftrightarrow f$ hom. affine de rapport k, de centre LE point fixe.
   Ainsi $\overrightarrow{f} = -Id$ (hom. vect. de rapport -1) | $\Leftrightarrow f$ symétrie-point.

2. Démonstration
   . $\overrightarrow{f} = Id_E \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow f$ Translation. Ex : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   . Cas $\overrightarrow{f} = k.Id$. Soit l'égalité (1) $\overrightarrow{O'M'} = k.\overrightarrow{OM}$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. Ex : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   On a : I fixe $\Leftrightarrow I' = I \Leftrightarrow$ (2) $\overrightarrow{O'I} = k.\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OI} = k.\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OO'}$: une et une seule solution si $k \neq 1$ $[\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}]$. **Différence** (1) – (2) **:** $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$**.** Fini.

25.3.3 Rappel : Déplacements en dimension 2 : $\mathcal{I}s_2^+$

1. **Théorème.** (Isom. affines positives : déjà vu aux ch.$\mathbb{C}$)
   - En base o.n., $\overrightarrow{f} \in \mathbb{O}_2^+$ pour matrice $\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ou $z \mapsto z' = e^{i.\alpha}z$. On en déduit $\mathcal{I}s_2^+$:
   - Déplacements : $\alpha = 0(2\pi)$ translation, $\alpha \neq 0(2\pi)$ rotation affine d'angle α de centre le point fixe.

2. Démonstration Utilisons les complexes, par exemple : $z' = e^{i.\alpha}z + Cte$. **Déjà vue :**
   Cherchons un point fixe éventuel à $z \mapsto z' = e^{i.\alpha}z + b, (b = b_1 + ib_2 \in \mathbb{C})$. $z' = z \Leftrightarrow z(1 - e^{i.\alpha}) = b$.
   Si $\alpha = 0(2.\pi)$, $z' = z + b$ translation.
   Si $\alpha \neq 0(2.\pi)$, solution unique $z_0 = e^{i.\alpha}z_0 + b$: $\boxed{z' - z_0 = e^{i.\alpha}(z - z_0).}$ Puis module, argument.

25.3.4 Exercice : Déplacements en dimension 3 : $\mathcal{I}s_3^+$

1. Définition

   | On appelle vissage d'axe orienté $\mathcal{D}$ $(I, \overrightarrow{K})$, d'angle α, de vecteur de translation $\gamma.\overrightarrow{K}$ la composée ici commutative : $rot = tor$, r étant la rotation autour de $\mathcal{D}$ d'angle α t la translation de vecteur $\gamma.\overrightarrow{K}$. On a $\boxed{M \in \mathcal{D} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \gamma.\overrightarrow{K}}$ Dessin ? |

2. Théorème $\boxed{\text{Toute isométrie affine positive de } \mathcal{E} = \mathbb{R}^3 \text{ est un vissage. cf. Exemple pour } \alpha, \mathcal{D}, \gamma.\overrightarrow{K}.}$

   Car $\exists \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ b.o.n. judicieuse f : $M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$
   vu le rappel sur $\overrightarrow{f}$. $\overrightarrow{K}$ est ici un vecteur unitaire de l'axe (orienté) de $\overrightarrow{f}$. D'où :
   Si $\alpha = 0$ ($\Leftrightarrow \overrightarrow{f} = Id$; on s'en aperçoit de suite !), f est une translation, éventuellement $\mathcal{I}d(\mathcal{E})$.
   Si $\alpha \neq 0$ on a vu en dim.2 : $\exists X_0, Y_0 / \begin{pmatrix} X' - X_0 \\ Y' - Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix}$ et on rajoute
   $Z' = Z + \gamma$. C'est clair avec un dessin $\mathcal{D} : [I(X_0, Y_0, 0), \overrightarrow{K}]$; translation : $\gamma\overrightarrow{K}$.

3. $\boxed{\text{Exemple}}$ Décrire, dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ e.a.e. f : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = y + 1 \\ y' = z + 2 \\ z' = x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   . $\overrightarrow{f}$ vu au II.3 est la rot. vect. d'axe Δ dirigée par $\overrightarrow{K} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k})$, d'angle $\alpha = \dfrac{-2\pi}{3}$.
   . Donc f vissage. $M \in \mathcal{D} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \gamma.\overrightarrow{K}$ ... **[calculs]** ... Transl. de vecteur $2(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k})$ $\boxed{\text{et}}$
   $\mathcal{D} \begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ **Vérif.** Direction de $\mathcal{D}$: $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Retrouver $\overrightarrow{K}$!

25.4 Compléments sur les Applications affines

25.4.1 Résumé dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ affine euclidien

1. **Isométries affines** $\boxed{\text{$f$ affine, est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ ($f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, groupe) ; si l'appl. linéaire associée est une isométrie vectorielle de E : $\overrightarrow{f} \in \mathbb{O}(E)$ (groupe).}}$

– $\overrightarrow{f} \in \{Id_E\}$ $\Leftrightarrow$ $f \in \{$Translations de $\mathcal{E}\}$ **essentiel et connu**
$\overrightarrow{f} \in \{\pm Id_E\}$ $\Leftrightarrow$ $f \in \{$Translations ou symétries-point de $\mathcal{E}\}$ **connu aussi**

– $\overrightarrow{f} = \mathbb{O}_2^+$[rot. vect. de $\mathbb{R}^2$] $\Leftrightarrow$ $f \in \mathcal{I}s_2^+$ $\boxed{\text{(groupe des) déplacements du plan } \mathcal{P}}$: **vu**
– $\overrightarrow{f} = \mathbb{O}_3^+$[rot. vect. axiales de $\mathbb{R}^3$] $\Leftrightarrow$ $f \in \mathcal{I}s_3^+$ $\boxed{\text{(groupe des) déplacements de } \mathcal{E}_3}$: **vu**

2. $\boxed{\textbf{Non}}$ **isométrie, mais signalé**
– $\overrightarrow{f} \in \{k.Id_E, k \neq 0\}$ (gr. abélien des Hom. vect.) $\Leftrightarrow$ $f \in \{$Homothéties-Translations de $\mathcal{E}\}$
(**non abélien** pour hom.-affines et translations)

– $\overrightarrow{f} = k.(\overrightarrow{\text{isométrie vect.}})$ [on dit similitude vectorielle] $\Leftrightarrow$ f : similitude affine de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Similitudes \textbf{en dimension 2}}}$

• En vect. Matr. de $\overrightarrow{f}$ en base o.n. : $r.\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ ou $r.\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$

On peut aussi utiliser **les complexes** $z \mapsto z' = r.e^{i.\alpha}.z$ **ou** $z \mapsto z' = r.e^{i.\alpha}.\overline{z}$.

• En affine $z \mapsto z' = r.e^{i\alpha}.z + Cte$ (similit. directes) ou $z \mapsto z' = r.e^{i.\alpha}.\overline{z} + Cte$ (indirectes).
Avec $\mathbb{C}$: $z' = a.z + b$, $a \neq 0$, pour les **directes.**

25.4.2 Projection affine orthogonale sur $\mathcal{P} : x + 2y - z = -1$; vérifications

1. On cherche 12 coefficients : $Q = M' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$. Notons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \mathcal{P}$.

2. Posant $\boxed{\overrightarrow{QM} = \lambda.\overrightarrow{n}}$ (1), on passe de 12 à 1 inconnue : λ_M. On exprime (2) $\boxed{M' = Q \in \mathcal{P}.}$

Première solution. On a : $I(0,0,1) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{QM} = \lambda.\overrightarrow{n}$ avec $\lambda.(\overrightarrow{n} \centerdot \overrightarrow{n}) = x + 2y - z + 1$

$\boxed{\text{cf.}}$ Distance d'un point à un plan affine. On trouve le type $Y = A_{3,3}.X + B$. (I inutile !)

$$\overrightarrow{QM} : \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} = \frac{x + 2y - z + 1}{6} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \textbf{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Deuxième solution, légère variante. Avec $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{M'M} = \lambda.\overrightarrow{n}$, on exprime de plus que $M' \in \mathcal{P}$ (2)
pour trouver λ : $x' + 2y' - z' = -1$.

$\boxed{\text{Vérifications de } A}$ on se doute que c'est la proj. **vectorielle** sur le plan **vectoriel** : $x + 2y - z = 0$:
Avoir $Tr(\overrightarrow{f}) = rg(\overrightarrow{f}) = 2$: vu. Et on a expliqué que sa matrice était sym. car proj. **orth.**

$\boxed{\text{Vérifications de } B_{3,1}}$ on sait (ou on voit) que B, c'est O' ou $\overrightarrow{OO'}$; donc colinéaire à $\overrightarrow{n}$!

25.4.3 Propriétés des applications affines

1. Composition $\boxed{\text{La composée de 2 applications affines gof est affine associée à $\overrightarrow{g} o \overrightarrow{f}$.}}$

Démonstration. On a $\overrightarrow{O"M"} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{O'M'}) = \overrightarrow{g} o \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ et $\overrightarrow{g} o \overrightarrow{f}$ linéaire. Terminé.

$\boxed{\textbf{Utilisation}}$

• Soit s_I, s_J deux symétries points ; qu'est-ce $h = s_J o s_I$? Rép. : l'endomorphisme associé est $\overrightarrow{h} = (-Id)o(-Id) = Id$; d'où h translation ... de vecteur $2.\overrightarrow{IJ}$. $(s_I o s_J \neq s_J o s_I)$.

- $t_{-\overrightarrow{u}} o h_{I,2} o t_{\overrightarrow{u}} = f$? $\overrightarrow{f} = Id\ o(2.Id)oId = 2.Id$; f hom. aff. rapport 2, centre $I + (-\overrightarrow{u})$.
- $h_{J,2} o h_{I,1/2}$? Idem : translation. Dessins ? cf. ch Géométrie de $\mathbb{R}^2$.

2. Image d'une droite

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } \mathcal{D} \text{ une droite. Alors } f(\mathcal{D}) \text{ est une droite ou un point.}\\ f \text{ Et conserve le parallélisme au sens : } \mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2 \implies f(\mathcal{D}_1) // f(\mathcal{D}_2).\end{array}}$

Démonstration

$\mathcal{D} : (I, \overrightarrow{u})$ ou $\overrightarrow{IM} = \lambda \overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \begin{cases} \text{si } \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}_F : \text{ il dirige } f(\mathcal{D}); \\ \text{si } \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_F \text{ image=un point.} \end{cases}$

Attention On n'a pas dit $f(\mathcal{D}) // \mathcal{D}$! Mais ceci vrai si translation ou homothétie affine.

3. Conservation du barycentre $\boxed{\text{Si } G = Bar \begin{pmatrix} M & N \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \text{ donc } \alpha + \beta \neq 0, \text{ alors } G' = Bar \begin{pmatrix} M' & N' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.}$

Démonstration $\alpha.\overrightarrow{GM} + \beta\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}_E \Rightarrow \overrightarrow{f}(\alpha.\overrightarrow{GM} + \beta\overrightarrow{GN}) = \overrightarrow{0}_F : \alpha.\overrightarrow{G'M'} + \beta\overrightarrow{G'N'} = \overrightarrow{0}_F$. Fini.

Utilisation

- L'image du milieu de $[MN]$ est le milieu de $[M'N']$.
- Si une application affine $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ permutte 3 points M, N, P (par exemple les sommets d'un triangle), leur isobarycentre est invariant.
- Si $M = Bar[(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)]$ et $(AM) \cap (BC) = A'$ alors $A' = Bar[(B, \beta); (C, \gamma)]$ (Proj.)

4. (*) Lien : points fixes de f–Vecteurs invariants de $\overrightarrow{f}$.

   (a) D'abord sur le rang. Soit l' équation en M : $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{b}$, $r = rg(\overrightarrow{f})$. $(*)$
   Vérifier que : soit $(*)$ n'a pas de solution [si $\overrightarrow{b} \notin \text{Im}(\overrightarrow{f})$], soit possède comme solutions un sous-espace affine de direction Ker $(\overrightarrow{f})$; donc de dimension $p - r$, p étant le nombre d'inconnues.

   (b) Cas où $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (donc $\overrightarrow{f} : E \to E$). Notons $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points fixes.
   Vérifier que : $M' = M \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{f} - Id)(\overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{OO'}$. $(**)$
   Donc : soit $\mathcal{E}_1 = \emptyset$; soit sous espace affine de direction Ker$(\overrightarrow{f} - Id)$. Exemples ?

25.4.4 Remarques

1. En fait, un e.v. est lui même un e.a., attaché à lui-même ! La bijection de $\mathcal{E}$ dans $E : M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est ici de "E muni de l'origine $\overrightarrow{a}$" dans E : $\overrightarrow{x} \in E_{\overrightarrow{a}} \mapsto \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \in E$; on dit qu'il possède "une structure affine canonique". C'est pour celà qu'on parle de :

- Translation dans un e.v. : $\overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}$ pour $M \longmapsto M' = M + \overrightarrow{u}$; et, en e.v.euclidien, de
- Distance entre 2 vecteurs : $\delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$ pour $\delta(M, M') = \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}\|$.

Attention ! une translation n'est pas linéaire (si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$). [3]

2. Résumé.

On avait :	**Ici :**
Espaces vectoriels	Espaces affines.
Sous-espaces vectoriels	Sous espaces affines.
Combinaisons linéaires	Barycentres.
Bases	Repères.
Applications linéaires	Applications affines.
E.v.euclidien	E.a.euclidien.
Isométries vectorielles $\mathbb{O}(E)$	Isométries affines $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$.

[3] . On a encore f bijective $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ bijective et f^{-1} est affine associée à $\overrightarrow{f}^{-1}$.

. D'où, pour $\mathcal{E} = \mathcal{F}$: quand $\overrightarrow{f}$ décrit le groupe linéaire $\mathbb{GL}(E)$, f décrit le groupe affine $\mathbb{GA}(\mathcal{E})$.

. (*) Rappelons "l'inversion géométrique", application non affine de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, mais intéressante géométriquement !

M+ **Exercices**: **Transformation de $\mathbb{R}^3$ e.v.** puis e.a. PTSI

---

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$ espace vectoriel euclidien décrire les endomorphismes de matrice :
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   [E correspond à $r.e^{i.\alpha}$ avec $r^2 = 3^2 + 4^2$. Similitude vectorielle directe de rapport 5, d'angle α.]

2. Dans $\mathbb{R}^2$ e.v. e. (a) Que signifie en termes d'endomorphismes/matrices $z' = e^{i\alpha}.z$ et $z' = e^{i\alpha}.\overline{z}$?
   (b) Soit σ la sym. orthog./ $y = x.tan(\beta)$ et σ' / $y = x.tan(\beta + \varphi)$. Que dire de $\sigma' o\ \sigma$?
   [Justifier par exemple, que $\sigma' o\ \sigma$ est une isométrie vectorielle / positive / donc rotation / etc.]

3. $\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}^3 \text{ e.v. e.}}$ (a) Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Décrire pour A, B, C les endomorphismes associés (en base o.n.) Matrices inverses ?
   (b) Préciser la droite, symétrique orthogonale de $Vect(\overrightarrow{k})$ / au plan $2x - 3y + z = 0$.

4. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e.v.e. Matrices symétriques ($\neq$ Symétrie en général !) et de plus orthogonales ?

5. Dans $\mathbb{R}^3$ e.v. e. Soit $r \in \mathbb{O}_3^+$ d'angle α autour de $Vect(\overrightarrow{\omega})$; $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{\omega}$. Si $\|\overrightarrow{\omega}\| = 1$:
   (a) $r(\overrightarrow{a}) = cos(\alpha).\overrightarrow{a} + sin(\alpha).\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}$, $r(\overrightarrow{x}) = r(\overrightarrow{a}) + \lambda.\overrightarrow{\omega}$, $[\overrightarrow{x}, r(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{\omega}] = \|\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}\|^2.sin(\alpha)$.
   (b) $r(\overrightarrow{x}) = c\overrightarrow{x} + s\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} + (1-c)(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{x} + s\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} + (1-c)\overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x})$, $c = cos(\alpha)$...

On se limite (programme) à la première partie : en linéaire

6. (a) Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien expression de la proj. orthog. sur $\mathcal{P} : x + 2y - z = -1$. Vérifications ?
   (b) (*) Lieu des projetés orthogonaux de O sur les plans $x + \lambda y + \mu.z = 1$? [Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = x$].

7. (a) Vissages dans $\mathbb{R}^3$ e.a.e. Décrire $f\ M \longmapsto M' : x' = z - 2,\ y' = x,\ z' = y$. [Complément : f composée de 2 demi-tours axials=retournements et de 4 réflexions=symétries$_\perp$/plans affines.]
   (b) Idem avec $x' = (-x + 2y + 2z - 4)/3$, $y' = (2x - y + 2z + 2)/3$, $z' = (2x + 2y - z + 2)/3$.

8. (a) (*) Dans $\mathbb{R}^3$ affine projection oblique q sur $\mathcal{P} : 2x + y - z = 2$, de direction $Vect(\overrightarrow{u}(1, 1, 1))$.
   [$2x' = -y + z + 2$, $2y' = -2x + y + z + 2$, $2z' = -2x - y + 3z + 2$; $\text{Tr}(\overrightarrow{q})$? $\overrightarrow{OO'} = k.\overrightarrow{u}$.]
   (b) (*) Inversement décrire $f : \begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$ [Points fixes ? $\text{Tr}(\overrightarrow{f})$? ... Dilatation.]

9. (*) Applications affines telles que $f(\mathcal{D})//\mathcal{D}$, $\forall \mathcal{D}$. [$f(\mathcal{D})$ étant une droite ou un point.]
   (a) Soit $\overrightarrow{f}$ un endomorphisme tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ colinéaire à $\overrightarrow{x}$, ou $\forall \overrightarrow{x}$: $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = k_{\overrightarrow{x}}.\overrightarrow{x}$.
   Montrer que $f = k.Id$, k fixe. [Prendre $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ colinéaires ; puis libres et utiliser $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.]
   (b) Déduire que les solutions sont, si $f \neq$ Cte, les translations ou les homothéties affines.

10. (a) (*) Lien affine-vectoriel : Peut-on trouver $\overrightarrow{v}$ tel que $T_{\overrightarrow{v}} of = foT_{\overrightarrow{u}}$, f affine, T translation ?
    (b) (*) Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien, décrire $soros$, s symétrie orthogonale/plan, r rotation.
    (c) (**) En e.a.e. f conservant les distances est affine ! [$\|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| = \|\overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'P'}\| \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = ...$ d'où, si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{M_0'M'}$, $\overrightarrow{f}$ conserve le produit scalaire ; donc linéaire !]

Chapitre 26

Les polynômes, $\mathbb{K}[x]$

26.1 Généralités

26.1.1 Définitions. Opérations

1. Polynôme (formel)

   Pour $a_k \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle polynôme (formel) d'indéterminée x, toute expression du type : $P(\mathrm{x}){=}a_0 + a_1\mathrm{x}{+}...{+}a_n\mathrm{x}^n$. L'égalité $P(\mathrm{x}){=}Q(\mathrm{x}){=}\ b_0 + ... + b_m\mathrm{x}^m$ est définie par : $a_k = b_k, \forall k$.

   Exemples. 1) Le polynôme nul $P = O$ ou $P(\mathrm{x}){=}{-}3.\mathrm{x}^2{+}2.\mathrm{x}^4{+}\mathrm{x}^5$.
   2) Mais : $1{+}\mathrm{x}{+}\mathrm{x}^2{+}...$ non polynôme car il faut un nombre fini de coefficients non nuls.

2. Trois opérations. Addition $P+Q$, Multiplication par une constante $\lambda.P$, Multiplication $P.Q$: si $P(\mathrm{x}){=}a_0+a_1\mathrm{x}{+}...{+}a_5.\mathrm{x}^5$, $Q(\mathrm{x}){=}\ b_0+b_1\mathrm{x}{+}...{+}b_4\mathrm{x}^4$: $P.Q(\mathrm{x}){=}\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant 9} c_k\mathrm{x}^k$, avec $c_k = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant 9} a_{k-i}.b_i$.

   Degré $\boxed{\text{Si } P(\mathrm{x}){=}a_0 + a_1\mathrm{x}{+}...{+}a_n.\mathrm{x}^n,\ a_n \neq 0, \text{ on dit } d^oP = n.\ \text{ Si } P = O, \text{ on pose } d^o(O) = -\infty.}$

   $d^o(P.Q) = d^o(P) + d^o(Q)$ $\quad d^o(P+Q) \leqslant \max[d^o(P), d^o(Q)]$ $\quad d^o(P) = 0 \Leftrightarrow P = \underline{Cte \neq O}$.

   Exemple. Si $P(\mathrm{x}){=}{-}3.\mathrm{x}^2 + 2.\mathrm{x}^4{+}\mathrm{x}^5$: $d^o(P) = 5$ (et P normalisé, à cause du coeff. 1 de x^5)
   et $val(P) = 2$ [valuation : degré du monôme de plus bas degré ; si $P = O$, $val(O) = +\infty$].

   Et : Si $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 1.x^5$, $\quad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} -3.x^2$, $\quad P(x) \underset{x\to 1}{\sim} 7.(x-1)$ $\quad [x^2(x-1)(x^2+3x+3)]$!

3. On vient de considérer la fonction polynôme. C'est : $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.
   Ainsi, si $Q(\mathrm{x}){=}P(\mathrm{x}){+}\mathrm{x}(\mathrm{x}{-}1)(\mathrm{x}{-}3)$, les fonctions polynômes ont même valeur sur $A = \{0, 1, 3\}$.

26.1.2 Théorème

1. $\boxed{\text{Si pour une infinité de } x,\ P(x) = Q(x) \text{ : alors les polynômes sont égaux coefficient à coefficient.}}$

   (On dit égaux formellement ; on peut donc identifier polynômes et fonctions polynômes).

   Démonstration

   Si $D = P - Q$ de degré $d = d^o(D) \geqslant 0$, D s'annulerait au plus d fois. Faux : $D = O$, $d^o(D) = -\infty$.

   Idem : $\boxed{\text{Si un polynôme de degré au plus } n \geqslant 0, \text{ s'annule en } n+1 \text{ points distincts, c'est : } P = O.}$

2. Utilisation : polynômes de Tchebytchev $\boxed{\exists\ !\ P_n \textbf{ polynôme, tel que } P_n(cos(\theta)) = cos(n.\theta).}$

   1) Unicité : Si $P_n(cos(\theta)) = Q_n(cos(\theta))$, alors $P_n(x) = Q_n(x)$ sur tout le segment $[-1{,}1]$, donc égaux coefficients par coefficients. [Et ainsi, en particulier, $P_n(z) = Q_n(z)\quad \forall z \in \mathbb{C}$!]

   2) Existence : Ou par la formule de Moivre $[cos(\theta) + i.sin(\theta)]^n = cos(n.\theta) + i.sin(n.\theta))$; etc.
   ou par récurrence avec $cos[(n+1)\theta] + cos[(n-1)\theta] = 2.cos(n.\theta).cos(\theta)$ et les indices $n = 0$ et 1.

   3) Questions : préciser P_0, P_1, P_2, P_3. Que se passe-t-il si on change θ en $\pi/2 - \theta$?
   (Idem $sin((n+1).\theta)/sin(\theta)$ polynôme en $cos(\theta)$: polynôme de Tchebychev de 2ème espèce.)

26.2 Divisibilité des polynômes

$\mathbb{R}$[x] désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels. $\mathbb{C}$[x] l'ensemble des polyn. à coeff. dans $\mathbb{C}$. $\mathbb{K}$[x] l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ souvent. (Aussi : $\mathbb{Q}$[x], $\mathbb{Z}$[x].)

26.2.1 La division euclidienne

1. Théorème

   $\boxed{A, B \text{ dans } \mathbb{K}[\mathrm{x}],\ B \neq O\,;\ \text{ alors } \exists!(Q, R) \text{ (quotient, reste) : } A = B.Q + R \ \textbf{ avec } \ \mathbf{d}^o(R) < d^o(B).}$

   Démonstration

   Unicité. $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \Rightarrow B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$; si $Q_1 - Q_2 \neq O$, impossible avec les degrés.

   Existence. Algorithme d'Euclide, par exemple [Le mot "algorithme" vient de Al Kharezmi].

   Exemple A=2x^3−7x^2+x−1, B=x^2+x+1 à traiter comme la division de $a = 22$ par $b = 7$.

2. Définition $\boxed{\text{On dit que } B \text{ divise } A, \text{ noté } B/A, \text{ s'il existe } Q \text{ tel que } A = B.Q.}$ (Ainsi O divise O).

26.2.2 Division par (x−a)

1. Théorème $\boxed{\text{On a : } P(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - a)Q(\mathrm{x}) + P(a), \text{ notée } (*). \quad \textbf{Donc (x-}a\textbf{) divise } P \Leftrightarrow P(a) = \mathbf{0}.}$

   En effet, le reste est une constante cte ; et $x = a$: $cte = P(a)$. Equivalence facile.

2. **Pour la programmation, hors programme**, algorithme de Hörner :

   Notons $\begin{cases} P(\mathrm{x}) = a_n \mathrm{x}^n + \ldots + a_0 \\ Q(\mathrm{x}) = b_{n-1} \mathrm{x}^{n-1} + \ldots + b_0 \end{cases}$ [Attention : on notera souvent P(x)=a_0x^n+...+a_n]

   . Alors, pour $k \geqslant 1$, le coeff. de x^k dans $(*)$ est a_k d'une part ; et $-a.b_k + b_{k-1}$ d'autre part (convention $b_n = 0$). Donc $\boxed{b_{k-1} = a_k + a.b_k.}$

   . Si $k = 0$, qu'est-ce $b_{-1} = a_0 + a.b_0$? $(*)$ montre qu'il s'agit du reste $P(a)$!

   Donc

   > L'algorithme précédent permet de trouver non seulement le quotient, mais aussi le reste de la division par (x−a) avec seulement n additions et n multiplications.
   > Ceci donne pour $x = a$, $P(x) = a_0 + x.(a_1 + x.(\ldots. + x.(a_{n-1} + x.a_n)\ldots))$.

   Exemple Faire ainsi la division de x^5−x^4 − 3x^3 + 3x^2 − 1 par x+2. [Un calcul direct de $P(-2)$ est plus long !] (Poser 3 lignes : celle des a_k ; celle des $a.b_k$; celle des b_k, avec $b_5 = 0$).

26.2.3 Polynômes irréductibles

1. Remarque Dans $\mathbb{Z}$, la divisibilité est définie au signe près (ainsi les diviseurs de 2, premier, sont $\pm 1, \pm 2$) car les éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ pour la multiplication sont ± 1.

   De même, les polynômes inversibles étant les constantes non nulles, la divisibilité dans $\mathbb{K}$[x] est définie à une constante non nulle près.

2. Définition

   > Un polynôme $P \neq O$ et $\neq cte$ non nulle, est dit **irréductible** si ses diviseurs sont les constantes non nulles : $k \in \mathbb{K}^*$ et les polynômes "associés" : $k.P$, $k \in \mathbb{K}^*$.

   Exemple P(x)=2x+4 irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

26.2.4 Irréductibles dans $\mathbb{R}$[x] ou $\mathbb{C}$[x]

1. Théorème

   > Les polynômes de $\mathbb{C}$[x], irréductibles sur $\mathbb{C}$, sont exactement ceux de degré 1.
   > Ceux de $\mathbb{R}$[x] irréductibles sur $\mathbb{R}$, sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 avec $\Delta < 0$.

2. **Exemples**

1) x^4+x^2+1 est réductible sur $\mathbb{R}$. Au ch. $\mathbb{C}$, il a été factorisé sur $\mathbb{R}$ par plusieurs méthodes.

2) Idem : x^4-x^2+1 sur $\mathbb{R}$. Astuce : $x^4-x^2+1= x^4+2x^2+1-3x^2 =(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2 = ...$
Ou ses racines (*) ij, $\overline{ij}=\overline{i}.\overline{j}=-i.j^2$, $-ij$(parité), $+i.j^2$ et faire $(x-z_1)(x-\overline{z}_1)$ ...

3) x^4+1 à factoriser sur $\mathbb{R}$, même astuce par exemple.

Démonstration

- Un polynôme irréductible sur $\mathbb{C}$ (donc non constant) ne peut être que de degré 1, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss : $P(x)=a_0x^n+...+a_n=a_0(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_n)$ $(*)$.
Inversement, un polynôme de degré 1 est irréductible.
- Pour $P\in\mathbb{R}[x]$, irréductible sur $\mathbb{R}$ (donc non constant), soit α une racine sur $\mathbb{C}$.
Si $\alpha\in\mathbb{R}$, forcément P est de degré 1. Si $\alpha\notin\mathbb{R}$, comme P est à coefficients réels, $\overline{\alpha}\neq\alpha$ est racine ; donc $P(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})Q(x)$; forcément $Q\in\mathbb{R}^*$ et P de degré 2 avec $\Delta<0$.
En sens inverse, ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

26.2.5 Relations entre coefficients et racines, somme et produit surtout

Définition $\boxed{\text{Un polynôme est dit scindé s'il s'écrit } P(x)=a_0x^n+...+a_n=a_0(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_n)}$ $(*)$

x^2+4 non scindé sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé et rappel :

Formules de Viète **Notons** $\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=z_1+z_2+...+z_n\\ \sigma_2=z_1.z_2+...+z_{n-1}z_n\\ \sigma_3=z_1z_2z_3+...\\ ...\\ \sigma_n=z_1.z_2....z_n\end{array}\right.$ "fonctions symétriques élémentaires"

liées aux coefficients : $\boxed{\sigma_1=-a_1/a_0;\ \sigma_2=+a_2/a_0;\ ...\ \sigma_k=(-1)^k.a_k/a_0\ ...}$ développer $(*)$

(*) Exercice en complément :

Résoudre $(z+1)^n=e^{2ina}, a\in\mathbb{R}$ et simplifier $P_n=sin(a).sin(a+\frac{\pi}{n})....sin[a+\frac{(n-1)\pi}{n}]$.

Solution : On a $Eq.\Leftrightarrow[\frac{z+1}{e^{2ia}}]^n=1\Leftrightarrow z+1=e^{2ia}.e^{ik2\pi/n}$, $k\in[[0,n-1]]$;

$z=e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}-e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})})$. D'où les racines $z_k=e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}.2i.sin(a+\frac{k\pi}{n})$, $k\in[[0,n-1]]$.

Leur produit vaut

- d'une part : $(-1)^n.[1-e^{2i.na}]/1$ (Viète) ou $(-1)^{n+1}.e^{i.na}.2i.sin(na)$;
- d'autre part : $2^n.i^n.P_n.e^{i.na}.e^{\frac{i.\pi}{n}.\frac{(n-1)n}{2}}$ ou $2^n.i.(-1)^{n-1}.P_n.e^{i.na}$. D'où $P_n=\frac{sin(na)}{2^{n-1}}$.

(Question en plus : En déduire $sin(\frac{\pi}{n}).sin(\frac{2.\pi}{n})...sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.)

26.2.6 (*) Compléments sur la divisibilité

1. Montrer que $PoP(x)-P(x)$ est divisible par $P(x)-x$. [$\Rightarrow PoP(x)-x$ divisible par $P(x)-x$!]
Solution. Cet énoncé épouvante ! Posons $P(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}a_{n-k}x^k$. On connait $A^k-B^k=(A-B)(...)$
En écrivant $P(P(x))-P(x)$, il suffit de voir que chaque : $a_{n-k}.[P^k(x)-x^k]$ est divisible par $P(x)-x$: la clé à bien comprendre. Mais que [...] soit divisible par $P(x)-x$ est alors clair !

2. Division suivant "les puissances croissantes" :
   - En plus de la division euclidienne, on a la division suivante ; par exemple :
   Si $A=1+x+x^3$; $B=1-x+x^2$ $[val(B)=0]$; alors $1+x+x^3=(1-x+x^2).(1+2x+x^2)+x^3.R(x)$
   qui est appelée division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2.
   - Utilisée pour la décomposition de fractions rationnelles et pour les développements limités.

26.3 Dérivation des polynômes

26.3.1 Formule de Mac-Laurin

1. Enoncé. $\boxed{\text{Si } n \geqslant d^oP, \quad \text{alors :} \quad P(\mathrm{x}) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}.\mathrm{x} + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.\mathrm{x}^n.}$

2. Démonstration : On note tantôt $P(\mathrm{x}) = a_0.\mathrm{x}^n + a_1.\mathrm{x}^{n-1} + \ldots + a_n$ (1)

   tantôt $P(\mathrm{x}) = a_0 + a_1\mathrm{x} + \ldots + a_n.\mathrm{x}^n$ (2) (comme dans l'algorithme de Hörner).

   Ici, on utilise (2) ; on dérive k fois et on trouve : $P^{(k)}(0) = k!.a_k$; d'où a_k cherché.

26.3.2 Formule de Taylor pour les polynômes

1. Enoncé.

   Si $n \geqslant d^oP$, alors : $P(\mathrm{x}) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}.(\mathrm{x}-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.(\mathrm{x}-a)^n$

   ou bien, avec $\mathrm{x} = a + \mathrm{h}$: $P(a+\mathrm{h}) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}.\mathrm{h} + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.\mathrm{h}^n$.

2. Démonstration. Si $Q(\mathrm{h}) = P(a+\mathrm{h})$, la formule de Mac-Laurin appliquée à Q avec $Q'(\mathrm{h}) = P'(a+\mathrm{h})$ ... $Q^{(k)}(\mathrm{h}) = P^{(k)}(a+\mathrm{h})$,... fournit alors naturellement cette généralisation $[Q'(0) = P'(a)\ldots]$.

26.3.3 Application aux racines multiples

Définition **a est dit racine d'ordre k (au moins) de P si $(\mathrm{x}-a)^k$ divise P ;**
racine d'ordre k exactement si de plus $(\mathrm{x}-a)^{k+1}$ ne divise pas P.

Théorème Soit $k \geqslant 1$. a racine d'ordre au moins $k \iff P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$ (k égalités)
a racine d'ordre k exactement $\iff P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Démonstration. Il suffit de voir ligne 1 :

$\Rightarrow$ Si $P(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-a)^k.Q(\mathrm{x})$, trouver ce qui est dit par (*) la formule de Leibnitz.

$\Leftarrow$ Avec l'hypothèse, la formule de Taylor en a donne de suite la réponse.

Remarques

1) Un polynôme de degré n sur $\mathbb{C}$ a n racines en comptant les ordres de multiplicité ($P(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^n$).

2) Si $a \neq b$ et si P divisible par $(\mathrm{x}-a)^\alpha$ et par $(\mathrm{x}-b)^\beta$, alors P est divisible par leur produit.

3) (*) a racine de P à l'ordre k exactement $\Leftrightarrow \overline{a}$ racine de $\overline{P}$ à l'ordre k exactement, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont conjugués. **Donc**

Si P est à coefficients réels, ses racines non réelles sont conjuguées **avec** même ordre de multiplicité.

(*) Pour 3) en effet : si $P(z) = a_0.z^n + \ldots + a_n$, par définition : $\overline{P}(z) = \overline{a_0}.z^n + \ldots + \overline{a_n}$.
Donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow \overline{P}(\overline{a}) = 0$. Et de même pour les polynômes dérivés successifs.

Un exercice corrigé Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{x}]$; montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' aussi.

Sol. Entre 2 racines réelles distinctes de P, (au moins) une de P', grâce au Théorème de Rolle :
Si f est C^0 sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $a \neq b$, et $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule sur $]a,b[$.

. Donc si P a n racines réelles distinctes, c'est clair.

. Cas général : Soit x_1 racine de P à l'ordre $k_1 \geqslant 1$, ... x_p à l'ordre $k_p \geqslant 1$; on a $k_1 + \ldots + k_p = n$.
Alors x_1 est racine de P' à l'ordre $k_1 - 1$! et comme on a une racine de P' dans $]x_1, x_2[$..., cela fait $(k_1 - 1) + \ldots + (k_p - 1) + (p-1)$ racines réelles pour P' (au moins). Ou $n-1$: le compte est bon !

26.4 (*) Compléments

26.4.1 Des exercices corrigés

1. Soit $z : a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$. Montrer que $\underline{\mid z \mid \leqslant 1 + m}$, $m = max \mid \dfrac{a_k}{a_0} \mid, k > 0$.

   Solution. Si $\mid z \mid > 1$ on a : $\mid z \mid^n = \dfrac{\mid a_1 z^{n-1} + ... + a_n \mid}{\mid a_0 \mid} \leqslant \dfrac{\mid a_1 \mid\mid z \mid^{n-1} + ... + \mid a_n \mid}{\mid a_0 \mid} \leqslant m.\dfrac{\mid z^n \mid -1}{\mid z \mid -1}$; $\mid z \mid^n \leqslant \dfrac{m. \mid z^n \mid}{\mid z \mid -1}$ d'où $\mid z \mid \leqslant 1 + m$; et si $\mid z \mid \leqslant 1$ évident. [Borne élémentaire].

2. Equation du 3ème degré : Soit $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; on pose $x = x + \alpha$ et avec $\alpha = \dfrac{-b}{3a}$, on est ramené à $\boxed{x^3 + px + q = 0\ (*)}$ (c'est-à-dire pas de terme en x^2 et on a divisé par $a \neq 0$).

   Méthode de Cardan-Tartaglia : Posant $x = u + v$, $(*)$ devient $u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$.

   Donc, si on impose (1) $3uv + p = 0$, on a (2) $u^3 + v^3 + q = 0$. Résolution de $\begin{cases} u.v = -p/3 \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$:

   Divers points de vue : ou on cherche une racine réelle (si coeff. réels), ou on est sur $\mathbb{C}$; si u^3, v^3 solutions de $T^2 + qT - \dfrac{p^3}{27} = 0$ (R) dite équation résolvante, avec $u.v = \dfrac{-p}{3}$; si (u_0, v_0) couple solution, les autres : $(j.u_0, j^2.v_0)$; $(j^2.u_0, j.v_0)$. Alors : $x_1 = u_0 + v_0$; $x_2 = j.u_0 + j^2.v_0$; $x_3 = j^2.u_0 + j.v_0$.

   Remarques. $\Delta = 0$ ou $4p^3 + 27q^2 = 0 \Leftrightarrow$ Une racine au moins double. Plusieurs façons :

   - $\Delta = 0 \Longleftrightarrow u^3 = v^3 = -q/2,\ u.v = -p/3$. Soit α une racine (sur $\mathbb{C}$) de $-p/3$; alors : $\alpha^6 = -p^3/27 = q^2/4$; donc α^3 ou $(-\alpha)^3$ vaut $-q/2$. Supposons $\alpha^3 = -q/2$; alors $u_0 = v_0 = \alpha$ convient ; solutions : $2\alpha, -\alpha, -\alpha$. Inversement : $x_2 = x_3 \Rightarrow u_0 = v_0$; donc $\Delta = 0$.
   - Une racine de P', soit $\pm\alpha$, est racine de P si et seulement si ... $4p^3 + 27q^2 = 0$ ... A voir.

   Cas des coefficients réels | Discussion des racines réelles à faire (*) !

3. Equation du 4ème degré : Ferrari 16ème siècle. On se ramène d'abord à $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

   Puis chercher y tel que $x^4 + (p + y)x^2 + (\dfrac{p + y}{2})^2 = -qx - r + yx^2 + (\dfrac{p + y}{2})^2$ ait un second membre avec $\Delta = 0$ $[\Leftrightarrow (x^2 + \dfrac{p + y}{2})^2 = y.(x - \alpha)^2]$ d'où une équation de degré 3 en y !

4. (*) Soit $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$, $g(x) = x^n - \mid a_1 \mid x^{n-1} - ... - \mid a_n \mid, a_n \neq 0$. Montrer que g a une unique racine dans $\mathbb{R}^+$ et qu'elle majore les $\mid z_k \mid$, $f(z_k) = 0$ (récurrence) [Borne de Cauchy].

26.4.2 (*) D'autres analogies avec $\mathbb{Z}$:

On dit que deux polynômes sont premiers entre eux (noté $A \wedge B = 1$) si leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles (les unités). [Dans $\mathbb{Z}$ les diviseurs communs à 9 et 16 sont ± 1]. On a le :

Théorème de (Bachet-)Bezout : $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists\, U, V : U.A + V.B = 1$.

($\Leftarrow$) évident ($A \wedge B = 1$ signifiant $pgcd(A, B) = 1$)

($\Rightarrow$) Par l'algorithme d'Euclide : dans $A = BQ + R$, les diviseurs de A et B sont ceux de B et R ; jusqu'à arriver à R_n=pgcd(A, B), dont l'existence est en même temps fournie ; ainsi qu'une relation de Bezout en remontant [voir déjà $56 \wedge 15 = 1$]. On en déduit les conséquences :

1) Théorème de Gauss : $A/$(divise) $B.C$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow A/C$. En particulier la condition de Gauss : Pour P irréductible (premier avec tout polynôme qu'il ne divise pas) $P/BC \Rightarrow P/B$ ou P/C.

2) Aussi : $(A/C, B/C$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow AB/C$. Cas important $A = (x-a)^\alpha$, $B = (x-b)^\beta$, $a \neq b$.

3) Existence et l'unicité de la décomposition en produit d'irréductibles, pour tout polynôme non constant ; qui donne aussi : pgcd(P, Q).ppcm$(P, Q) = P.Q$ [à une constante non nulle multiplicative près].

M+ **Exercices: Polynômes $\mathbb{R}$[x], $\mathbb{C}$[x].** **PTSI**

---

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$:
   (a) $x^6 - 1$; (b) $x^4 + x^2 + 1$; (c) (*) $x^4 - x^2 + 1$;
   (d) $x^8 + x^4 + 1$; (e) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$ [poser $y = x + \dfrac{1}{x}$ si utile ; mieux $x^2 + 1$ en facteur]
   (f) Factoriser sur $\mathbb{C}$, en trouvant une racine $a \in \mathbb{R}.i$: $P(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

2. Montrer que B divise A (noté B/A) si :
   (a) $B = x(x + 1)(2x + 1)$ et $A = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, $n \geqslant 1$.
   (b) $B = x^2 + x + 1$ et $A = x^{3p+2} + x^{3q+1} + x^{3r}$ [factoriser B].
   (c) $B = (x - 1)^2$ et $A = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$, $n \geqslant 1$ [racine double].
   (d) $B = x^2 - 2x.cos(\alpha) + 1$ et $A = x^n.sin(\alpha) - x.sin(n.\alpha) + sin((n - 1).\alpha)$, $n \geqslant 1$.
   [Factoriser B ; attention au cas où ses racines sont confondues].
   (e) $B = x^2 - 2x.cos(\alpha) + 1$ et $A = x^{n+1}.cos((n - 1).\alpha) - x^n.cos(n.\alpha) - x.cos(\alpha) + 1$, $n \geqslant 1$.

3. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de $[x.sin(\theta) + cos(\theta)]^n$ par $x^2 + 1$.
   (b) Reste de la division euclidienne de $A = x^n$ par $B = (x - 3)^2$ [dériver].
   (c) Quotient et reste de la division de $A = x^{5n}$ par $B = x^5 - 1$ [$q = x^5$].

4. Racines multiples ?
   (a) Montrer que $1 + x + x^2/2! + ... + x^n/n! = P_n(x)$ n'a que des racines simples (sur $\mathbb{C}$!)
   (b) Ordre de multiplicité de $x = 1$ dans $P_n(x) = x^{2n} - n.x^{n+1} + n.x^{n-1} - 1$?
   (c) Trouver P de degré 5 : $(x - 1)^3$ divise $P + 1$ et x^3 divise $P - 1$.

5. (a) Avec les racines de $P(x) - P(0)$, trouver les polynômes P : $P(x + 1) = P(x)$.
   (b) On cherche tous les polynômes P tels que : $(x + 3).P(x) = x.P(x + 1)$.
   Vérifier que $0, -1, -2$ sont racines. Poser $P(x) = x(x + 1)(x + 2)Q(x)$ et conclure.
   (c) (*) Trouver, de même, les polynômes P tels que : $P(x^2) = P(x).P(x - 1)$.

6. (*) Trouver une C.N.S. pour que $x^3 + px + q$ ait une racine au moins double.

7. (*) C.N.S. pour que les racines de $z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d$ forment un carré ; un parallélogramme ?

8. (*) Sans division euclidienne (Horner, hors progr.) diviser $A = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ par $B = x - 2$.

9. (*) Montrer que $1 - x.cos(a) = [1 - 2x.cos(a) + x^2](1 + b_1x + ... + b_nx^n) + x^{n+1}R(x)$;
   et $x.sin(a) = [1 - 2x.cos(a) + x^2](1 + c_1x + ... + c_nx^n) + x^{n+1}S(x)$, b_k, c_k à trouver.
   [C'est, en fait, la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n (hors programme) ;
   les racines du polynôme de degré 2 sont essentielles ...]

10. (*) Résoudre $(\dfrac{z+1}{z-1})^n + (\dfrac{z-1}{z+1})^n = 1$; puis (*) $(\dfrac{z+1}{z-1})^n + (\dfrac{z-1}{z+1})^n = 2.cos(\alpha)$.

Chapitre 27

Fractions rationnelles

Après un difficile chapitre sur les polynômes, en voici un plus facile ; d'autant qu'il ne s'agit que de la pratique (résultats admis) sur des exemples simples.

27.1 Généralités

27.1.1 Définitions

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes $\dfrac{N(X)}{D(X)}$, avec $D \neq O$. En fait :

$\dfrac{X-1}{X^2-1}$ et $\dfrac{1}{X+1}$ sont deux représentants de la même fraction ; le second : représentant irréductible.

Quand $\dfrac{N}{D}$ est irréductible, une racine de N à l'ordre k est dite racine de la fraction à l'ordre k.
Une racine de D à l'ordre k est dite pôle de la fraction à l'ordre k.

On note :
$\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions à coefficients réels. X est l'indéterminée (qui peut être une matrice)
$\mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions à coefficients complexes. ($\mathbb{Q}(X)$ etc. $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

27.1.2 Opérations

1. Quand on parle de fonction rationnelle ($f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$), on s'occupe du domaine, f est C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k.k!}{(x+1)^{k+1}}$. Mais quand on parle de fraction, on ne s'en occupe pas ($\dfrac{1}{X+1}$).
2. Résumé des opérations :
   Somme des fractions rationnelles, produit entre elles. Lien entre $+$ et $\boldsymbol{.}$: distributivité.
   On passe de $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}(X)$, comme de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$. On met ensuite x au lieu de X par commodité.

---

3. **En complément** (*)
   Transformer l'équation (1) $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a.d \neq 0$, par la fonction $f(x) = 1/x$.
   C'est-à-dire, trouver une équation en y (2), dont les racines sont les $\dfrac{1}{x_k}$, x_k racines de (1).

   Solution1 On cherche $\sigma'_1 = \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$, $\sigma'_2 = \dfrac{1}{x_1.x_2}+\dfrac{1}{x_2.x_3}+\dfrac{1}{x_3.x_1}$ et $\sigma'_3 = \dfrac{1}{x_1.x_2.x_3}$ ... Avec $y^3-\sigma'_1y^2+\sigma'_2y-\sigma'_3=0$, on arrive à : $y^3+\dfrac{c}{d}y^2+\dfrac{b}{d}y+\dfrac{a}{d}=0$ ou (2) $d.y^3+c.y^2+b.y+a=0$.

   Solution2 "Eliminer" x entre $\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d=0 \\ \text{et :} \quad y=1/x. \end{cases}$ C'est-à-dire, trouver une C.N.S. pour que les 2 équations soient ensemble possibles ; soit une C.N.S. pour que les 2 équations aient au moins une solution commune en x. C'est facile ici et même réponse !

27.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

27.2.1 Le résultat

1. Théorème $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } D(x)=k.(x-a_1)^{\alpha_1}....(x-a_p)^{\alpha_p} \text{ alors on a, et de manière unique,}\\ \dfrac{N(x)}{D(x)}=E(x)+\dfrac{cte}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+...+\dfrac{cte}{x-a_1}+... \text{ Idem pour les autres pôles.}\end{array}}$

   $E(x)$ étant **un polynôme appelé partie entière**
   pouvant s'obtenir comme quotient de la division euclidienne de N par D.

   Exemple-1 : $\dfrac{2.x^4}{(x^2+1).(x+1)^2}=\dfrac{2.x^4}{(x-i).(x+i).(x+1)^2} = 2+\dfrac{a}{x-i}+\dfrac{b}{x+i}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{x+1}.$

   Comment trouver les 4 coefficients ? "$\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{x+1}$: partie principale relative au pôle -1".

   . Déjà, **on voit juste après que** a, b et c sont aisés.
   . Puis, on peut prendre ici $x=0$ d'où d (vu après).
   . Faire une vérification ... et c'est fini !
   . (Si on voulait, en conjugant tout sauf x : à gauche, fraction invariante ; à droite on aurait $2+\dfrac{\overline{a}}{x+i}+\dfrac{\overline{b}}{x-i}+\dfrac{\overline{c}}{(x+1)^2}+\dfrac{\overline{d}}{x+1}$. Unicité $\Rightarrow a=\overline{b}$, $b=\overline{a}$, c,d réels : autre vérification !)

2. Comment trouver le coefficient du terme de **plus haut degré,** dans une partie principale ?

   Dans l'exemple trouver le coefficient c de $\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{x+1}$ pour le pôle double $x=-1$.

   . **Méthode** : $\boxed{\text{Multiplier chaque membre par } (x+1)^2\,;\ \textbf{puis faire } x=-1.}$ Car

   à gauche $\dfrac{2.(-1)^4}{(-1)^2+1}$, à droite $(x+1)^2(2+\dfrac{a}{x-i}+\dfrac{b}{x+i})+\dfrac{c}{1}+\dfrac{d.(x+1)}{1}$ que c : $c=1$.
   . **Idem** : multiplier par $x-i$ puis $x=i$; donc $a=-1/2$.
   . multiplier par $x+i$ puis $x=-i$; trouver $b=-1/2$.
   . Enfin, la valeur commode $x=0$ donne $d=-3$.
   . Vérification $x=1$ acceptable : associer les 2 termes non réels.

3. (*) Dans cet exemple-2, on calcule et utilise le **début du reste**.

   $\dfrac{x^4+1}{x^2.(x+i)} = x-i + \underline{\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+i}}$ car : $N(x)=D(x).(x-i)+ [-x^2+...]$.

   donc : $\dfrac{N(x)}{D(x)}=x-i + \underline{\dfrac{-x^2+...}{x^2(x+i)}}$ (fractions soulignées égales pour ∞ après).

   . **Méthode** : Multiplier par x^2, puis $x=0$ [noté $*x^2$, $x=0$] : $a=1/i=-i$.
   . Idem : Multiplier par $(x+i)$, puis prendre $x=-i$; alors, cette fois : $c=-2$.
   . $x=0$: pôle déjà vu. Mais on peut utiliser ∞ : dans les 2 **fractions soulignées**,
   on multiplie par x et on fait tendre x vers ∞ ; alors $b+c=-1$; $b=1$.
   . Vérification $x=i$ possible. **Sans le début du reste, faire aussi $x=1$: moins bon.**

27.2.2 Autres exemples

1. Décomposer : $\dfrac{7}{(x+1)^3}$. Rép. : déjà fait car on a $\dfrac{cte}{(x+1)^3}+\dfrac{cte}{(x+1)^2}+\dfrac{cte}{x+1}$ et unicité !

2. Décomposer : $\dfrac{7.x}{(x+1)^3}$.

   Réponse : il suffit d'écrire $7x=7(x+1)-7$ d'où : $\dfrac{7x}{(x+1)^3}=\dfrac{7}{(x+1)^2}-\dfrac{7}{(x+1)^3}$.

3. Décomposer : $\dfrac{1}{x^2+1}$. Réponse : $\dfrac{1}{x^2+1} = 0 + \dfrac{a}{x-i} + \dfrac{b}{x+i}$. a, b facile par la méthode, $a = \dfrac{1}{2i}$.
Mais on peut ici utiliser la **parité** $F(x) = F(-x) = \dfrac{a}{-x-i} + \dfrac{b}{-x+i}$ $\underline{\Rightarrow b = -a}$, utiliser $x = 0$ et aussi multiplier par x, puis $x = \infty$ qui redonne $a + b = 0$. (Et conjuguer si on veut : $b = \overline{a}$.)
A bien voir car c'est la dérivée de $x \mapsto Arctan(x)$.

4. Décomposer $\dfrac{1}{x(x+1)}$. **En déduire une expression simplifiée de** : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.
Rép. : $\dfrac{1}{x(x+1)} = 0 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$, $a = 1$, $b = -1$. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (télescopie) car $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

5. (*) Décomposer $F(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2(x-1)^2}$. (Exercice de calcul.)
Ind. : $\dfrac{x^2+x+1}{x^2(x-1)^2} = 0 + \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{x-1}$; et a, b, c, d <u>réels</u>, en conjuguant, si utile.
$a = 1$ et $c = 3$ aisément. Puis $*x$, $x = \infty$ donne $b + d = 0$. Encore 2 éq. et la vérif. sera faite !
Voir que $x = -j$ est commode vis à vis des **dénominateurs** : $1/j^2 = j$, $1/j = j^2 = -1 - j$, avec <u>l'implication</u> $\boxed{(Aj + B = Cj + D;\ A,\ B,\ C,\ D \text{ réels}) \Rightarrow \underline{A = C}\ ,\ \underline{B = D}.}$ A gauche $\dfrac{j^2 - j + 1}{j^2.j^4} = -2j$,
à droite $aj + b(1+j) - c(1+j) + dj$; d'où 2 éq. $b - c = 0$, $a + b - c + d = -2$; donc $b = 3$, $d = -3$.

27.2.3 Décomposition de $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$

<u>Remarques</u> • Toute <u>autre</u> solution que la suivante : difficile ! [<u>Penser à</u> $P(x) = 9.(x-1)^2.x^6$.]
• Tous les pôles sont, en fait, simples ; normal car : si a est racine d'ordre $k \geqslant 1$ de P, alors a racine d'ordre $k-1$ de P' et donc pôle d'ordre 1 de notre fraction ! Toutefois, le numéro suivant (sur les pôles simples) ne va pas <u>car</u> la fraction P'/P <u>n'est pas</u> irréductible si P a des racines multiples !
Si $P(x) = k.(x-a_1)^{\alpha_1}.(x-a_2)^{\alpha_2}....(x-a_p)^{\alpha_p}$, avec $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ ... : $\underline{P'(x) = ...}$

donc : $\boxed{\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{\alpha_1}{x-a_1} + ... + \dfrac{\alpha_p}{x-a_p}.}$ (Les coefficients sont donc **ici des entiers naturels** !)

27.2.4 (*) Complément théorique : cas d'un pôle simple

Suposons une fraction rationnelle <u>irréductible</u> $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ pour laquelle <u>$x = a$ est un pôle simple</u>, i.e. (=id est) :
$D(a) = 0$, $D'(a) \neq 0$. Ainsi : $\dfrac{1}{x^n - 1}$ n'admet que des pôles simples : les n racines nièmes de l'unité.

$$\boxed{\text{Dans ce cas , le coefficient de } \dfrac{1}{x-a} \text{ est : } \dfrac{N(a)}{D'(a)}.}$$

En effet, on a : $\dfrac{N(x)}{D(x)} = E(x) + \dfrac{\lambda}{x-a}$+ parties principales relatives aux autres pôles.
Et on sait que : $\lambda = [\dfrac{N(x)}{D(x)}.(x-a)]_{x=a}$ (évalué en $x = a$) et alors $\dfrac{D(x)}{x-a} = \dfrac{D(x) - D(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} D'(a)$
si a est réel ; (si a non réel, utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.)

$\boxed{\text{Exemple}}$ $\dfrac{1}{x^n - 1} = 0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda_k}{x - \omega_k}$ en notant $\omega_k = e^{\frac{ik.2\pi}{n}}$. Alors : $\lambda_k = \dfrac{1}{n.\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$. Pourquoi ?

Vérification : Si $\underline{n \geqslant 2}$, on doit avoir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$. Pourquoi ? (avec ∞). Est-ce vrai ? (connu !)

27.3 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

27.3.1 Le résultat

1. Sur un exemple $\dfrac{2x^4}{[x^2+1].(x+1)^2}$.
   - Rien de changé pour la partie entière. Rien de changé concernant le pôle (double) $x=-1$.
   - Pour le pôle $x=i$ regroupé ici avec son conjugué $x=-i$, la décomposition est : $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}$, A, B étant 2 constantes réelles à calculer (après) : $\dfrac{2x^4}{[x^2+1].(x+1)^2} = 2+\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{x+1}$.
2. Autres exemples
   - . $\dfrac{1}{(x+1).[x^2+x+1]^2} = 0+\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{[x^2+x+1]^2}+\dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$ de manière **unique**.
   - . L'exemple de fraction non réelle $\dfrac{x^4+1}{x^2.(x+i)}$ **n'a pas lieu sur** $\mathbb{R}$.
   - . Les exemples $\dfrac{7}{(x+1)^3}, \dfrac{7x}{(x+1)^3}, \dfrac{1}{x(x+1)}, \dfrac{x^2+x+1}{x^2(x-1)^2}$ **identiques** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   - . Et $\dfrac{1}{x^2+1}$ **déjà décomposée sur** $\mathbb{R}$ (mais pas sur $\mathbb{C}$: **vue**).
3. Que devient la méthode, vue sur $\mathbb{C}$, pour le cas de $\mathbb{R}$?

   Sur l'exemple $F(x) = \dfrac{1}{(x+1).[x^2+x+1]^2} = 0+\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{[x^2+x+1]^2}+\dfrac{dx+e}{[x^2+x+1]}$.

   $\boxed{\text{On multiplie chaque membre par } [x^2+x+1]^2,\ \textbf{puis on fait } x=j \textbf{ (qui annule [...]) !}}$

   $$\begin{cases} \text{A droite : il reste } b.j+c \text{ seulement.} \\ \text{Et à gauche : } \dfrac{1}{j+1} = \dfrac{1}{-j^2} = \dfrac{-j}{1} = -j \end{cases} \qquad \text{Or :}$$

   Si $\omega \notin \mathbb{R}$, $A.\omega+B = C\omega+D$, A,B,C,D réels $\Rightarrow A=C,\ B=D$ [à voir]. D'où $b=-1, c=0$.

   Finir :

   a est facile. $x=0$ est bon et donne e. $*x$, $x=\infty$ est bon aussi et donne d. $x=i$ pour vérifier.

   (Autre façon ayant b et c : On peut (**pas obligé** !) aussi faire
   $$F(x) - \frac{bx+c}{[x^2+x+1]^2} = \ldots = \frac{1}{[x^2+x+1]} = 0+\frac{a}{x+1}+\frac{dx+e}{[x^2+x+1]} \quad \text{et ...)}$$

27.3.2 A bien noter

1. Moins commode : $\dfrac{1}{(x-1).[x^2+x+1]^2} = 0+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{[x^2+x+1]^2}+\dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$, $\quad bj+c = \dfrac{1}{j-1}$.

   Alors faire le produit en croix : $(bj+c)(j-1)=1$ **et dès qu'on a** j^2**, mettre** $-1-j$ **:**
   $b(-1-j)+cj-bj-c=1$. 2 éq. : $-b-c=1$, $-2b+c=0$. Finir ($x=0,\infty$), vérifier ($x=i$).
2. Exemple initial : $\dfrac{2x^4}{[x^2+1].(x+1)^2} = 2+\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{x+1}$. $\left(\begin{array}{c} \textit{Ici :}\ Ai+B = 2.i^4/(1+i)^2 \\ A=-1, B=0, c=1, d=-3, ? \end{array}\right)$
3. Attention : ne pas oublier ni partie entière, **ni parité** s'il y a lieu
   - $\boxed{\text{Paire}}$ $\dfrac{1}{x^4+1}$ sur $\mathbb{R}$. $x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2$; d'où $\dfrac{1}{x^4+1} = 0+\dfrac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$.
     Parité $F(-x)=F(x)$: plus que 2 coefficients inconnus ! $x=0$, $x=i$: terminent.
     (La méthode (*) ? ω annulateur de $x^2-\sqrt{2}x+1$; $\omega^2 = \sqrt{2}\omega-1$, $a\omega+b = 1/\ \omega^2+\sqrt{2}.\omega+1$ ...)
   - $\boxed{\text{Impaire}}$ $\dfrac{1}{x(x^2-1)^2}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: c'est pareil ici). Ecrire $F(x) = -F(-x)$ et unicité ... Ci-après.

27.4 (*) En complément

27.4.1 Une fraction impaire $\dfrac{1}{x(x^2-1)^2}$

On a : $F(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)^2} = \dfrac{1}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x+1)^2} + \dfrac{e}{x+1}$.

Puis $F(x) = -F(-x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{-b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{-d}{(x-1)^2} + \dfrac{e}{x-1}$ attention ! Donc par unicité $d = -b,\ e = c$ Ou $\dfrac{1}{x(x^2-1)^2} = \dfrac{1}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{-b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x+1}$.

Maintenant :

a est facile avec la 'méthode" ; b idem ; et $*x, x = \infty$ est bon et donne c. ($x = i$ pour vérifier mais on peut aussi relire son calcul) soit $\dfrac{1}{x(x^2-1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1/4}{(x+1)^2} - \dfrac{1/2}{x+1} + \dfrac{1/4}{(x-1)^2} - \dfrac{1/2}{x-1}$.

27.4.2 Un cas de pôle d'ordre élevé $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^6}$

Notons : $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^6} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b_6}{(x+2)^6} + \dfrac{b_5}{(x+2)^5} + \dfrac{b_4}{(x+2)^4} + \dfrac{b_3}{(x+2)^3} + \dfrac{b_2}{(x+2)^2} + \dfrac{b_1}{x+2}$.

a est facile ; b_6 aussi ; b_1 aussi (avec $*x, x = \infty$). On veut bien à la rigueur passer $\dfrac{b_6}{(x+2)^6}$ à gauche mais il reste 4 coefficients ! Il y a bien mieux, voici :

$\boxed{\text{Posons } x+2 = T \text{ ou } x = -2+T}$ alors $x+1 = -1+T$ et on cherche :

$\dfrac{1}{(-1+T).T^6} = \dfrac{a}{-1+T} + \dfrac{b_6}{T^6} + ... + \dfrac{b_1}{T}$, ou encore : $\dfrac{1}{-1+T} = b_6 + b_5.T + ... + b_1.T^5 + T^6.\dfrac{a}{-1+T}$.

Eh bien, l'écriture $\dfrac{1}{-1+T} = b_6 + b_5.T + ... + b_1.T^5 + T^6.G(T)$ où T non en facteur dans le dénominateur de $G(T)$ s'appelle "division suivant les puissances croissantes" de 1 par $-1+T$ (hors programme).

Mais ici, elle est connue car : $\dfrac{1-T^6}{1-T} = 1 + T + T^2 + T^3 + T^4 + T^5$!

Donc $\dfrac{-1}{1-T} = -1 - T - T^2 - T^3 - T^4 - T^5 - T^6.\dfrac{1}{1-T}$. D'où $b_6 = b_5 = ... = b_1 = -1$ et $a = 1$.

27.4.3 Equations réciproques

Une équation (1) $a_0.z^n + ... + a_n = 0$, $a_n \neq 0$, est dite "réciproque" si a racine d'ordre $k \Rightarrow 1/a$ aussi.

Or l'équation dont les racines sont $\dfrac{1}{z}$ est : $\dfrac{a_0}{z^n} + ... + a_n = 0$ ou (2) $a_n.z^n + ... a_1 z + +a_0 = 0$.

Donc : (1) et (2) ont les mêmes racines $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_0}{a_n} = \dfrac{a_1}{a_{n-1}} = ... = \dfrac{a_n}{a_0} = k$ avec $k^2 = 1$, soit $k = \pm 1$.

L'équation est donc du type (I) si $a_k = a_{n-k}$ $[x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0]$

ou bien du type (II) si $a_{n-k} = -a_k$ $[x^6 - x^5 + (\alpha - 1)x^4 + (1-\alpha)x^2 + x - 1 = 0]$.

Résolution : Une fois les racines éventuelles ± 1 écartées, on arrive à une équation réciproque aussi, de degré pair et du type (I) (sinon ± 1 racine) soit $b_0 x^{2r} + b_1.x^{2r-1} + ... + b_{2r} = 0$ et $b_0 = +b_{2r}$, etc. Ou encore : $b_0.[x^r + \dfrac{1}{x^r}] + b_1.[x^{r-1} + \dfrac{1}{x^{r-1}}] + ... + b_r = 0$.

Posons $y = x + \dfrac{1}{x}$; alors $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$; $y.(y^2-2) = (x + \dfrac{1}{x})(x^2 + \dfrac{1}{x^3}) = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + y$ donc $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = y^3 - 3y$; et en général $x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} = (x + \dfrac{1}{x}).(x^k + \dfrac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}})$.

D'où une équation de degré moitié en y. Voir les 2 exemples.

M+ **Exercices: Fractions rationnelles $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{C}(x)$** **PTSI**

---

1. Calculer la dérivée n-ième de : $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$. Puis de : $\dfrac{1}{x^2+1}$. (Décomposer sur $\mathbb{C}$.)

2. Décomposer sur $\mathbb{C}$:
$\dfrac{1}{x^4-1}$ (paire) ; $\dfrac{3x-1}{x^2(x+1)^2}$ $(x=j)$; $\dfrac{(x^2-x-1)^2}{x^2(x-1)^2}$ (partie entière non nulle) ;
puis (*) $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)...(x-n)}$; (*) $\dfrac{1}{x(x^2-1)^2}$ (impaire) ; (*) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^6}$.

3. (*) Décomposer
   (a) sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{3}{x^3-1}$ (à voir) ; $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ (paire).
   (b) sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ $\dfrac{1}{x^3(1+x^3)}$ $(T=x^3)$ $\dfrac{x^4+3x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$ $\dfrac{x^5+1}{(x^2+x+1)^2}$.

4. Pour $P(x)=k(x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_p)^{\alpha_p}$, calculer P' (même avec coefficients complexes) ; puis $\dfrac{P'}{P}$.
(*) Déduire que les racines de P' sont barycentres de celles de P, affectées de coefficients positifs.
(*) Puis interpréter ce résultat en termes de convexité. (Théorème de Lucas).

5. On cherche les polynômes P tels que P' divise P.
   (a) Vérifier que O est le seul polynôme constant solution. Essayer de trouver d'autres exemples.
   (b) 1ère méthode. Si n=degré$(P)\geqslant 1$, vérifier que : $n.P(x)=P'(x).(x-a)$. $(*)$
   Alors, avec $(*)$: Si b est une racine de P d'ordre $k\geqslant 1$, vérifier que b est racine de P' d'ordre $k-1$ et donc $b=a$. Conclure que P n'a qu'une seule racine (d'ordre n).
   (c) 2ème méthode. Avec $(*)$ et la formule de Leibnitz, montrer $(n-k).P^{(k)}(x)=P^{(k+1)}(x).(x-a)$.
   Conclure que $P^{(k)}(a)=0$, si $k\leqslant n-1$. Donc $P(x)=K.(x-a)^n$.
   (d) 3ème méthode $(*)$ donne $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{n}{x-a}(**)$ d'une part. D'autre part $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ est connu (ex. précédent ou cours). Par l'unicité de la décomposition (non démontrée, il est vrai), conclure.
   [On peut aussi penser à une équation différentielle ; voir cependant que a peut être non réel.]

6. (*) C.N.S. pour que $F(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$, $c\neq d$ ait des primitives rationnelles ?
[Ind : Ecrire $F(x)=\dfrac{\alpha}{(x-c)^2}+\dfrac{\beta}{x-c}+\dfrac{\gamma}{(x-d)^2}+\dfrac{\delta}{x-d}$. On veut $\beta=\delta=0$; mais $\beta+\delta=0$ (avec $*x, x=\infty$) donc C.N.S. $\beta=0$. Voir alors que ceci se traduit -par équivalence- par :
$\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{c-b}=\dfrac{2}{c-d}$; ceci signifiant que (a,b,c,d) sont en "division harmonique" -ou quadrangle harmonique si complexes- avec, par ex., la relation équivalente : $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$.]
Autre solution commode : identifier une primitive avec $k/(x-c)+l/(x-d)$ et dériver celle-ci !

Chapitre 28

Intégrales simples $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Il s'agit d'un segment $[a, b]$ et d'une fonction bornée ; sinon "Intégrale généralisée". [Spé comme les cas $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$, $\displaystyle\int_0^1 ln(x).dx$ (non bornée) ; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = \frac{I(a)+I(-a)}{2} = \frac{\pi}{4}$!]

28.1 Définition de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ en se limitant à f continue par morceaux

28.1.1 Cas des fonctions en escalier sur $[a, b]$, $a < b$: aire

1. Définition

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ définie sur } [a,b] \text{ est dite "en escalier" s'il existe un nombre fini } n \text{ et une subdivision } \Delta : \\ x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b \text{ dite "adaptée" telle que } f \text{ soit \textbf{constante} sur chaque }]x_{i-1}, x_i[. \end{array}}$

Exemple :

. $x \mapsto E(x)$ est en escalier sur $[0, \frac{5}{2}]$ et $0 < 1 < \frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2}$ est une subdivision adaptée.
. D'ailleurs : chaque fois qu'on rajoute un point nouveau à une subdivision
(on dit subdivision "plus fine") si la première était adaptée à f, la seconde aussi !

2. Propriété-Définition

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f = k_i \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[\text{ pour une subdivision adaptée ; alors } \Sigma_\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).k_i \text{ ne dépend} \\ \text{pas de la subdivision adaptée } \Delta \text{ ; on l'appelle intégrale de } f \text{ sur } [a,b] \text{ et on note } \displaystyle\int_a^b f(x)dx. \end{array}}$

Démonstration. **Se limiter simplement à voir que :** $\displaystyle\int_0^{5/2} E(x).dx = 2.$

Beaucoup de dém. seront omises mais faisons celle-ci : 1) D'abord un dessin !
2) Puis, soit $\Delta = x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision adaptée. Notons :
$\Delta' = \Delta \cup x'$; $x' \in]x_{i-1}, x_i[$. Alors $\Sigma_\Delta = \Sigma_{\Delta'}$ car $(x_i - x_{i-1}).k_i = (x_i - x')k_i + (x' - x_{i-1})k_i$.
Et donc en ajoutant un nombre fini de points à Δ, de même.
3) Puis : si Δ_1 et Δ_2 sont deux subdivisions adaptées, $\Sigma_{\Delta_1} = \Sigma_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = \Sigma_{\Delta_2}$.

28.1.2 Cas fondamental des fonctions continues sur $[a, b]$, $a < b$

1. Théorème

Approximation **uniforme** des f continues par une fonction en escalier minorante ou majorante.

$\boxed{f \text{ étant } C^0([a,b]) \text{ ; } \forall \epsilon > 0, \ \exists \varphi \text{ et } \psi \text{ \underline{en escalier} : } \varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \forall x \in [a,b], \ 0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) < \epsilon.}$

Admis. En particulier :

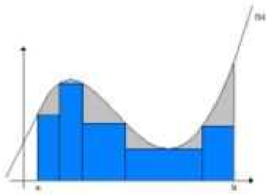
$\forall x \in [a, b], | f(x) - \varphi(x) | < \epsilon$ donc : $\boxed{sup_{[a,b]} \mid f - \varphi \mid \leqslant \epsilon}$; on dit que l'approximation est uniforme.

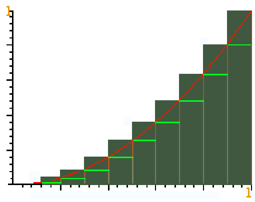
2. Consequence. A partir de là, on voit sans peine que, si $a < b$, pour φ, ψ en escalier :

$$sup\{\int_a^b \varphi(x)dx, \varphi \leqslant f\} \text{ noté } I_{\uparrow} \quad \underline{\text{est égal à}} \quad inf\{\int_a^b \psi(x)dx, \psi \geqslant f\} \text{ noté } I_{\downarrow}.$$

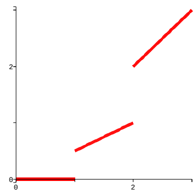
Cette valeur **commune** par définition est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ et notée $\int_a^b f(x)dx.$ [1]

En résumé, on prend soit les fonctions en escalier minorantes ; soit les majorantes ; soit les deux.





Fonctions $\mathcal{CM}$: $x \mapsto x.E(x)/2$



28.1.3 (*) Extension au cas des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$

1. Exemples . **Limiter les paragraphes 2,3 à :** $\int_0^3 \frac{x}{2}.E(x).dx = 0 + \frac{3}{4} + \frac{5}{2}$. **Dessus, fig.3.**

. Complément $f(x) = Arctan(\dfrac{1 + tan(x)}{1 - tan(x)}) = Arctan[tan(x + \dfrac{\pi}{4})]$ π-périodique ; graphe ?

On peut la compléter aux points $\pi/4 + k.\pi$ par la valeur 0, si on veut.

2. Définition. Théorème (facultatif) Cas $a < b$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un nombre fini N et une subdivision (adaptée) $a_0 = a < a_1 < ... < a_N = b$ telle que $f_{/]a_{i-1},a_i[}$ soit continue **et** prolongeable par continuité sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$, **ce qui signifie :** limites **finies** aux bornes a_{i-1}^+ et a_i^-.

Notons : $\mathcal{C}[a, b]$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.
On notera : $\mathcal{E}_{sc}[a, b]$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.
$\mathcal{CM}[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$: il **contient** les deux autres.

Alors Le théorème d'approximation par des fonctions en escalier s'étend aux fonctions $\mathcal{CM}[a, b]$.

3. Conséquence :
On définit l'intégrale de $f \in \mathcal{CM}[a, b]$ pour $a < b$ comme ci-dessus[2]. De plus, on pose

si $a = b$ (définition) $\int_a^a f(x)dx = 0$; et si $a > b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Note Changer f en un point, donc en un nombre fini de points, ne modifie en rien l'intégrale.

28.1.4 Enoncé des propriétés de l'intégrale

1. Par rapport à l'intervalle. Relation de Chasles

Si f continue par morceaux : $\forall a,\ b,\ c$: $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ qui se généralise.

2. Par rapport à la fonction. Linéarité

. Posons : $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; alors $I(f + g) = I(f) + I(g); \quad I(\lambda.f) = \lambda.I(f), \lambda \in \mathbb{R}.$

. Pour $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, (par exemple $x \mapsto e^{ix}$), on définit :

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$ Alors $I(\lambda.f) = \lambda.I(f)$, même pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

[1] Pour la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ sur $[0, 1]$, on a aisément: $I_{\uparrow} = 0 < I_{\downarrow} = 1$; on dit "non intégrable au sens de Riemann".

[2] Pour d'autres fonctions aussi. $f(0) = 0, f(x) = sin(1/x)$ sur [0,1] est : non continue par morceaux, mais a une intégrale !

28.1.5 Inégalités

1. Théorème

$$\text{Si } a \leqslant b : \ f \geqslant O \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0 ; \quad \text{d'où } \ f \leqslant g \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier : $a \leqslant b \ \Rightarrow \ \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b | f(x) | \, dx.$

Démonstration[3] **Attention :** $a \leqslant b$

. Si $f \geqslant O$, $\varphi = O$ est une fonction en escalier minorante et $\int_a^b \varphi(x)dx = 0 \leqslant \int_a^b f(x)dx = I(f)$.

. Pour la déduction, voir que $g - f \geqslant O$; donc $I(g-f) = I(g) - I(f) \geqslant 0$.

. Puis le cas particulier :
$-| f | \leqslant f \leqslant | f |$; et donc $-I(| f |) \leqslant I(f) \leqslant I(| f |)$; or $-B \leqslant A \leqslant B$ donne $| A | \leqslant B$.

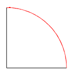
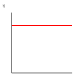
2. Remarque : **Si** $| f | \leqslant K$ **et** $a \leqslant b$**,** on peut majorer encore : $\int_a^b | f(x) | \, dx \leqslant K.(b-a)$.

28.1.6 Valeur moyenne de f

1. Définition

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$, $a \neq b$, la valeur $\mu = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$;
si $m \leqslant f \leqslant M$, on a : $\mu \in [m, M]$. (Voir le rectangle de même aire).

Démonstration Permuter a et b n'a pas d'effet sur μ : on peut donc supposer $a < b$. Puis facile.

Exemples . Valeur moyenne de $x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[0, R]$  : $\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu$ 

Avec l'interprétation géométrique (quart de **cercle**) l'intégrale vaut $\dfrac{\pi.R^2}{4}$; $\Longrightarrow \ \mu = \dfrac{\pi.R}{4}$.

. Idem. Calculer par interprétation géométrique (demi-cercle à prouver) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$.

Remarque

Si $a < c < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,c]$, $f \leqslant 0$ sur $[c,b]$, l'aire géométrique vaut $\int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^b f(x)dx \right|$.

2. **Cas où f est continue sur $[a,b]$**

• Propriété Dans le cas où f est continue sur $[a,b]$, $\exists c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(c)$.

Démonstration [**Propriété essentielle pour une preuve de la partie suivante.**]
On prend $M = sup_{[a,b]}(f) = f(x_1)$ par Théorème de continuïté sur un segment ; idem $m = f(x_2)$.
Par le Théorème ici des valeurs intermédiaires avec la continuïté : $\exists c \in [x_1, x_2] \subset [a,b]$: $\mu = f(c)$.

• Théorème : **Hypothèses pour pouvoir affirmer** $\int_a^b f(x)dx > 0$ [**utilisé en Spé.**]

Les 4 hypothèses suivantes : $a < b$; $f \geqslant O$; $f \neq O$; f continue ; entrainent $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Démonstration

Soit x_0 tel que $f(x_0) > 0$. Avec $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, comme f continue, $\exists \alpha > 0$ tel que :

sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a,b]$ intervalle de longueur $l > 0$, on ait $f(x) \geqslant f(x_0) - \epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$;

ailleurs $f \geqslant O$; d'où : $\int_a^b f(x)dx \ \geqslant \ l.\dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. (Contre-ex. si on enlève la continuité prendre $f : x \mapsto E(x)$, $f \neq O$ sur $[0,1]$)

[3]Plus généralement, $I(| f |)$ existe dès que $I(f)$ existe ; par exemple pour les fonctions monotones ; $1/E(1/x)$ sur [0,1].

28.2 Calcul d'intégrales

28.2.1 Théorème fondamental du calcul intégral : ici f $\underline{C^0}$

<u>Théorème</u>

Soit f <u>continue sur I intervalle</u>, $a \in I$. Alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est <u>dérivable de dérivée f</u>.
Puis (aisé) : **<u>Toute</u> primitive est du type** $G(x) = F(x) + cte$ **<u>et</u>** $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b$
Au passage, toute fonction <u>continue</u> sur un intervalle y admet donc des primitives.

<u>Démonstration</u>. Déjà $\int_a^x f(t)dx$ existe. Et $\exists c \in [x_0, x_0 + h] : F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h.f(c)$ avec la formule de la moyenne, <u>f C^0</u> (pas seulement continue par morceaux). Donc $\frac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0)) = f(c) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x_0)$ avec encore <u>f C^0</u>, d'où $F'(x_0) = f(x_0)$. **<u>Ex</u> :** $\int_0^{\pi/2} sin(x).dx = [-cos(x)]_0^{\pi/2} = +1 > 0$.

C'est la **1ère façon de calculer une intégrale (aire) : avec les primitives** (mieux vues au ch. suivant) ; **la 2ème : intégration par parties (ci-dessous) ; la 3ème : changement de variables (ci-dessous).**

<u>Conséquence</u>

Soit maintenant f C^0 de $[a, b] \to \mathbb{R}$ et $u, v : J \longrightarrow [a, b]$, deux fonctions dérivables.
Alors $\phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $\phi'(x) = f[v(x)].v'(x) - f[u(x)].u'(x)$.

<u>Démonstration</u>. Soit F une primitive même **non explicite de f ;** alors $\phi(x) = F[v(x)] - F[u(x)]$ est dérivable par composition, <u>etc</u>. **<u>Ex</u> :** $[f(t) = \frac{1}{ln(t)}]$, $\frac{d}{dx}(\int_x^{x^2} \frac{dt}{ln(t)}) = \frac{2.x}{ln(x^2)} - \frac{1}{ln(x)} = \frac{x-1}{ln(x)}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

28.2.2 Intégration par parties <u>notons</u> $\int f(x)dx$ pour $\int_a^x f(t)dt + cte$, <u>primitive si</u> fC^0

<u>Théorème</u>

Soit ici $x \to u(x)$, $v(x)$, C^1 sur un intervalle $[u', v'$ continue par morceaux suffit$]$, alors
$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$ <u>ou</u> $\int u.dv = u.v - \int v.du$; <u>$du = u'(x).dx$</u>.

<u>Démonstration</u>. C'est $(u.v)' = u'.v + u.v'$ et on intègre. **4 exemples à bien voir :**

- $\int x.cos(x).dx = x.sin(x) - \int sin(x).dx$ ... $\int_0^{\pi/2} x.cos(x).dx = [x.sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} sin(x).dx = \frac{\pi}{2} - 1$,

car on a posé $u(x) = x$ vu qu'on voulait le dériver (**diminue le degré** du polynôme) et $v'(x) = cos(x)$.

- $\int ln(x)dx = \int ln(x)\searrow.1\nearrow dx$... <u>$u(x) = ln(x), v'(x) = 1$</u> $\Rightarrow \boxed{\int ln(x).dx = x[ln(x) - 1] + C}$ • $\int e^x.x.dx = ...$
- $\int_0^1 Arctan(x)dx = [x.Arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.[ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{ln(2)}{2}$, <u>$u(x) = Arctan(x), v'(x) = 1.$</u>

28.2.3 Changement de variables

<u>Théorème</u>

1) Pour les primitives : soit $x = \varphi(t)$, C^1, $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$ mais on impose de plus φ bijective pour revenir à x : $t = \varphi^{-1}(x)$. 2) Tandis que pour les intégrales : si $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$; $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$, sans que φ soit forcément bijective.

<u>Démonstration de 2)</u>. Voir, à droite, que $Fo\varphi$ est une primitive. **4 exemples :**

- f paire sur $[-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^0 f(x)dx \underset{\left(\substack{t=-x \\ dx=-dt}\right)}{=} \int_{t=a}^{t=0} f(-t).(-dt) \underset{\left(\substack{car\ f \\ paire}\right)}{=} \int_0^a f(t).dt$. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$.
- De même : f impaire sur $[-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt$; et donc : $\int_{-a}^a = \int_{-a}^0 + \int_0^a f(x)dx = 0$.
- $\int (1+x^2)^3.x.dx$ primitive d'un polynôme ; développer $(1+x^2)^3$ mauvais car $\frac{1}{2}u^3(x).u'(x)$ de prim. $\frac{u^4}{8}$!
- Soit $I_a = \int_{1/a}^a \frac{ln(x)}{1+x^2}dx$; on **n'a pas** de primitive explicite mais $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \forall a > 0, I_a = -I_a$: <u>$I_a = 0$</u>.

28.3 Sommes de Riemann (f C^0 ou C^0 par morceaux)

28.3.1 Méthode des rectangles ($x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, "pas" : $max \mid x_i - x_{i-1} \mid$)

1. Notation. En général, subdivision Δ régulière : $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Puis sur $[x_{i-1}, x_i]$: $f(\xi_i)$, avec $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ qui donne $\Sigma_\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}.f(\xi_i)$, appelée somme de Riemann. [4] On prendra :

   . les bords droits : $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}.f(a+k.\frac{b-a}{n})$. ou gauches : $\Sigma'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}.f(a+k.\frac{b-a}{n})$

   . parfois les milieux (ici pareil que les tangentes aux milieux : méthode de Poncelet. Dessin après)

2. Théorème [5] $\boxed{\text{Admis : Les sommes de Riemann } \Sigma_n \text{ tendent vers } \int_a^b f(t)dt \text{ si } n \to +\infty. \textbf{ D'où}}$

   $$S_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \mu = \int_0^1 f[a+(b-a).x]dx.$$

   • $\boxed{\text{Comment reconnaitre une somme de Riemann si le cas ? voir 3 choses :}}$ $\dfrac{1}{n}$, Σ et le défilé "$\dfrac{k}{n}$".

   • On peut se limiter à changer la variable discrète "$\dfrac{k}{n}$" en la variable continue $x \in [0,1]$ $\boxed{\text{car}}$ on a aussi : $\mu = \displaystyle\int_0^1 f[a+(b-a).x]dx$ [à voir : $t = a+(b-a).x$]. Mais ne pas écrire "$x = \dfrac{k}{n}$" !)

28.3.2 Exemple. $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ somme de Riemann :

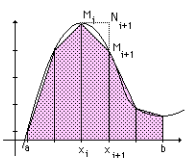
de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ C^0 sur $[0,1]$ avec les bords droits ; (ou de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ C^0 sur $[1,2]$.) Par théorème :

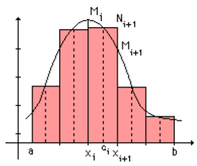
$\boxed{S_n \text{ converge et } S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = ln(2).}$ $\boxed{\textbf{Analogues}}$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} + \frac{ln(2)}{2}$

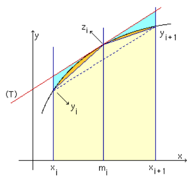
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [ln(x+\sqrt{1+x^2}]_0^1 = ln(1+\sqrt{2})$: avec cette primitive **donnée** !

28.3.3 Complément : méthodes des trapèzes de calcul approché (cf. 28.5.1)

1. Valeur approchée. Sur $[x_{i-1}, x_i]$ au lieu de prendre $(x_i - x_{i-1})f(x_i)$ (bord droit) ou $(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$ (gauche), on prend la $\dfrac{1}{2}$ somme $(x_i - x_{i-1})\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$: l'aire du trapèze $\dfrac{(Base + base).hauteur}{2}$ qui donne la valeur approchée : $T_n = \dfrac{\Sigma_n + \Sigma'_n}{2} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\right)$.

2. Dessin : 

(Note : 

équivaut à tangentes : 

)

---

[4] On considère aussi la somme : $s_\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).m_i$, où $m_i = \inf f_{[x_{i-1},x_i]}$; appelée somme de Darboux inférieure ; et encore : $S_\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i$, où $M_i = \sup f_{[x_{i-1},x_i]}$; appelée somme de Darboux supérieure.

[5] Un majorant de l'erreur est $\mid \epsilon_n \mid \leqslant \dfrac{M_1(b-a)^2}{n}$, fC^1 pour les bords droits. Mais pour les points milieux, ou méthode dite "des tangentes" (aux milieux !), $\mid \epsilon_n \mid \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$, fC^2 ; avec $g(v) - g(u) = (v-u)g'(\dfrac{u+v}{2}) + \dfrac{(v-u)^3}{24}g^{(3)}(c), c \in [u,v]$.

28.4 Formule de Taylor Lagrange

28.4.1 Taylor avec reste intégral (*)

$$\boxed{\text{Soit } f\ C^{n+1} \text{ sur } [a,b]\,;\text{ alors } f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.}$$

Démonstration (en fait facile, par récurrence ; on dit aussi reste de Laplace.)

1. $n = 0$. On doit voir que : $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ avec $f\ C^1$; c'est clair.
2. Passage au rang $n+1$. On doit voir que :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt \text{ si } f\ C^{n+2} \text{ sur } [a,b].$$

C'est sans problème, par parties, dès qu'on voit que : $\boxed{v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!},\ v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.}$

28.4.2 Taylor avec reste de Lagrange

1. **Egalité** de Taylor-Lagrange pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{f\ C^{n+1}([a,b],\mathbb{R});\ \exists c \in [a,b]\colon f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).}$$

Démonstration $(*)$: Soit $m = inf_{[a,b]}f^{(n+1)}, M = sup_{[a,b]}f^{(n+1)}$ où $\boxed{f^{(n+1)}\ C^0\ [a,b] \to \mathbb{R}.}$ Aisément $Y = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}.\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \in [m, M]$. Le théorème des valeurs intermédiaires pour $f^{(n+1)}$, donne : $\exists c \in [a,b]$ tel que $Y = f^{(n+1)}(c)$; ou $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

2. **Exemples importants**

• Retenons : Le cas $n = 0$ de la formule de T-L : $\boxed{\exists c \in [a,b] \text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)}$ est le Th. des Accr. finis ! (sauf qu'on sait même $\exists c \in]a,b[$ si $a \neq b$ avec des hypothèses moins fortes).

• Prenons $b = x$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ est la "partie polynômiale" (de la formule de Taylor) connue.

• Pour $f = exp$, $a = 0, b = x$; on va prendre $x = 1$ (puis $x = -10$ ou $x = +100$; non proche de 0)

Alors : $\mid e^x - (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}) \mid \leqslant \frac{\mid x \mid^{n+1}}{(n+1)!}.K$ où $K = sup_{[0,x]}(e^t)$ ne dépend pas de n.

Pour a fixé, $n \to +\infty$, on sait $\boxed{\frac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$; d'où par exemple $\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.}$

3. **Complément : Inégalité** de Taylor-Lagrange pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

Au lieu de l'égalité de T-L, on utilise l'inégalité (moins simple) de T-L : En effet, **l'inégalité est vraie** pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Mais l' égalité des accroissements finis n'est pas vraie pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Exemple** : $f(x) = e^{ix}$ sur $[0, \pi]$: $f(\pi) - f(0) = \pi.f'(c)$ impossible avec les modules !

$$\boxed{\text{Inégalité de (T-L) : } \mid f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \mid \leqslant \frac{\mid b-a \mid^{n+1}}{(n+1)!} sup_{[a,b]} \mid f^{(n+1)} \mid,\ f\ C^{n+1}[a,b].}$$

4. **Note (*) : Différence entre le reste de Lagrange et celui de Young ? (ici : DL, ch 30)**

• Alors que le reste de Lagrange ne suppose pas $x - a$ "petit" : Bien relire l'exemple précédent.
• Celui de Young $(x-a)^n.\epsilon(x)$ n'est connu que si x proche de a. (ch.Développements Limités.)

. Retenons l'égalité de T-L pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, qui généralise les Accroissements Finis.
. L'inégalité s'en déduit aisément (et se démontre pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ à partir du reste intégral).

28.5 Compléments

28.5.1 (*) Majorant de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Trapèzes :[6] . D'abord : $g(v) - g(u) = (v-u).\dfrac{g'(u)+g'(v)}{2} - \dfrac{(v-u)^3}{12}.g^{(3)}(c), c \in [u,v]$.

(Prendre $h(x) = g(x) - g(u) - (x-u)\dfrac{g'(u)+g'(x)}{2} - K(x-u)^3$, K tel que $h(v) = 0$.)

. Puis avec $\displaystyle\int_u^v f(x)dx = g(v) - g(u)$ arriver à : $\mid \epsilon_n \mid \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, fC^2, $M_2 = sup_{[a,b]} \mid f" \mid$.

28.5.2 (*) Problème corrigé : intégrales de Wallis

1. $\boxed{\text{Soit } I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} sin^n(x)dx\,;}$ alors $\boxed{I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} cos^n(x)dx.}$

   Obtenu avec $t = \dfrac{\pi}{2} - x$; (et dessiner cos^2, sin^2 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$)

2. Puis on a la formule de récurrence : $\boxed{\underline{n.I_n = (n-1).I_{n-2}}}$ avec $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{2},\ I_1 = 1.}$

   En effet

   $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} sin^{n-1}(x)\searrow .sin(x)\nearrow dx = [-cos(x).sin^{n-1}(x)]_0^{\pi/2} + (n-1).\int_0^{\pi/2} cos(x).sin^{n-2}(x).cos(x)dx$

   et en écrivant $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$, on a : $I_n = 0 + (n-1)[I_{n-2} - I_n]$ pour $n \geqslant 2$ ... (Finir !)

3. Celà donne : $I_2 = \dfrac{1}{2}.I_0 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{2}$ $\quad I_4 = \dfrac{3}{4}.I_2 = \dfrac{3.1}{4.2}.\dfrac{\pi}{2}$ et $I_3 = \dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{2}{3}$ $\quad I_5 = \dfrac{4}{5}.I_3 = \dfrac{4.2}{5.3}$.

4. Ensuite $\boxed{n.I_n.I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}}$ En effet : la suite $n.I_n.I_{n-1}$ est stationnaire (aisé) et vaut $1.I_1.I_0$.

5. Puis $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ En effet $sin^{n-2} \geqslant sin^{n-1} \geqslant sin^n$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ donne $I_{n-2} \geqslant I_{n-1} \geqslant I_n > 0$;

   d'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}$ en divisant par I_n : donc $n.I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi/2$ ...

6. D'où $\boxed{C_{2p}^p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^p}{\sqrt{\pi.p}}}$ [Formule de Wallis utile pour montrer la formule de Stirling donnant un équivalent de $n!$]. En effet :

   $$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)...3.1}{(2p)(2p-2)...4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)...3.2.1}{[(2p).(2p-2)...4.2]^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}.(p!)^2}.\frac{\pi}{2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2.2p}} ...$$

28.5.3 (*) Précisions

. Quand f continue, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable : primitive de f. (Théorème fondamental.)

. Quand f est seulement continue par morceaux (donc bornée sur $[a,b]$), on a quand même (aisé)

$F : x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est déjà continue [on met la lettre t sous l'intégrale]. car :

$$\mid F(x_0+h) - F(x_0) \mid = \mid \int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt \mid \ \leqslant \ \mid \int_{x_0}^{x_0+h} \mid f(t) \mid .dt \mid \leqslant K. \mid h \mid;\ (K \text{ majorant de } \mid f \mid).$$

Et là où f continue (donc sauf quelques points), F dérivable. (cf. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x E(t).dt$ sur $[-1,2]$.)

[6] Et si f a une convexité constante, encadrement avec la méthode "des tangentes" ! On peut faire aussi un barycentre de la méthodes des trapèzes T_n et de la méthode des points milieux ou des tangentes I_n : c'est la méthode de Simpson.

M+ **Exercices: Intégration des fonctions**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **PTSI**

---

1. **Par parties**. $\int ln(x).dx$, $\int Arctan(x)dx$, $\int Arcsin(x)dx$ $\left(\int \dfrac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}\right.$: type $\left.\dfrac{k.u'}{\sqrt{u(x)}}\right)$.

2. **Changement de variable** : (a) $\int x.(1+x^2)^5.dx$ (avec $u = 1+x^2$).

   (b) Si $f \in \mathcal{CM}$, T-périodique ; montrer : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} ...$: indépendant de a.

   (c) (*) Avec $x = tan(t), t \in]-\pi/2, \pi/2[$, montrer que : $I = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} > 0$.

3. (*) Calcul des limites des suites **[on reconnaitra que ce sont des sommes de Riemann]** :

   (a) Avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$ et $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$, déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ $\left(\displaystyle\int_0^1 x^2.dx = \frac{1}{3}\right.$ Archimède.)

   (b) $S_n = \dfrac{1}{n}.[ln(1+\dfrac{1}{n}) + ... + ln(1+\dfrac{n-1}{n})]$. [Ajouter $ln(1+\dfrac{0}{n})$ bords gauches, $\int ln(t)dt$ vu.]

   (c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.sin(\frac{k\pi}{n})$. [On calcule : $\displaystyle\int_0^1 x.sin(\pi.x)dx$ par parties.]

   (d) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2.(\sqrt[3]{n^3+k^3})}$. [Indication : $\displaystyle\int [u(x)]^{-1/3}.u'(x).dx = \frac{3}{2}u^{-1/3+1} + Cte.$]

   (e) $S_n = \dfrac{1}{n^2}.\displaystyle\sum_{k=1}^{n}.\sqrt{k(n-k)}$. [Poser $x = \dfrac{1+sin(t)}{2}$ dans l'intégrale **ou** interprétation !]

   (f) $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$. [$ln(P_n)$; parties et $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$] (g*) $P_n = \dfrac{1}{n}.\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$.

4. (*) $\boxed{\text{Taylor-Lagrange.}}$ Soit $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. $v_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$.

   (a) Sur une droite, dessiner u_1, u_2, u_3, u_4.... Que penser si on considérait $x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{2n+1}$?

   (b) On donne pour $x \in]-1, 1]$: $ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{n} + \dfrac{(-1)^n.x^{n+1}}{(n+1).(1+c)^{n+1}}$
   où $c \in [0, x]$; c'est l'égalité de (T-L). En déduire $|\ ln(2) - u_n\ | \leqslant 1/(n+1)$.

   (c) Plus simple. Intégrer sur $[0, X]$: $1 - x + x^2 + ... + (-x)^{n-1} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$. Puis : $X = 1$.
   Montrer que : $0 \leqslant I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n.dx$. Conclure. (*) Cas de (v_n) avec $Arctan$?

5. (*) $\boxed{\text{"Lemme de Riemann-Lebesgue".}}$ Soit $I_\lambda = \displaystyle\int_a^b f(x)sin(\lambda.x)dx$. Allure de $x \mapsto sin(8.x)$?
   On prend f C^1. Montrer que $I_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en justifiant avec soin (par parties) que : $|\ I_\lambda\ | \leqslant \dfrac{Cte}{\lambda}$.

6. (*) Dans le cas $f : [a,b] \to \mathbb{C}, (a \leqslant b)$ l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx$ est vraie (modules).
   Une preuve astucieuse : (*) $G = e^{i\alpha}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{i\alpha}f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b |\ f_1(x)\ |\ dx$ ...

Chapitre 29

Calcul de primitives

29.1 Primitives usuelles

29.1.1 Tableau ($sh,\ ch,\ th,\ coth$: alléger ; $Argsh$ ... : hors programme)

Fonctions	Primitives	Domaines et **remarques**
$f(x)=x^\alpha$	$\begin{cases} F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+cte\,;\ \text{sauf si} \\ \alpha=-1 : \displaystyle\int\frac{dx}{x}=ln(\mid x\mid)+C \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Ex : } \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2.\sqrt{x}+cte :\ ]0,+\infty[\\ \displaystyle\int\frac{dx}{x^2}=\frac{-1}{x}+C :\ ]-\infty,0[;\ ]0,+\infty[\end{cases}$
Rationnelles :		
. $\dfrac{1}{x^2+1}$	$Arctan(x)+cte$	$\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}.Arctan(\frac{x}{a})+cte}$
. $\dfrac{1}{x^2-1}$	On décompose sur $\mathbb{R}$	$\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{-1}{2a}.ln\mid\frac{x+a}{x-a}\mid+cte}$
Trigonométriques :		
$sin(x),\ cos(x)$	$-cos(x)+cte;\ +sin(x)+cte$	$\displaystyle\int sin(ax+b)dx=\frac{-1}{a}cos(ax+b)+c$
$\dfrac{1}{cos^2(x)}=1+tan^2(x)$	$tan(x)+cte$	$\Rightarrow\displaystyle\int tan^2(x)dx=tan(x)-x+cte$
$\dfrac{1}{sin^2(x)}=1+cot^2(x)$	$-cot(x)+cte$	$\Rightarrow\displaystyle\int cot^2(x)dx=-cot(x)-x+cte$
$sh(x),\ ch(x)$	$+ch(x)+cte;\ +sh(x)+cte$	$\displaystyle\int sh(ax+b)dx=\frac{1}{a}ch(ax+b)+cte$
$\dfrac{1}{ch^2(x)}=1-th^2(x)$	$th(x)+cte$	$\Rightarrow\displaystyle\int th^2(x)dx=x-th(x)+cte$
$\dfrac{1}{sh^2(x)}=coth^2(x)-1$	$-coth(x)+cte$	$\Rightarrow\displaystyle\int coth^2(x)dx=...$
Avec le ln : $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\mid u(x)\mid+cte$	$\begin{cases} \text{Une primitive de } f[u(x)]u'(x) \text{ est } F[u(x)] \\ \text{une primitive de } f[u(x)] \text{ est } \textbf{inconnue}! \\ \displaystyle\int u^\alpha(x).u'(x).dx=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \text{ si } \alpha\neq-1 \end{cases}$.
. $tan(x)$	$-ln\mid cos(x)\mid+cte$	Là où le dénominateur est non nul.
. $cot(x)$	$+ln\mid sin(x)\mid+cte$	Idem.
. $th(x)$	$+ln[ch(x)]+cte$	Rappel $ch\geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.
. $coth(x)$	$+ln\mid sh(x)\mid+cte$	Là où le dénominateur est non nul.
Par parties : $ln(x)$	$x[ln(x)-1]+cte$	**Idem :** $\displaystyle\int Arctan(x).dx$.

Irrationnelles : **Seule la 1ère au programme**

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)+cte = -Arccos(x)+Cte$	$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arcsin(\frac{x}{a}) + cte, \underline{a>0}}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$Argsh(x)+cte = ln(x+\sqrt{x^2+1})+cte$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + cte$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	Dépend des intervalles $(x \leqslant -1\ ?)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln \mid x+\sqrt{x^2-a^2} \mid +cte$

Attention **une primitive de $\mid f' \mid$ n'est pas $\mid f \mid$!**

29.1.2 Pour retenir

1. Homogénéïté

   . Dans $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, si x en [mètres], a aussi ; dx aussi ; le résultat est homogène à [1/mètres] ; d'où la présence du terme "$\frac{1}{a}$" devant. Tandis que :

   . Dans $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, si x, a, dx en [m.] : résultat homogène à un pur nombre ; rien devant $Arcsin$.

2. Démonstration des formules encadrées

   . $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, poser $x = a.t,\ a \neq 0 \quad dx = a.dt$ ...

   . $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $a \neq 0$, décomposer $\frac{1}{x^2-a^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   . $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ poser $x = a.t$; on a besoin de $a > 0$ ... Et $\frac{\pi}{2} - Arccos(t) = Arcsin(t)$!

   . Celle-ci et la suivante non faites ... (l'énoncé la donnerait) : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, poser $x = a.t, a > 0$.

   . De même $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ... voir que : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = ln \mid x+\sqrt{x^2-1} \mid +cte$ [deux intervalles].

29.1.3 Des exemples (surtout 1, 2)

1. Par linéarisation connue : $\int sin^2(x).dx = \int \frac{1-cos(2x)}{2}.dx = \frac{1}{2}.[x - \frac{sin(2x)}{2}] + C.$ Mais :

2. Sans linéariser si puissance impaire $\int cos^3(x)dx = \int [1-sin^2(x)].d(sin(x)) = sin(x) - \frac{sin^3(x)}{3} + C.$

3. (*) Calcul de $F(x) = \int x.tan^2(x)dx$ par parties ! $u(x) = x$ est un polynôme, mélangé à de la trigonométrie. On dérive $u(x)$; on sait intégrer $v'(x) = tan^2(x)$ $\boxed{\text{car on a}}$ $tan(x)$ primitive de $1+tan^2(x)$ donc $v(x) = tan(x) - x$ primitive de $tan^2(x)$. D'où (avec des constantes différentes par intervalles) : $F(x) = x.[tan(x)-x] - \int [tan(x)-x].dx = x.tan(x) + ln \mid cos(x) \mid - \frac{x^2}{2} + cte.$

4. (*) Calcul de $F(x) = \int \frac{e^{Arctan(x)}.dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ par changement de variables : $t = Arctan(x)$ ou bien : $x = tan(t)$ avec $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ (choix) $dx = \frac{dt}{cos^2(t)}$: $I = \int \frac{e^t.dt. \mid cos^3(t) \mid}{cos^2(t)} = \int e^t.cos(t).dt.$ $\boxed{\text{A ce stade, on sait finir (cf. III).}}$ Cherchons une primitive, type : $e^t[a.cos(t)+b.sin(t)]$; correct si $a = b = 1/2$ (en dérivant). Il reste à revenir à x : $cos(t) = +\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $sin(t) = tan(t).cos(t) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ... D'où $F(x) = \frac{1+x}{2.\sqrt{1+x^2}}.e^{Arctan(x)} + cte.$

29.2 Primitive des fractions rationnelles

29.2.1 Théorème [Programme allégé jusqu'à la fin du chapitre]

On sait trouver une primitive d'une fraction rationnelle : on la décompose sur $\mathbb{R}$ sauf si elle est impaire !

Cas d'une fraction en x, impaire, poser d'abord $t = x^2$ ou bien $\boxed{f(x)dx}$ invariant en changeant x en $-x$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{x.dx}{1+x^4} = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}.Arctan(x^2) + cte.$ 1 minute !

29.2.2 Démonstration

1. La partie entière est un polynôme ; s'intègre sans problème.

2. Les éléments simples de 1ère espèce : $\displaystyle\frac{1}{(x-a)^n}$ connu $\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int (x-a)^{-n}.dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \text{ si } n \neq 1 \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = ln \mid x-a \mid + cte \end{array}\right.$

   A noter que $\boxed{\text{la première ligne vraie même si } a \in \mathbb{C}.}$

3. Eléments simples de 2ème espèce : $\displaystyle\frac{ax+b}{[x^2+px+q]^n}$. Ici, 3 choses à savoir :

   - Faire la **répartition suivante :** $\displaystyle\frac{ax+b}{[x^2+px+q]^n} = \frac{a}{2}.\frac{2x+p}{[x^2+px+q]^n} + \frac{cte}{[x^2+px+q]^n}$.

     Le premier numérateur $[...]'$ **prend tous les** x **; le second une constante à ajuster.**
   - **1^{er} terme facile du type** $\displaystyle\frac{a}{2}.\frac{u'}{u^n}$.
   - **2^e difficile : trinôme sous forme canonique** $[x^2+px+q] = [(x-\alpha)^2+\beta^2]$ **; cf. après.**

   Exemple $\displaystyle\int \frac{dx}{x.(x^2-x+1)}$ **[non impaire !]**

   On donne le résultat de la décomposition $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x.(x^2-x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2-x+1}$.

   - le partage : $\displaystyle\frac{-x+1}{[x^2-x+1]} = \frac{\frac{-1}{2}(2x-1)}{[x^2-x+1]} + \frac{\frac{1}{2}}{[x^2-x+1]}$
   - **le 1er terme a pour primitive facile :** $J = \dfrac{-1}{2}ln[x^2-x+1]$. **L'autre (difficile) vaut :**
   - $\displaystyle K = \int \frac{dx}{[x^2-x+1]} = \int \frac{d(x-1/2)}{[(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2]}$ **(forme canonique utile maintenant).**

     Ici, en fait, elle est dans le tableau : $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}.Arctan(\frac{t}{a}) + C.$

   D'où $\displaystyle F(x) = \frac{1}{2}.\ ln\frac{x^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}.Arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C.$ $(ln(x^2) = 2.ln \mid x \mid\ !)$

29.2.3 Fin du cas général : $\displaystyle\int \frac{dt}{[t^2+\beta^2]^n}, n \geqslant 2$

On en était à $\displaystyle\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$. $t = x - \alpha$ ramène à $\displaystyle I_n = \int \frac{dt}{[t^2+\beta^2]^n}$.

Cas $n = 1$ (l'exemple) connu : tableau. Et 2 méthodes, $n \geqslant 2$:

1) On peut poser $t = \beta.tan(\varphi), \varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ ou $\boxed{x - \alpha = \beta.tan(\varphi), \varphi \in]-\pi/2, \pi/2[.}$

Arriver à : $\displaystyle\frac{1}{\beta^{2n-1}}.\int cos^{2(n-1)}(\varphi).d\varphi$ et, la puissance étant paire : linéariser ...

2) Ou partant de I_{n-1}, relier I_{n-1} et I_n $[t^2 = t^2 + \beta^2 - \beta^2]$; revenir à x.

On peut s'entrainer sur un des exemples :

$A = \displaystyle\int \frac{dx}{[x^2+x+1]^2}$; $\quad B = \displaystyle\int \frac{dx}{[x^2+1]^3}$. Trouver :

$$A = \frac{4.\sqrt{3}}{9}.Arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + cte. \qquad B = \frac{1}{4}\frac{x}{[x^2+1]^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}Arctan(x) + cte.$$

29.3 Polynômes et fractions rationnelles en $sin(x), cos(x)$...

29.3.1 Monômes $\int cos^p(x).sin^q(x)dx$

1. **Si p et q sont pairs, on <u>linéarise</u>** [rien de plus simple pour primitive $\neq$ intégrales de Wallis !]
$$\int cos^2(x).sin^4(x).dx = \frac{1}{16}[x - \frac{sin(2x)}{4} - \frac{sin(4x)}{4} + \frac{sin(6x)}{12}] + cte.$$
2. **Si p ou q impair, la linéarisation est <u>médiocre car il y a bien plus simple</u>.** Exemple :
$$\int cos^2(x).sin^3(x).dx = \int cos^2(x).sin^2(x).sin(x).dx = \int cos^2(x).sin^2(x).d[-cos(x)] \quad \text{donc}$$
$t = cos(x)$ facile avec $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$! ... $\quad F(x) = \dfrac{cos^5(x)}{5} - \dfrac{cos^3(x)}{3} + cte.$
3. <u>Remarque</u> $\int ch^p(x).sh^q(x)dx$ analogue, <u>sauf</u> qu'au lieu de linéariser, mettre des e^x, e^{-x} ...

29.3.2 Mélange d'exponentielles

1. $\boxed{\textbf{Trois façons}}$ **pour** $\int e^x.sin(x)dx$ **:**
   - <u>Par parties, deux fois</u> : $I = e^x.sin(x) - \int e^x.cos(x)dx$ [e^x intégré ; puis intègré **à nouveau** !]

     $I = e^x.sin(x) - e^x.cos(x) - I + cte$! $\qquad$ d'où $\quad I = \dfrac{e^x[sin(x) - cos(x)]}{2} + cte.$
   - <u>Avec des coefficients indéterminés</u> :

     On cherche une primitive du type $e^x.[a.cos(x) + b.sin(x)]$; on dérive et on identifie ...
   - <u>Avec $\mathbb{C}$</u> : $I = \Im m \displaystyle\int e^{(1+i)x}dx = \Im m\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + cte = \Im m\frac{e^x}{2}.[(cos(x) + isin(x))(1-i)] + cte$

     d'où $I = \dfrac{e^x}{2}[sin(x) - cos(x)] + cte.$
2. $\boxed{\text{Exercice}}$ $I = \int x.e^x.cos(x)dx$ $\qquad$ [et analogues]

   $P(x) = x$ est un polynôme mélangé avec de la trigonométrie. Par parties, <u>en dérivant P</u>

   $u(x) = x, \ v'(x) = e^x.cos(x)$; alors : $v(x) = ...$ [ce qui précède, au choix !]

   d'où $\quad I = \dfrac{x.e^x}{2}[cos(x) + sin(x)] - \dfrac{e^x}{2}sin(x) + C.$
3. <u>Remarque</u> $\int sin(ax+b).cos(cx+d)dx$? On sait transformer un produit en somme !

29.3.3 Fractions rationnelles en $sin(x), cos(x)$

1. $\boxed{\text{Règles de Bioche}}$ **Le changement de variables sera donné.**

   Soit $I = \displaystyle\int \boxed{\frac{dx}{sin(x).(1+2cos(x))}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{la quantité encadrée (avec le "}dx\text{") étant appelée} \\ \text{"\underline{élément différentiel}" ou "\underline{forme différentielle}".} \end{array}\right.$

Règles de Bioche :
. Si l'élément différentiel est INVARIANT en changeant x en $-x$, poser $t = cos(x)$;
. Si invariance en changeant x en $\pi - x$, ici $t = sin(x)$; (x n'est pas forcément dans $[-\pi/2, \pi/2]$!)
. Si invariance en changeant x en $\pi + x$, poser $t = tan(x)$; (idem...)
. Si pas d'invariance, poser $t = tan(x/2)$. On arrive à une fraction rationnelle en t.

. Ex : $t = cos(x) \Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{dx}{sin(x).(1+2cos(x))} = \int \frac{-sin(x).dx}{-sin^2(x).(1+2cos(x))} = \int \frac{dt}{2.(t^2-1)(t+\frac{1}{2})}$

$$I = \frac{1}{6}ln(1-cos(x)) + \frac{1}{2}ln(1+cos(x)) - \frac{2}{3}ln \mid 1+2cos(x) \mid +C$$

. Idem avec $t = sin(x)$, $J = \displaystyle\int \frac{dx}{sin^2(x).cos(x)} = \frac{-1}{sin(x)} + \frac{1}{2}ln\frac{1+sin(x)}{1-sin(x)} + C$ et

. Avec $t = tan(x)$, $dt = (1+t^2).dx$! $K = \displaystyle\int \frac{dx}{sin^2(x).cos^2(x)} = tan(x) - \frac{1}{tan(x)} + C.$

2. Trois exercices à noter

- $\displaystyle\int \frac{dx}{sin(x)} = ln \mid tan(\frac{x}{2}) \mid +C.$ Poser $t = cos(x)$ est bon ; mais exceptionnellement $t = tan(\frac{x}{2})$ est plus rapide : $sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $dt = [1+tan^2(\frac{x}{2})].\dfrac{dx}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{2.dt}{1+t^2}$ ...

- $\displaystyle\int \frac{dx}{cos(x)} = ln \mid tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) \mid +C$ car $\displaystyle\int \frac{dx}{cos(x)} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{sin(x+\frac{\pi}{2})}$... ramène à la précédente !

- $I = \displaystyle\int_0^{2.\pi} \frac{dx}{2+cos(x)}$

On pose ici : $t = tan(\frac{x}{2})$; $cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; trouver : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}Arctan\dfrac{tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$ comme primitives.
Mais pour l'intégrale (fonction C^0 sur un segment), le changement de variable cause un saut en $x/2 = \pi/2$ ou $x = \pi$!
Remède : $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+cos(x)}$ (période) $= 2.\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+cos(x)}$ (paire) et prendre π^- : $I = \dfrac{2.\pi}{\sqrt{3}} > 0$.

29.3.4 Si fonctions hyperboliques : hors programme

1. (*) Par analogie. Exemple : pour $I = \displaystyle\int \frac{ch(3x)}{1+sh(x)}dx$; poser $t = sh(x)$ ... car dans $J = \displaystyle\int \frac{cos(3x)}{1+sin(x)}dx$, fraction rationnelle en $cos(1.x), sin(1.x)$ on poserait $t = sin(x)$.
[Trouver $I = 2.sh^2(x) - 4.sh(x) + 5.ln \mid sh(x)+1 \mid +cte.$]

2. Simplement, le cas $t = tan(x/2)$ est plutôt transformé en $t = e^x$, plus connu que $t = th(x/2)$.

3. Deux exercices : • $\displaystyle\int \frac{dx}{sh(x)} = ln \mid th\frac{x}{2} \mid +C$ $[t = th\frac{x}{2}, dt = \frac{(1-t^2)dx}{2}, sh(x) = \frac{2.t}{1-t^2}]$

Alors que pour • $\displaystyle\int \frac{dx}{ch(x)}$, on ne peut se ramener, ici, à la précédente ! Au choix :
$$\int \frac{dx}{ch(x)} = Arctan[sh(x)] + C = 2.Arctan[e^x] + D = 2.Arctan[th(x/2)] + C = Arcsin[th(x)] + C.$$
[**cf. Ex. ch12** sur les loxodromies de la sphère pour les primitives de $1/cos(x)$, $1/ch(x)$.]

29.4 Et irrationnelles ?

Hors programme aussi ; sauf $1/\sqrt{1-x^2}$ et $1/\sqrt{a^2-x^2}$ du tableau.

M+ **Exercices: Primitives des fonctions**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **PTSI**

---

1. Des primitives à bien voir
(a) $\int x^4(1+x^5)^3dx$ (b) $\int \frac{ln(x)}{x}dx$ (c) $\int \frac{dx}{x.ln(x)}$ (d) $I_n = \int ln^n(x)dx$

2. Puis à bien voir aussi [(a) : linéarisation inutile ! (b) : linéariser ...]
(a) $\int sin^3(x)dx$ (b) $\int cos^2(x)dx$ (c) $\int e^{2x}.cos^2(x)dx$ (d) $\int ch(x).cos(x)dx$

3. Fractions rationnelles : en décomposant sur $\mathbb{R}$; **sauf si** $f(x)$ est impaire : poser d'abord $t = x^2$
(a) $\int \frac{x^3-x}{x^4+3x^2+2}dx$ (b) $\int \frac{x^7}{1+x^4}dx$ (c) $\int \frac{3x^2-3x-10}{(x-2)(x^2-4x+5)}dx$
(d) $\int \frac{x.dx}{x^6+1}$ $(I = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}.ln(1+t) - \frac{1}{6}ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}.Arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}] + cte$, où $\boxed{t = x^2}$...)

4. (*) Fractions rationnelles en $sin(x), cos(x)$ (changement de variable donné)
(a) $\int \frac{dx}{cos^3(x)}$ (b) $\int \frac{sin(x)}{cos(3x)}dx$ (c) $\int \frac{tan(x)}{1+tan(x)}dx$ (d) $\int \frac{1-sin(x)}{sin(x)[1-cos(x)]}dx$
(e) $\int \frac{tan(x)}{1+sin(x)}dx$ (f) $\int \frac{tan(x).dx}{cos(x)[cos(x)+sin(x)]}$ (g) $\int \frac{dx}{cos^4(x)+sin^4(x)}$, $t = tan(2x)$.

5. (*) Parties ou changement de variables (guidés)
(a) $\int Arcsin(x)dx$ (b) $\int Arcsin\sqrt[3]{x}.dx$ ($\sqrt[3]{x} = sin(t), |\, t \,| \leqslant \pi/2$) (c) $\int \frac{x^2.Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
(d) $\int Arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}dx$ (parties et $t = \sqrt{}$) (e) $\int Arctan\sqrt{1-x^2}dx$(... puis $x = sin(t), |\, t \,| \leqslant \pi/2$).

6. (*) Des irrationnelles avec indications (obtenir une fraction rationnelle)
(a) $\int x.\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ ($t = \sqrt{}$) (b) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx$ ($t = \sqrt{}$) (c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ ($t = x^2$...)
(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (forme canonique) (e) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}.dx$ (parties $v' = 1, v = x + \frac{b}{2a}$)
(f) $\int \frac{dx}{(\alpha.x+\beta).\sqrt{ax^2+bx+c}}$($t = \frac{1}{\alpha x+\beta}$) (g) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ ($X = x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}sh(t)$
ou : $\frac{\sqrt{3}}{2}tan(\varphi)$ avec $|\, \varphi \,| < \pi/2$ ou bien : $\sqrt{x^2+x+1} = x + \lambda$) ! (h) $\int \frac{x.dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
(idem avec ch ou bien : $\sqrt{x^2-4x+3} = t.(x-1)$.) (i) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}dx$ (ici $t = \sqrt[3]{x+1}$).

Chapitre 30

Développements limités. Formule de Taylor-Young

30.1 Généralités

30.1.1 Un problème

On sait bien que : $sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; mais : $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)-x}{x^3} = \ ?$ (x^3 pour respecter l'imparité).

C'est un problème "local" ; c'est-à-dire au voisinage d'un point, qui demande plus de précision.

30.1.2 Exemple fondamental (avec $1+q+...+q^n$) et définition

1. **On peut écrire** $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+...+x^n+x^n.\epsilon(x), \quad \epsilon(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$ vu que $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x}$.

   Puis, changeant x en $-x$, n fixé : $(-1)^n\epsilon(-x) = \epsilon_1(x)$ avec $\epsilon_1(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$; que l'on continue à noter $\epsilon(x)$ (mais ce n'est pas le même) et donc : $\underline{\epsilon(x)-\epsilon(x)=\epsilon(x)}$ pour $\epsilon_1(x)-\epsilon_2(x)=\epsilon_3(x)$!

   D'où aussi $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n + x^n.\epsilon(x), \quad \epsilon(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.}$

2. Remarques. **Ci-dessus** $x\to 0$ **; mais plus généralement si** $x\to x_0$**,** $\epsilon(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$**,** $h=(x-x_0)$ **:**
   - Dans la suite finie $1,\ h,\ h^2, ...,\ h^n,\ h^n.\epsilon(h)$ ["reste"] chaque terme est négligeable/précédent.
   - Notations de Landau. **On note : si** $\epsilon(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$, $\underline{(x-x_0)^n.\epsilon(x) = o[(x-x_0)^n]}$ ou bien si

     $g(x) = o[(x-x_0)^n]$, $\frac{g(x)}{(x-x_0)^n} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$; alors que $\frac{O[(x-x_0)^n]}{(x-x_0)^n}$ est seulement bornée.

3. Définition. **On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $x_0\in\mathbb{R}$ (Dl_n) :**

   si on a une égalité $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n.\epsilon(x)$, $\epsilon(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$
   ou avec les notations de Landau : $f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$.

   - Si on a un Dl_n, alors on a un Dl_{n-1} car $a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n.\epsilon(x) = (x-x_0)^{n-1}.\epsilon^*(x)$.
   - On peut poser, si nécessaire, $\epsilon(x_0)=0$ (prolongement par continuïté).
   - Si on a un premier $a_k\neq 0$ alors $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} a_k(x-x_0)^k$. **Retenir (notations de Landau) :**

   $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+...+x^n+o(x^n)}$ $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n.x^n+o(x^n).}$

30.1.3 Unicité

1. Théorème : $\boxed{\text{Si } f \text{ possède un } Dl_n \text{ en } x_0\text{, il est unique.}}$

Démonstration

- On a $DL_0 \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a_0$ (et on prolonge par continuïté si utile) ; $a_0 = f(x_0)$ unique.
- Puis $Dl_1 \Leftrightarrow f$ dérivable en x_0 de dérivée a_1 (à voir !) ; $a_1 = f'(x_0)$ unique.
- Fin de l'unicité : $[f(x)$-partie polynômiale de degré $\leqslant k-1]\ /\ (x-x_0)^k \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a_k$: a_k unique.

(*) Par contre f peut avoir un Dl_2 sans que f" existe !

2. Conséquence si parité

$\boxed{\textbf{Le } Dl \textbf{ en } 0 \textbf{ d'une fonction paire est pair ; celui d'une fonction impaire est impair.}}$

Résulte de $f(x) = f(-x)$ si f paire (ou de l'analogue si impaire) et unicité du Dl.

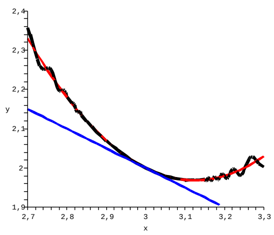
30.1.4 Exemple et dessin

Montrer que $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-3) + 2(x-3)^2 + (x-3)^3.sin\frac{1}{(x-3)^2}$ a un Dl_2 en $x = 3$. Dessin ?

(Vérifier que f' n'a même pas de Dl_0 en $x = 3$. Donc f' non continue en 3, donc f"(3) n'existe pas !)

Solution . Posons $h = (x-3)$. Vérifions que $h^3.sin\frac{1}{h^2} = o(h^2) = h^2.\epsilon(h)$, $\epsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$: c'est vrai.

. Et $f(3) = 2$ par prolongement par continuïté ; $f'(3) = -\frac{1}{2}$. Puis : $y = 2 - \frac{1}{2}(x-3)$ est l'équation de la



tangente en $x = 3$. Donc "Courbe-Tangente" $\underset{x \to 3}{\sim} 2(x-3)^2 \geqslant 0$. [Tracé aussi de la parabole $y = 2 - \frac{1}{2}(x-3) + 2(x-3)^2$]. Enfin, calcul de $f'(x)$; et (à voir) $f'(x)$ sans limite en $x = 3$!

Remarques : 1) Quand f"(x_0) existe nous allons voir, au III, que $a_2 = \frac{f"(x_0)}{2!}$.

2) En complément : $\mathcal{R} = \frac{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}{y"(x_0)}$ est le "rayon de courbure" en x_0.

30.2 Opérations sur les Dl

30.2.1 Somme de Dl ; multiplication par constante (opérations linéaires)

Exemple. Soit $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}.(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$ décomposition en éléments simples.

Alors : $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = ... = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2p} + o(x^{2p})$.

Remarques

1) Dans $\frac{1}{1-x}$ il suffit de remplacer x par x^2 ; mais on voulait illuster les opérations linéaires.

2) Le reste est, par parité, $x^{2p+2} + o(x^{2p+2})$ donc est un infiniment petit, **non seulement par rapport à x^{2p}, mais même par rapport à x^{2p+1} sans effort !** Qui s'écrit : $o(x^{2p+1})$.

D'où finalement : $\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2p} + o(x^{2p+1}).}$

30.2.2 Produit de Dl

$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}.\dfrac{1}{1+x} = (1+x+x^2+o(x^2)).(1-x+x^2+o(x^2))$ à l'ordre 2, en $x_0 = 0$:
Faire le produit des Dl, ne garder que les termes utiles. Trouver $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ cf. avant !

Autre exemple : $g(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x}.\dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2, en $x_0 = 0$?

Idem : $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$. Ici 2 autres méthodes après.

30.2.3 Quotient de Dl

Même 2ème exemple : $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ à l'ordre 2, en $x = 0$?

Diviser 1 par $1 - 2x + x^2$ mais selon les puissances croissantes. Encore 1 méthode après.

30.2.4 Théorème d'intégration des Dl : opération nouvelle

Si f' admet un Dl_n en x_0 : $f'(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$, f admet un $\underline{Dl_{n+1}}$ obtenu en intégrant : $f(x) = \underline{f(x_0)} + a_0(x-x_0) + ... + a_n\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o[(x-x_0)^{n+1}]$

Démonstration. Théorème des accroissements finis à $\varphi(x) = f(x) - [f(x_0) + a_0(x-x_0) + ... + a_n\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}]$.

Exemples de la famille de $\dfrac{1}{1+x}$. Retenir : $ln(1+x)$, $Arctan(x)$

• Ayant en 0, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} + o(x^{n-1})$, on en déduit avec $ln(1) = 0$:

$\boxed{ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - ... - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n).}$ Et changeant x en $-x$ (ou avec $\dfrac{1}{1+x}$)

$\boxed{ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n).}$ Puis **hors cours le suivant :**

$[Argth(x) = \dfrac{1}{2}.ln(\dfrac{1+x}{1-x}) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})$ car impaire.

ou à partir de la dérivée : $Argth'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour $|\, x \,| < 1$; $Argth(x)$ partie impaire de $ln(1+x)$.]

• Ayant en 0 : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^p.x^{2p} + o(x^{2p+1})$, (parité pour le reste) et

$Arctan(0) = 0$, par intégration, on a : $\boxed{Arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ...(-1)^p.\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}).}$

30.2.5 (*) Dérivation des Dl

Difficulté. Il se peut que f admette un Dl_2 sans que f' admette un Dl_0 (vu).

Résultat On n'a pas de théorème nouveau ; c'est le théorème d'intégration lu à l'envers ; c'est pourquoi il faut connaitre l'existence du Dl de f'. A ce moment, on dérive celui de f et on perd un ordre.

Exemple : 3ème façon pour le Dl de $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ en 0 ?

Déjà, on est sûr qu'il existe à tout ordre : ou comme produit ; ou comme quotient ; mais mieux encore **comme fonction C^∞ au voisinage de 0 : cf. III.**

Ensuite $\boxed{(\dfrac{1}{1-x})' = \dfrac{1}{(1-x)^2}}$ et donc, il suffit de dériver celui de $\dfrac{1}{1-x}$.

Ainsi : $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + o(x^n)$.

[(*) Idem $(\dfrac{1}{1-x})^{(p)} = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$ d'où le Dl en 0 de : $\dfrac{1}{(1-x)^{p+1}} = \dfrac{1}{p!}.(\dfrac{1}{1-x})^{(p)}$ par dérivations.]

30.2.6 Composition

Exemple : Dl à l'ordre 3 (ou l'ordre 2 déjà) en $x = 0$, de : $f(x) = ln[2 + Arctan(x)]$?

Réponse. Le Dl du ln vu au voisinage de 1 : $ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)$.

Or ici [...] proche de 2. **Ecrire** $[...] = 2.(1 + \dfrac{Arctan(x)}{2})$ donc $f(x) = ln(2) + ln[1+h]$

avec $h = \dfrac{Arctan(x)}{2} = \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4))$ et en ne gardant que les x^k, $k \leqslant 3$:

$f(x) = ln(2) + ln[1 + \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)]$. Avec $h = u + v = \dfrac{x}{2} + (\dfrac{-x^3}{6} + o(x^4))$ pour h^2, h^3

et : $h \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \Rightarrow o(h^3) = o(x^3)$: $f(x) = ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4) - \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$.

Ainsi : $f(x) = ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$.

Remarques 1) $x^4 = o(x^3)$; $o(x^4) + o(x^3) = o(x^3)$!

2) $ln(1+h) - h \underset{h \to 0}{\sim} -\dfrac{h^2}{2}$ en accord avec la concavité. Dessin ?

3) $Arctan(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$ en accord aussi avec le dessin : imparité, cas $x \to 0^+$.

30.3 Formule de Taylor-Young et utilisations

30.3.1 Les théorèmes

Si f est $n \geqslant 1$ fois dérivable en x_0 (C.S.), alors f admet un Dl_n en x_0 qui est : $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$. (Taylor-Young.)

Cas $x_0 = 0$: Si f est $n \geqslant 1$ fois dérivable en 0, alors f admet un Dl_n en 0 : $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}.x + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + o(x^n)$. (Formule de Mac-Laurin-Young.)

Démonstration : On part de $f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + (x - x_0).f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)$;

on intègre (cf. Théorème) ce Dl $n-1$ fois, sans oublier les constantes à chaque fois.

Notes

1) On retrouve la formule de Taylor pour les polynômes, en prenant $n \geqslant d^oP$!

2) Thèorème des accroissements finis $\Rightarrow$ Théorème d'intégration des Dl $\Rightarrow$ Formule de T-Y.

30.3.2 Exemples à savoir : exp, ch, sh, sin, cos ; et $(1+x)^\alpha$, binôme

1. Pour $a \in \mathbb{C}$: $e^{ax} = 1 + \dfrac{a.x}{1!} + \dfrac{a^2.x^2}{2!} + ... + \dfrac{a^n.x^n}{n!} + o(x^n)$.

   Démonstration. Formule de Mac-Laurin-Young car $\dfrac{d}{dx}(e^{ax}) = a.e^{ax}$ même si $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$!

   • $a = 1$ donne : $\boxed{e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).}$

$$\boxed{ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}).}$$

$$\boxed{sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}).}$$ (Parties paire et impaire)

• Puis $a = i$ donne : $e^{ix} = 1 + i.\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}... + \frac{i^n.x^n}{n!} + o(x^n)$. Donc

$$\boxed{cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^p.\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}).}$$

$$\boxed{sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^p.\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}).}$$

Remarques

1) Les relations $exp' = exp$, $cos' = -sin$... se retrouvent (par intégration) dans les Dl.

2) On retrouve : $cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$, $ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{+x^2}{2}$, ... et en plus : $sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{6}$.

3) **Avec** exp **donc avec** $cos, sin, ch, ...,$ **les factorielles ne se simplifient pas.**

2. Si α fixe $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).}$

Démonstration. Formule de Mac-Laurin-Young car : $[(1+x)^\alpha]' = \alpha.(1+x)^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

• Cas $\alpha = 6$, Dl_2 en 0 : $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + o(x^2)$. Binôme tronqué connu.

• Cas $\alpha = -1$ en 0 : $\frac{1}{1+x} = ...$ $\boxed{\text{Connu aussi : exemple d'introduction !}}$

(Et : Dl_2 **en** $x = 0$ **de** $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$ **4ème façon !)**

• **Cas** $\alpha = \frac{1}{2}$, Dl_2 **en** 0 : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ **(2 ! : ne pas oublier.)**

• **Cas** $\alpha = -\frac{1}{2}$, Dl **en 0 à tout ordre :**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ... + (-1)^n.\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.\ ...\ .2n}x^n + o(x^n).$$

30.4 Pratique des Dl et utilisation

30.4.1 Deux exemples

1. Arcsin en 0 ? $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + ... + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n}x^{2n} + o(x^{2n+1})$

   est sa dérivée (paire) d'où $Arcsin$ par intégration :

   $$Arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + ... + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

   (*) De même, mais hors programme $Argsh(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$ en 0, de dérivée : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. $tan(x)$ en 0, à l'ordre 4 ? (On va illustrer **la composition**)

   • On peut faire la division $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$; on trouve $tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

   • On peut aussi intéger : $tan'(x) = 1 + tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^3)$: même réponse.

   • Ou composer : Le Dl existe en 0, à tout ordre, car fonction C^∞ au voisinage de 0 (sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

   Et $tan(x) = x + ax^3 + o(x^4)$ (impaire), donc l'ordre 3 suffit ! On cherche a :

Exprimer que $Arctan(tan(x)) = x = x + 0.x^3$ (en 0) et unicité du DL. A faire et même réponse.

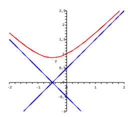
$\boxed{\text{De même on a}}$ (*) $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$.

30.4.2 Remarques très importantes

1. Comment avoir le Dl_3 de $cos(x)$, **quand** $x \to 1$?
   . Soit par la formule de (T-Y) en 1 (les dérivées en 1 étant faciles) .
   .. Soit $cos(1+h) = cos(1).cos(h) - sin(1).sin(h) = ...$ A faire !
   $(cos(x) = cos(1) - sin(1).(x-1) - \dfrac{cos(1)}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{sin(1)}{3!}(x-1)^3 + o[(x-1)^3]$.)
2. Dl_2 de ln **au point 3** ? [$ln(3+h)$ au lieu de $ln(1+h)$?]
   . Soit par (T-Y) : $ln(x) = ln(3) + \dfrac{1}{3}(x-3) - \dfrac{1}{18}(x-3)^2 + o[(x-3)^2]$.
   .. Soit, aussi bien : $ln(x) = ln(3+h) = ln(3) + ln(1+\dfrac{h}{3}) = ...$ Idem.
3. $\sqrt{2+h}$, quand $h \to 0$, **ce qui est** $\sqrt{...}$ **au voisinage de 2 ?** (ci-dessus : $\sqrt{1+x}$).
   $\sqrt{2+h} = \sqrt{2(1+\frac{h}{2})} = \sqrt{2}.(1+\dfrac{h}{2})^{1/2}$ ... ($h \to 0$, bien sûr) : connu.
4. Dl_2 de $\sqrt{tan(x)}$ en $\pi/4$. [Note : En 0, $\sqrt{...}$ a seulement un Dl_0, car **non** dérivable en 0.]
   Le Dl de tan en $\pi/4$ non connu ; tan peu commode ; puis $\sqrt{...}$; donc dans ce cas,
   $x = \dfrac{\pi}{4} + h$ ne doit pas faciliter la travail. [$tan(\dfrac{\pi}{4}) = 1$; $tan(a+b) =$?]
   C'est un rare cas où on utilise (T-Y) : $f(\pi/4)$ aisé ; $f'(\pi/4)$ abordable ; $f"(\pi/4) = ... = 1$.
   (**Trouver :** $\sqrt{tan(x)} = 1 + 1.(x - \dfrac{\pi}{4}) + \dfrac{1}{2!}(x-\dfrac{\pi}{4})^2 + o[(x-\dfrac{\pi}{4})^2]$.)

30.4.3 Utilisation des Dl

1. Une limite nouvelle : $\dfrac{sin(x) - x}{x^3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{6}$.
2. Branches infinies d'une courbe : on suppose que $x \to \infty$ et $y \to \infty$
   Exemple : Branches infinies de $y = \sqrt{x^2+x+1}$? Domaine : $\mathbb{R}$. Voyons en $\pm\infty$:
   $y = \mid x \mid .(1+h)^{1/2}$, avec $h = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc : $y = \mid x \mid . [1 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{8x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})]$,
   Puis distinguer $+\infty$ de $-\infty$. $y = a.x + b + \dfrac{c}{x} + o(\dfrac{1}{x})$, $c \neq 0$: **asymptote et position !**



En fait, on a une demi-hyperbole car courbe de degré 2 ($y^2 = ...$), avec asymptotes !

En général :
- Si $\dfrac{y}{x} \to a \in \mathbb{R}^*$:
  - Si $y - ax$ a une limite $b \in \mathbb{R}$ $\boxed{y = ax + b \text{ est asymptote oblique.}}$ Si
  - $y - ax \to \infty$ branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$
  - Et si $y - ax$ n'a pas de limite, on a seulement la direction $y = ax$.
- Si $\dfrac{y}{x} \to \infty$ on dit que l'on a une branche parabolique de direction (asymptotique) Oy
- Si $\dfrac{y}{x} \to 0$ on dit : une branche parabolique de direction (asymptotique) Ox et
- Enfin : $\dfrac{y}{x}$ peut ne pas avoir de limite ... Un exemple est : $y = x[2 + sin(x)]$.

On essaie de tout avoir par un seul développement ("asymptotique" ou "généralisé"). **cf. Exemple.**

30.4.4 Etude de fonctions

$\boxed{\text{Un exemple traité}}$ $y = f(x) = x^{\frac{x}{x-1}}$.

1) On a ici l'égalité : $y = f(x) = e^{\frac{x}{x-1}.ln(x)}$, définie pour $x > 0,\ x \neq 1$.

2) Variations : $y' = y.[\frac{1}{x-1} + ln(x).\frac{-1}{(x-1)^2}] = \frac{y}{(x-1)^2}[x - 1 - ln(x)] = \frac{y}{(x-1)^2}.\varphi(x)$.

Puis on étudie φ : en dérivant, ln $\boxed{\text{isolé disparait ;}}$ ou on sait ici $ln(x) \leqslant x - 1$ (concavité).

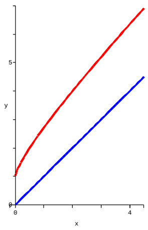
3) Limites :

Si $\underline{x \to 0}$, $y \to 1$ car $x.ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $y' \to \infty$: tangente verticale.

Si $\underline{x \to 1}$, $y \to e$ [car $ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} (x-1)$] et avec $x - 1 = h$, $y' \to e/2$. (Dl)

On prolonge par continuïté en posant $f(1) = e$ (et $f(0) = 1$). Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{e}{2}$.

Si $\underline{x \to +\infty}$, $y = x.x^{\frac{1}{x-1}} = x.e^{\frac{ln(x)}{x-1}} = x.[1 + \frac{ln(x)}{x-1} + \frac{1}{2}.\frac{ln^2(x)}{(x-1)^2} + \frac{ln^2(x)}{(x-1)^2}.\epsilon(x)]$, $\epsilon(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

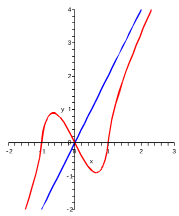


$y/x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y - x \underset{x \to +\infty}{\sim} ln(x)$: branche "parabolique" de direction $y = x$.

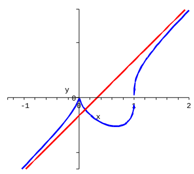
$\boxed{\text{D'autres exemples}}$

- On prolonge systématiquement par continuïté (si on peut) les fonctions.
- Souvent pour le signe de y', on fait une autre étude : $\boxed{\text{isoler la fonction "transcendante"}}$ (avant de dériver) comme dans l'Exemple ci-dessus.

1. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot ln\,|\frac{1+x}{1-x}|$ impaire.
   Ecrire donc : $f'(x) = 2x.\varphi(x)$ puis $\varphi'(x)$ ... $f'(0) = -2$; en $x = 1$, tangente verticale.

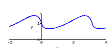
   En $\pm\infty$, $y = 2x - \frac{4}{3x} + \frac{\epsilon(x)}{x}$

   La suivante

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$. 2 tangentes verticales ! $y = x - \frac{1}{3}$ asymptote oblique ...
   En $x = 0$ ou $x = 1$: revoir le Théorème de la limite de la dérivée.

3. $f(x) = |\,sin(x)\,|^{tan(x)}$ π-périodique.
   En $x = 0$ prolongement par continuïté ; puis tangente verticale (f non dérivable).
   En $\frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + o(h^2)$ avec $h = (x - \frac{\pi}{2})$ ... Courbe :

4. **En compléments,** des développements "généralisés" :
   Si $x \to 0^+$, $ln[sin(x)] = ln(x) - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$. [1er terme infini et parité de $ln\ \frac{sin(x)}{x}$.]
   Si $x \to 0$, $\frac{1}{tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x^2)$. [1er terme infini et imparité ; à voir.]

M+ **Exercices: Développements limités** **PTSI**

---

1. Préciser les Dl suivants
   (a) de $\dfrac{cos(x)}{1-x}$ à l'ordre 3 en $x_0 = 0$
   (b) de e^x à l'ordre 2 en : $x_0 = 1$ [poser $x = 1 + h$]
   (c) de $e^{cos(x)}$ à l'ordre 4 en $x_0 = 0$
   (d) de $\sqrt{cos(x)}$ à l'ordre 4 en $x_0 = 0$
   (e) de $ln(ln(e + x)]$ à l'ordre 3 en $x_0 = 0$
   (f) de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ à l'ordre 2 en ∞ $[a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + o(\dfrac{1}{x^2}) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{\epsilon(x)}{x^2}, \epsilon(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0]$
   (g) de $\dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 3 au point $x_0 = 0$; puis au point $x_0 = 1$
   (h) (*) de $[tan(x + \pi/4)]^{-cot(2x)}$ à l'ordre 3 en $x_0 = 0$
   (i) (*) de $[1 + Arctan(x)]^{x/sin^2(x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$.

2. Calculer les limites suivantes (*) ici et ex. suivants !
   (a) $\dfrac{1}{sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0 [dénominateur commun ; trouver 1/3]
   (b) $(3.\sqrt[n]{2} - 2.\sqrt[n]{3})^n$ en $+\infty$ [trouver 8/9]
   (c) $n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}$ en $+\infty$ [trouver 1]
   (d) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-x^{1/3})}$ en 1 [dénominateur commun ; trouver 1/12.]

3. Trouver a, b tels qu'en $x_0 = 0$, $f(x) = cos(x) - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible. Equivalent de cette différence. [Rép. $a = -5/12, b = 1/12, f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^6/480.$]

4. Développements asymptotiques ou généralisés
   (a) Préciser l'égalité $f(x) = x^2.ln \mid \dfrac{1+x}{x} \mid = ax + b + \dfrac{c}{x} + o(\dfrac{1}{x}$. Branches infinies ?
   (b) (*) Branches infinies de $y = (x-1).exp[\dfrac{1}{x^2-3x+2}]$ $(1^- : y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}.exp[\dfrac{1}{x^2-3x+2}].)$

5. Etudier les fonctions suivantes
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$ [tang. vert. en 0 et 1 ; tang. hor. en 1/3 ; $f(x) = x - 2/3 - 1/9x + o(1/x)$]
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ [Asymptote $y = x/2 - 1/4$; en 0, point anguleux : pentes 1 et 0]
   (c) (*) $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^x$ [Prolongement par continuïté en 0 ; mais alors tangente verticale]
   (d) (**) Etudier la famille de fonctions $f_a(x) = \mid x \mid^a .exp(\dfrac{-1}{\sqrt{\mid x \mid}})$. [On distinguera les cas $a > 1$, $0 < a < 1, -1/2 < a < 0$... On montrera aussi que f_a est C^∞ en 0 et que $\forall k, f_a^{(k)}(0) = 0$].

6. Equivalent en 0 de : $sin(tan(x)) - tan(sin(x))$? Réponse : $-x^7/30$ ... par **logiciel** de calcul !

Chapitre 31

Les séries numériques

31.1 Généralités

31.1.1 Définitions

1. Somme partielle. Convergence de la série, somme d'une série convergente

   Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes réels (ou complexes). On pose $\boxed{S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$

   (bien voir l'indice k muet) appelée **somme partielle**.

   Définition : La convergence de la **série de terme général** u_n $\boxed{\text{est}}$ la convergence **de la suite** (S_n).

2. Dans le cas de convergence on note $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et on appelle Reste d'ordre n la différence

   $\boxed{R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.}$ On **revient de S_n à u_n par :** $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$ **(dérivée discrète)** !

3. Exemple. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge car $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$. $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = 2$.

31.1.2 Plan d'ensemble

1. Condition **Nécessaire de convergence** : $\boxed{\text{Série convergente} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \text{Réciproque fausse.}}$

   $\boxed{\textbf{Car}}$ S_n a une limite **finie** S. Et $S_n - S_{n-1} = u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. Réciproque fausse : après.

2. **Deux séries de références :**
   (a) Les séries géométriques $u_n = q^n$ ($|\, q \,| < 1$ pour que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
   (b) Les séries de Riemann $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha > 0$: idem).

3. Les séries à termes **positifs** essentielles (ou positifs à partir de n_0) car $\boxed{\text{ici, } S_n \text{ croissante.}}$

4. Un cas important : les séries alternées, type $u_n = (-1)^n . \mid u_n \mid$; de signe régulièrement alterné.

5. **Mais parfois** : des séries où $u_n \in \mathbb{C}$; ou bien u_n réel de signe quelconque : $u_n = \dfrac{sin(n)}{n^2}$.

6. Ne pas oublier enfin les cas de somme télescopique : exemple $u_n = \dfrac{1}{n.(n+1)}$ $(n \geqslant 1)$:

   Ici, $S_n = u_1 + ... + u_n$; mais $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ (décomposition en éléments simples) !

   donc $S_n = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n+1}$: la série est donc convergente de somme $S = 1$.

   (Bien sûr la condition nécessaire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ était respectée).

31.1.3 C.N. de convergence

1. Propriété : $\boxed{\textbf{Série convergente} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \textbf{Réciproque fausse.}}$

2. **Démonstration** (rappel) : Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si la série "$\sum u_n$" est convergente c'est (exactement) que la suite (S_n) convergente. S_n et S_{n-1} ont ainsi même limite **finie** S (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Et donc : $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quand $u_n \not\to 0$ $(n \to +\infty)$, on dit que la série **diverge grossièrement**.

   Exemple. Un exercice (de la feuille) consiste à montrer que $\sum sin(n)$ diverge grossièrement.

3. **Réciproque fausse :**

   $\boxed{\text{Divergence de la Série harmonique } S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \text{ où } u_n = \frac{1}{n}. \text{ [Nicole(las) Oresme.]}}$

   1ère façon, subtile. $S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$! $\Rightarrow S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} \geqslant n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
   Si la suite S_n convergeait, $S_{2n} - S_n$ devrait tendre vers 0, ce qui est impossible.
   2ème façon, comparaison avec une intégrale : $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}.dt$. Donc $S_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}.dt = ln(n+1)$.
   Et ainsi $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. [Remarque : un autre petit travail, laissé, donnerait : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$.]

31.1.4 Deux séries de référence

1. **La série géométrique** $\boxed{\begin{array}{c}\text{La série de terme général } u_n = q^n \in \mathbb{C} \text{ converge } \Leftrightarrow \mid q \mid < 1 \\ \text{et dans ce cas la somme est : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.\end{array}}$

   En effet, si $\mid q \mid < 1$, on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et on sait que $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Inversement
   Si $\mid q \mid \geqslant 1$, la C.N. de convergence n'est pas respectée : la série diverge grossièrement.

2. **Les séries de Riemann** $\boxed{\begin{array}{c}\text{La série de terme général } u_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1. \\ \text{La somme est inconnue. [Pour } \alpha = 2\text{, c'est (* Euler) } \pi^2/6.]\end{array}}$

   Démonstration difficile en Ligne 3 (*) : En effet $\alpha > 0$ est nécessaire sinon divergence grossière ; même $\alpha > 1$ est nécessaire car la série harmonique est divergente (et par exemple, $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$...)
   En sens inverse, $\alpha > 1$ est suffisant en comparant à nouveau avec une intégrale : pour $n > 1$, on a :
   $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}dt$; $S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt = 1 + \frac{1}{\alpha-1}.\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$
   par relation de Chasles et primitive.
   Donc S_n croissante, majorée par une quantité qui ne dépend pas de n, converge.

   Remarque. Pour les séries géométriques $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$; pour les séries de Riemann $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. Opérations sur les séries convergentes
   (a) Bien sûr, si u_n est le terme général d'une série convergente, $\lambda.u_n$ aussi.
   C'est ainsi que pour la série $u_n = a.q^n$, le résultat est connu.
   (b) De même si (u_n) et (v_n) sont les termes généraux de séries convergentes, $(u_n + v_n)$ aussi.
   (c) Par contre : Série convergente + Série divergente = Série divergente (cas : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$).
   Série divergente + Série divergente = on ne sait pas ! cas : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n}$!

31.2 Cas des séries à termes positifs

31.2.1 Comparaisons fondamentales par inégalités

1. Théorème. **Soit :** $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ **pour** $n \geqslant 0$ **(ou pour** $n \geqslant n_0$**, cela suffit)** :
Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi.
Par contraposée : si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

En effet, la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ étant **croissante** (au moins à partir d'un certain rang), on a :
la suite S_n converge $\Leftrightarrow$ suite majorée. Puis assez aisé.

2. Exemple. Si $u_n = \dfrac{|\, sin(n)\,|}{n^2}$: $0 \leqslant u_n \leqslant v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.

31.2.2 Conséquence : règle de D'Alembert

1. Enoncé. On suppose **ici que** $u_n > 0$ **(à partir d'un certain rang) et que** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$:
si $l > 1$, la série diverge ; si $0 \leqslant l < 1$, la série converge ; si $l = 1$, cas douteux.

Exemples. **Cas** $u_n = 1/2^n$, $u_n = 1/n^\alpha$, $u_n = n!/n^n$ **(ici** $u_{n+1}/u_n \to 1/e$**)**, $u_n = (n^n.a^{2n})/n!$

2. Démonstration. Cas $l < 1$: Introduisons $q = \dfrac{1+l}{2} < 1$. $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que : $n \geqslant n_1$ entraine $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$; donc $u_n \leqslant u_{n_1}.q^{n-n_1} = a.q^n$, si $n \geqslant n_1$ $(a = u_{n_1}.q^{-n_1})$ et la série de droite converge.
Cas $l > 1$: plus facile ! $\exists n_1$: $n \geqslant n_1 \Longrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; donc $\forall\, n \geqslant n_1$: $u_n \geqslant u_{n_1}$. Ainsi $u_n \nrightarrow 0$.

31.2.3 Autre conséquence : comparaisons par équivalents, toujours $u_n \geqslant 0$

1. Théorème **Si** $u_n \geqslant 0$ **(essentiel)** et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries sont de même nature.

La démonstration est laissée en exercice.

2. **Exemples** . Soit : $u_n = ln(1+\dfrac{1}{n})$; on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} = v_n \geqslant 0$.
Comme la série harmonique $\sum v_n$ est divergente, la série $\sum u_n$ aussi.
 . Série de terme général $u_n = e - (1+\dfrac{1}{n})^n$. **(D.L. à faire)** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n}$: série divergente.

3. Contre exemple. On verra au III qu'on peut trouver $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nature différente bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Mais u_n NON de signe constant et le Théorème ne s'applique pas !

31.2.4 Convergence absolue

1. Théorème Soit $u_n \in \mathbb{R}$ (ou même $u_n \in \mathbb{C}$) le terme général d'une série.
Si $\sum |\, u_n\,|$ converge (**condition suffisante**), alors $\sum u_n$ est convergente.
On dit que la série, dans ce cas, est absolument convergente.

ADMIS. **Et pour la série $\sum |\, u_n\,|$, on peut appliquer les numéros 1,2,3, ci-dessus.**

2. Exemples. Les séries de terme général : $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\dfrac{sin(n)}{n^2}$, $\dfrac{cos(ln(n))}{n^{3/2}}$, $\dfrac{sin(n).ln(n)}{n^{3/2}}$ sont absolument convergentes (dernière : $|\, u_n\,| \leqslant n^{1/4}/n^{3/2}$ si $n \geqslant n_0$) **donc** convergentes.

Par contre : $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **ne sont pas absolument convergente, MAIS ne pas dire** pour autant divergente ! elles sont "semi-convergentes" ; voir III.

31.3 Quelques mots sur les séries alternées

31.3.1 Définition (ce n'est plus un objectif de base du programme)

La série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ est dite alternée si elle est alternée en signe $u_n = (-1)^n . \mid u_n \mid$.

Exemples : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est alternée ; par contre $v_n = \dfrac{sin(n)}{n}$ ne l'est pas !

31.3.2 (*) La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geqslant 1$, converge vers $ln(2)$

1. Elle est non Absolument convergente, mais elle converge ; preuve avec S_{2n}, S_{2n+1} adjacentes :
$S_1 = u_1 = 1,\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 - \dfrac{1}{2},\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3},\ S_4 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}, \ldots$
Dessin : S_{2n+1} et S_{2n} sont respectivement décroissantes, croissantes, et $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
adjacentes donc convergent vers la même limite S. **(*) Et ici** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln(2)$. 3 façons :
2. (*) cf. la formule de Mac-Laurin Lagrange à $ln(1+x)$. Puis $x = 1$. Trouver $\mid ln(2) - S_n \mid \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. **Idem, plus facile** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ ou $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 = \ldots + (-1)^{n-1}.x^{n-1} + \dfrac{(-1)^n.x^n}{1+x}$:
$ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n} + (-1)^n \displaystyle\int_0^X \frac{x^n.dx}{1+x}$. $X = 1$: $\mid ln(2) - S_n \mid = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n.dx}{1+x} \leqslant \int_0^1 x^n.dx = \frac{1}{n+1}$.
4. Ou (*) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow T_{2n} - S_{2n} = T_n$: S_{2n} somme de Riemann conv. vers $ln(2)$, $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} \ldots$

31.3.3 (*) Exercice : "Le Théorème spécial des séries alternées" (idem, S_{2n}, S_{2n+1} adj.)

1. Enoncé: On est ici dans le cas où : $u_n = (-1)^n.a_n$ avec $a_n = \mid u_n \mid \geqslant 0$. Si on a de plus : a_n tend vers 0, **en décroissant,** cela **suffit** pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
2. Autres exemples. $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le Théorème spécial des séries alternées.
$\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ conv. par le Th. spécial des séries alternées ; mais **mieux** : absolument convergente !
Rem. $\sum \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$: somme d'une série conv. et d'une div. ; **div**. Pourtant $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$!

31.3.4 (**) Complément :

1. $\sum u_n$, $u_n = ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n + \epsilon_n}{3.n^{3/2}}$, est somme : d'une série semi-convergente, d'une série div. et d'une série absol. convergente ($\mid c_n \mid \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^{3/2}}$) **donc diverge ; (idem).**
2. Nature de la série de terme général $u_n = sin(\pi.\sqrt{n^2+2})$ avec $\boxed{sin(n.\pi + \alpha) = (-1)^n.sin(\alpha).}$
Solution. On a : $\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2(1+\dfrac{2}{n^2})} = n.(1+\dfrac{2}{n^2})^{1/2} = n.\left(1 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{k+\epsilon_n}{n^4}\right)$. ($k = \dfrac{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}}{2!}.2^2$)
Et par D.L. de $sin(h)$: $u_n = sin(n.\pi + \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{k.\pi + \epsilon_n}{n^3}) = (-1)^n.\left(\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{K+\epsilon_n}{n^3}\right)$, K inutile à connaitre.
Alors la série apparait comme somme d'une série semi-convergente (qui est connue : harmonique alternée) et d'une série absolument convergente (à voir !) ; donc la série $\sum u_n$ **converge.**
3. Exercice (*) : Dans les hypothèses du Théorème spécial des séries alternées, montrer que :
$\mid R_n \mid = \mid S - S_n \mid \leqslant \mid S_{n+1} - S_n \mid = \mid u_{n+1} \mid$ et que le signe de R_n est celui de u_{n+1}.

31.4 Quelques cas où on connait la somme d'une série

31.4.1 La série géométrique (et sa famille)

1. La série de terme général $u_n = x^n \in \mathbb{C}$ converge $\Leftrightarrow$ $\underline{|\, x \,| < 1}$. La somme est : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

2. Exercice (**) : **En dérivant** $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, trouver $x.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.x^{k-1} = ...$; et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{k}{2^k}$?

   Rép. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.x^k = \frac{x[1-(n+1).x^n + n.x^{n+1}]}{(1-x)^2}$. Converg. si $|\, x \,| < 1$ $\boxed{\text{car}}$ $n.\,|\, x \,|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$
   avec $x = 1/2$ (on peut aussi faire sa convergence par la règle de D'Alembert).

31.4.2 La série exponentielle (et sa famille)

1. La série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ converge $\underline{\forall x \in \mathbb{R}\ \ (\text{même } x \in \mathbb{C})}$. La somme est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

   Démonstration par la formule de **Taylor-Lagrange** avec pour le reste de T-L : $\boxed{\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

2. Exercice (**) : **En écrivant** $\dfrac{n(2n+1)}{n!} = \dfrac{2n+1}{(n-1)!} = \dfrac{\alpha.1+\beta(n-1)}{(n-1)!}$ si $n \geqslant 1$ $\quad (\beta = 2,\ \alpha = 3)$
   préciser la convergence et la somme de cette série.

   Réponse. Série convergente par la règle de d'Alembert si on veut et avec l'indication :
   $$\sum_{n\geqslant 1} u_n = 3.\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)!} + 2.\sum_{n\geqslant 1}\frac{n-1}{(n-1)!}. \quad \text{Or : } \sum_{n\geqslant 1}\frac{n-1}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{n-1}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n-2)!}$$
   d'où $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n = 3.\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)!} + 2.\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n-2)!} = 3e + 2e = 5.e$ car $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!} = e.}$

31.4.3 $(1+x)^\alpha$ si $x \in]-1, 1[$ (et sa famille) : Spé

31.4.4 Cas de sommes télescopiques. (*) 2 exercices corrigés :

1. Convergence et somme de : $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+2)}$? Série convergente ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$) et ... somme $\dfrac{3}{4}$.

   (Attention $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2})$: dans les simplifications reste deux termes au début et à la fin).

2. Trouver a, b pour que la série $\sum ln(n) + a.ln(n+1) + b.ln(n+2)$ converge ; calculer la somme.

   Solution : $u_n = ln(n) + a.ln(n+1) + b.ln(n+2) = (1+a+b).ln(n) + \dfrac{1}{n}(a+2b) + \dfrac{A+\epsilon_n}{n^2}$ car
   $ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + h^2.\epsilon(h)$. Donc (convergence) $\Rightarrow 1+a+b = 0$ (sinon $u_n \nrightarrow 0$) et $a+2b = 0$
   (sinon $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}$ div. par équivalence de séries **de signe constant**) : $a = -2$, $b = 1$.
   En sens inverse, avec ces valeurs, $u_n = \dfrac{A+\epsilon_n}{n^2}$: série convergente. Puis on a :
   $$S_n = ln\left(\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}...\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}.\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = ln\left(\frac{1}{2}.\frac{n+2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ln\frac{1}{2}. \text{ D'où } S = -ln(2).$$

31.4.5 Souvent la somme est inconnue ; alors calcul approché : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^3} \simeq 1.202056903$

M+ **Exercices: Les séries numériques** **PTSI**

---

1. **Un cas de divergence grossière.** On pose : $u_n = sin(n)$.
Développer $sin(n+1)$; déduire que l'hypothèse $sin(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ entrainerait $cos(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; et qu'elle contredirait $sin^2(n) + cos^2(n) = 1$. Conclusion sur la nature de la série $\sum sin(n)$?

2. Nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$? (Règle de d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e}$.)
(Avec $[(n+1)/n]^n$ tend vers e en $+\infty$.)

3. Soit $u_n = \frac{2^{[(-1)^n]}}{3^n}$; nature de la série ? $(0 \leqslant v_n \leqslant \frac{2}{3^n})$ Et trouver la somme : $(2+\frac{1}{6}).\frac{1}{1-1/9}$.

4. On pose $E_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n)$. Donner un équivalent de $d_n = E_{n+1} - E_n$. $(-1/2n^2)$
En déduire que la suite (E_n) converge. (Ind. : $E_n = E_1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} d_k$)

5. (*) Montrer que la série $\sum \frac{ln(n).sin(n)}{n^{4/3}}$ converge. (Indication : Comparer $\mid u_n \mid$ à $\frac{1}{n^{1+1/6}}$.)

6. (*) Nature des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$, $v_n = e^{-\sqrt{n}}$, $w_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
(1ère : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{(1+\epsilon_n).ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$: et de signe positif; de même nature, divergentes.
2ème : $n^2.v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\exists n_0 :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$: D'où série convergente.
3ème : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2.n}$. Donc série divergente par équivalent des séries **à termes positifs.**)

7. Nature de : $\sum \frac{(-1)^n}{ln(n)}$? (Th. spécial S.A.). (*) Puis de $\sum v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$? (DL, div. !)

8. Convergence $\boxed{\text{et somme}}$ des séries de terme général : $u_n = ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $v_n = ln(cos\left(\frac{x}{2^n}\right))$
Rép : $n \geqslant 2$, somme : $-ln(2)$. Utiliser $sin(2a) = 2.sin(a).cos(a)$. Puis les cas :
$$w_n = Arctan(n+1) - Arctan(n) = Arctan\frac{1}{n(n+1)+1}, \qquad x_n = r^n.cos(n.\alpha),\ 0 \leqslant r < 1.$$

9. Dans le cas où f est positive, décroissante pour $n \geqslant n_0$ et C^0 (par morceaux).
   (a) Montrer que la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{X} f(t)dt$ a une limite finie quand $X \to +\infty$.
   (b) Que dire sur le reste si $\sum f(n)$ converge ? sur la somme partielle si $\sum f(n)$ diverge ?
   (c) Montrer que la suite $S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt$ dans tous les cas, décroit et converge.

Chapitre 32

Probabilités : généralités

32.1 Le vocabulaire

32.1.1 Définitions

1. Exemple. On lance 2 dés Bleu et Rouge ; on regarde les couples obtenus. On note souvent :

   $\Omega = \{(1,1),\ (1,2),\ ...,\ (1,6),\ (2,1),\ ...,\ (6,6)\}$ dit : Univers des (cas) possibles.

   . $A = \{(1,3)\}$ est un événement possible (une éventualité).
   . $B = \{(2,3),\ (2,5)\}$ en est un autre, signifiant obtenir en 1 lancer : $(2,3)$ ou $(2,5)$.
   . Ω est appelé événement certain. $\emptyset$: événement impossible.

   A et B sont dit incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. $\overline{A}$ est dit événement contraire de A.

   Un événement N tel que $p(N) = 0$ est dit "négligeable" (ici, c'est quand Ω est infini ...).

2. Une famille d'événements A_i est un système complet d'événements si $A_i \underset{i \neq j}{\cap} A_j = \emptyset$ et $\cup A_i = \Omega$.

   Ci-dessus $\{(1,1)\}$, $\{(1,2)\}$, ... ,$\{(6,5)\}$, $\{(6,6)\}$: système complet d'événements élémentaires.

32.1.2 Espace probabilisé fini

1. Une probabilité p sur Ω est une application

   $\boxed{p : \ \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \text{ telle que } \ p(\Omega) = 1 \ \text{ et } \ (A \text{ et } B \text{ incompatibles}) \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B).}$

   Exemple fondamental

   Si Ω est constitué d'un système complet d'événements élémentaires **équiprobables**, (on dit aussi probabilité **uniforme**), alors : $p(A) = \dfrac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} = \dfrac{Nombre-de-cas-favorables}{Nombre-de-cas-possibles}$.

   Ci-dessus, (avec des dés non biaisés), $p(B) = \dfrac{2}{6.6} = \dfrac{1}{18}$**.**

   $\boxed{\textbf{Autre}}$ Probabilité d'avoir **au moins** 1 as en 8 cartes d'un jeu de 32 ? $p(\overline{A}) = \binom{28}{8} / \binom{32}{8}$ ...

2. Attention. Sur le même exemple, probabilité que la somme des 2 chiffres soit égale à 5 (noté C).

   Les sommes possibles sont entre 2 et 12 ; **il y a 11 sommes** mais **non équiprobables** !
   La probabilité de la somme cherchée correspond à 4 cas équiprobables sur 36 ; soit $p(C) = \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{1}{11}$.

3. Propriétés. Il est facile de voir que (exercice) :

   . $p(\emptyset) = 0$. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. $p(A \cup B = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
   . $p(A \backslash B) = p(A) - p(A \cap B)$. $A \subset B \Rightarrow p(A) \leqslant p(B)$, croissance
   . et, si on a n événements incompatibles, alors : $p(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p(A_i)$.

32.2 Probabilités conditionnelles

32.2.1 Définition (probabilité de A si B)

1. On note $p(A|B)$ ou $p_B(A)$ la "probabilité de A sachant (que) B (est Vraie)", pour $p(B) \neq 0$.

   Cette probabilité (au sens déjà dit) est **définie** par $\boxed{p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}.}$ **Donc :**

2. $\boxed{p(A \cap B) = p(A).p_A(B) = p(B).p_B(A)}$ et (inversion des conditionnements) $p_B(A) = \dfrac{p_A(B).p(A)}{p(B)}$.

32.2.2 Formule des probabilités composées

1. La formule **ci dessus se généralise :** $p(A \cap B \cap C) = p(A).p_A(B \cap C) = p(A).p_A(B).p_{A \cap B}(C)$.

   C'est la formule des probabilités composées : $\boxed{p(\cap A_i) = p(A_1).p_{A_1}(A_2).\ \ldots\ .p_{A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).}$

2. **Exemple**
   Trois urnes contiennent des boules Blanches et Noires. U1 contient 2B et 3N ; U2 contient 4B et 2N ; U3 : 6B et 1N. On tire une boule de U1, on note sa couleur, on la met dans U2 ; on tire alors une boule de U2, on note sa couleur, on la met dans U3 ; on tire une boule de U3, on note sa couleur. Probabilité pour que les 3 boules aient la même couleur ?

   On a : $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = p(N_1).p_{N_1}(N_2).p_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{7}.\dfrac{2}{8} = \dfrac{9}{140}$.

   Idem : $p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{35}{140}$. On obtient la probabilité cherchée : $p = \dfrac{11}{35} = 0,314$.

32.2.3 Formule des probabilités totales

1. **Ici, on a un système complet d'événements** non négligeables A_i : $A_i \underset{i \neq j}{\cap} A_j = \emptyset$ $\boxed{\textbf{et}}$ $\cup A_i = \Omega$.

   Alors $\boxed{p(B) = \sum p(B \cap A_i) = \sum p(A_i).p_{A_i}(B) \quad (\text{sommes sur } i).}$ $(p(A_i) > 0)$

2. **Exemple**
   Trois urnes contiennent des boules Blanches et Noires. U1 contient 2B et 3N ; U2 contient 6B et 4N ; U3 : 4B et 1N. On choisit une urne au hasard et on tire une boule. Probabilité que ce soit une Blanche, si p, q, r avec $p + q + r = 1$ désigne les probabilités de choisir les Urnes 1, 2, 3 ?

   Trouver : $p(B) = p_{U_1}(B).p(U1) + p_{U_2}(B).p(U2) + p_{U_3}(B).p(U3) = \dfrac{2.p}{5} + \dfrac{6.q}{10} + \dfrac{4.r}{5}$.

   Si $p = q = r$, $p(B) = \dfrac{3}{5} = 0,6$. (Et il est possible de choisir p, q, r pour avoir $p(B) = 0,5$ ...)

32.2.4 Formule de Bayes (probabilité des causes !)

1. C'est l'inversion des conditionnements : $p_B(A_j) = \dfrac{p(A_j \cap B)}{p(B)}$; le numérateur vaut $p(A_j).p_{A_j}(B)$;

   et au dénominateur, en utilisant la formule des probabilités totales : $\boxed{p_B(A_j) = \dfrac{p(A_j).p_{A_j}(B)}{\sum_i\ p(A_i).p_{A_i}(B)}.}$

2. **Exemple**
   Quatre urnes contiennent des boules Blanches et Noires. U1 contient 4B et 1N ; U2 contient 3B et 2N ; U3 : 2B et 3N ; U4 : 1B et 4N. La probabilité de choisir l'Urne i est $\dfrac{i}{10}$.

   - Probabilité d'avoir 1 B en 1 tirage ?
   - Probabilité qu'on ait choisi l'Urne U1, si on a obtenu une blanche ?

   1) Avec la formule des probabilités totales (**correct car** on a $\dfrac{1+2+3+4}{10} = 1$!) :

   $p(B) = p(B|U1).p(U1) + \ldots + p(B|U4).p(U4) = \dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{5}.\dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{5}.\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5}.\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

   2) Et aussi $p(U1|B) = \dfrac{p(U1 \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(U1).p(B|U1)}{p(B)} = \dfrac{4/50}{2/5} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ (urnes non équiprobables).

32.3 Indépendance en probabilités

32.3.1 Cas de 2 événements

1. $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont dit indépendants si } p(A \cap B) = p(A).p(B)}$ **(attention $\neq$ "incompatibles").**
   - Un événement B négligeable ($p(B) = 0$), est toujours indépendant avec un événement A.
   - Si $p(B) > 0$, cela veut dire $p_B(A) = p(A)$: connaitre B ne change rien $\left(\text{car } p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}\right)$.
2. **Propriété**. $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ indépendants, alors } A \text{ et } \overline{B}, \text{ (donc } \overline{A} \text{ et } B, \overline{A} \text{ et } \overline{B}) \text{ sont indépendants.}}$

   En exercice : $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A).p(B) = p(A).p(\overline{B})$.

32.3.2 Cas de plusieurs événements

1. A, B, C sont dits indépendants si on a : $p(A \cap B) = p(A).p(B)$, $p(A \cap C) = p(A).p(C)$, $p(B \cap C) = p(B).p(C)$ $\boxed{\text{et aussi}}$ $p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)$. Etc. en général.

   (Donc : une sous-famille d'événements indépendants est indépendante !)
2. Trois événements indépendants 2 à 2, non indépendants ! On lance 2 fois de suite un dé équilibré. A : le chiffre du 1er lancer est pair. B : le chiffre du 2ème lancer est impair. C : avoir 2 chiffres de parité différente : A et B sont indépendants ; A et C aussi ; B et C aussi ; mais **pas** A, B, C.

   Réponse. $p(A) = p(B) = \dfrac{1}{2}$. $p(A \cap B) = \dfrac{3.3}{6.6} = \dfrac{1}{4}$. $p(C) = p((I, P)) + p((P, I)) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

   $A \cap C = (P, I)$: A et B indépendants car $p(A \cap B) = p(A).p(B)$; A et C aussi ; B et C aussi.

   Mais : $p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B) \neq p(A).p(B).p(C)$; donc A, B, C ne sont pas indépendants.

32.3.3 Exemples sur l'indépendance

1. On lance n fois une pièce avec probabilité p d'avoir Pile et $q = 1 - p$ d'avoir Face.
   (a) Probabilité d'avoir au moins une fois Pile ?
   (b) Probabilité qu'en ces n lancers, Face ne soit jamais suivi de Pile ?

   Rép. : (a) Le **contraire** est $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n$ de probabilité q^n (**indépendance** des lancers).

   D'où la réponse ici : $1 - q^n$.

   (b) Soit A_k : $P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_k \cap F_{k+1} \cap ... \cap F_n$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On veut ici $p(\cup A_k)$ et ces évènements sont incompatibles ; de plus : $p(A_k) = p^k.q^{n-k}$. **D'où la réponse :**

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^k.q^{n-k}$. (On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^k.q^{n-k} = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ si $p \neq q$ et si $p = q$, $p = q = 1/2$ ...

   et : $\displaystyle\lim_{x \to 1/2} \frac{x^{n+1} - (1/2)^{n+1}}{x - 1/2} = \lim_{x \to 1/2} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = f'(\frac{1}{2}) = (n+1).\frac{1}{2^n}$ ...)
2. Trois machines M_1, M_2, M_3, produisent $50/100$, $30/100$, $20/100$ des produits, respectivement. De plus, $2/100$ des produits fabriqués par M_1 sont défectueux, $3/100$ et $5/100$ avec M_2 et M_3.
   (a) Probabilité qu'un produit pris au hasard soit défectueux ?
   (b) Probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ?
   (c) Les événements "La pièce est défectueuse" et "La pièce provient de M_1" sont-ils indépendants ?
   (d) Une pièce est défectueuse. Probabilité qu'elle provienne de M_1 ? (C'est : $p_D(M_1)$.)

   Réponses :

   (a) Avec la formule des probabilités totales $p(D) = p(D|M_1).p(M_1) + ... = 0,02.0,5 + ... = 0,029$.
   (b) Maintenant, on veut : $p(M_1 \cap D) = p(D|M_1).p(M_1) = 0,02.0,5 = 0,01$. Par suite :
   (c) On a $p(M_1 \cap D) \neq p(M_1).p(D)$; donc ces événements ne sont pas indépendants.
   (d) Ici, c'est une probabilité des causes : $p(M_1|D) = \dfrac{p(M_1 \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,01}{0,029} \simeq 0,3448$.

32.4 Des exercices corrigés

32.4.1 Simple dénombrement mais pas facile (*) !

1. Avec 52 cartes, probabilité d'avoir exactement 1 Dame et 2 Coeurs en 5 cartes ? (13 coeurs ...)
2. On tire 2 dominos ensemble, d'un jeu de 28 $(7+\frac{7.6}{2})$. Probabilité d'avoir une face commune aux 2 ?

Rép 1. $\dfrac{\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{3}+\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{36}{2}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,081.$ Rép 2. $\dfrac{\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}+\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{28}{2}}=\dfrac{7}{18}\simeq 0,389.$

32.4.2 Indépendance, conditionnement, probabilité des causes

1. Pour ouvrir une porte, on a n clés distintes. Si $k\in[[1,n]]$, probabilité p_k d'ouvrir au $k$ème essai ?

   Rép. On a : $p_1=\dfrac{1}{n}$; $p_2=\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}$ ... Finalement $p_k=\dfrac{1}{n}$ **tout le temps !**

2. A et B indépendants, $p(A)=\dfrac{1}{2}$, $p(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$: calculer $p(B)$. $[p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A).p(B)...]$

3. On dispose de 2 pièces de monnaie, l'une non truquée, l'autre truquée T où la probabilité d'avoir Face est $p\geqslant 1/2$. On fait **les jets** successifs **avec la même pièce.**
   (a) Probabilité d'avoit choisi T si on a eu Face au 1er lancer, noté F_1 ? $[p(T|F_1)=2p/(2p+1)]$
   (b) Les événements F_1 et F_2 sont-ils indépendants ? [Non : $p(F_1)p(F_2)=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{p}{2}\right)^2$,
   et : $p(F_1\cap F_2)=p(F_1\cap F_2\cap NonT)+p(F_1\cap F_2\cap T)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{p^2}{2}$.]
   (c) Probabilité d'avoir choisi T si on a eu n F, en n lancers ? $[p(T|F_1\cap F_2\cap ...\cap F_n)=\dfrac{1}{1+\ 1/(2p)^n}.]$

32.4.3 (*) Limite de probabilités avec somme de Riemann

1. On tire une boule avec remise dans une Urne de n boules numérotées de 1 à n. Probabilité qu'au k-è tirage (p_k), on ait un numéro inférieur ou égal à tous les précédents ? Limite si $n\to+\infty$?

   Prendre en **première lecture** $k=2$ **et comprendre que** $p_2(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$ **; puis si** $k=3$**, comprendre que** $p_3(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{3}$ [plus petit numéro : position 1) 2) ou 3).] Non demandé mais si, par contre, **on prenait** $n=10$ **et** $k=1000$**, voir que** $p_{1000}\simeq\dfrac{1}{10}$ **[tirer la (1)].**

2. Solution. Tirages indépendants et équiprobables. n^k cas possibles ; si on tire la boule i au tirage k, on a tiré avant dans $[[i,n]]$: $(n-i+1)^{k-1}$ cas favorables. $\Rightarrow p_k=\dfrac{1}{n^k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)^{k-1}$ et avec $j=n-i+1$, $p_k=\dfrac{1}{n^k}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j^{k-1}$. Ainsi $p_2=\dfrac{n(n+1)}{2.n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$ et $p_k=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\frac{j}{n})^{k-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 t^{k-1}dt=\dfrac{1}{k}$.

32.4.4 (*) Limite de probabilités avec une Matrice

N enfants E_j jouent au ballon : au départ, E_1 a le ballon et l'envoie à un autre ; etc. Relier les les probabilités $p_{k,n}$: E_k ayant le ballon au pas n $(p_{1,0}=1)$ avec une matrice. Et si $n\to+\infty$?

$\boxed{\text{Solution}}$ **[On ne traite que le cas** $N=3$.] Soit $(A_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant 3}$ le système complet d'événements : E_k a le ballon au pas n. Notons $p_n=p(A_1,n)$, $q_n=p(A_2,n)$, $r_n=p(A_3,n)$.

Alors $p_{n+1} = p(A_{1,n+1}) = \sum_j p(A_{1,n+1} \cap A_{j,n}) = \dfrac{1}{3-1} \sum_{j \neq k} p_{j,n}$. Donc $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

ou : $\boxed{X_{n+1} = \dfrac{1}{2}.A.X_n, \quad X_n = \dfrac{1}{2^n} A^n.X_0}$ $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = J - I_3$, <u>montrons que</u> $\dfrac{1}{2^n} A^n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{2^n}\right).J + \dfrac{(-1)^n}{2^n}.I$: qui "tend vers" $\dfrac{1}{3}.J$. <u>D'où $p_n, q_n, r_n \to$</u> $\dfrac{1}{3}$: **limite attendue** !

$\boxed{\textbf{(*) Calcul de : } A^n, n \geqslant 1.}$ Déjà $J^2 = 3.J$, <u>$J^n = 3^{n-1}.J$ pour $n \geqslant 1$; **tandis que** $J^0 = I_3$</u> !

1. 1è façon (un peu artisanale et pas la plus simple) par le binôme $A^n = (J - I)^n$: on sépare donc en deux, selon : J^0 et J^i, $i \geqslant 1$. <u>(*) En général</u> $A^n = \dfrac{(3-1)^n - (-1)^n}{3} J + (-1)^n I$. <u>Exemple A^5</u> :

$$A^5 = J^5 - \binom{5}{1} J^4 + \binom{5}{2} J^3 - \binom{5}{3} J^2 + \binom{5}{4} J - I_3 = \frac{1}{3} \left(3^5 - \binom{5}{1} 3^4 + \binom{5}{2} 3^3 - \binom{5}{3} 3^2 + \binom{5}{4} 3\right) J \ldots$$

$$\ldots - I_3 = \frac{1}{3} \left(3^5 - \binom{5}{1} 3^4 + \binom{5}{2} 3^3 - \binom{5}{3} 3^2 + \binom{5}{4} 3 - 3^0\right) J + \frac{1}{3} J - I_3 = \frac{(3-1)^5 + 1}{3}.J - I_3.$$

Autres façons de calculer A^n, peut-être plus simples ! (ci-dessus, binôme).

2. Si on a une matrice facile, par exemple diagonale D, et P inversible telles que $P^{-1}AP = D$, alors $A^n = P.D^n.P^{-1}$: c'est le programme de Spé-PT.
3. Ou (Spé-PSI) avec $A^2 - A - 2.I_3 = O$, $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + p_n X + q_n$, on trouve p_n, q_n avec $X = -1,\ 2$ puis on déduit que : $A^n = O + p_n.A + q_n.I$.
4. Ou encore ici $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_{n+1} = 2.b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$. Tirer a_n de (2), reporter dans (1) $\Rightarrow$ $b_{n+2} - b_{n+1} - 2.b_n = 0$ d'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$: $b_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$...

32.4.5 (**) Limite de probabilités avec suite arithmético-géométrique

Une urne B blanche contient une proportion $0 < a < 1$ de boules noires (et $1 - a$ de bl.) ; une urne N noire contient une proportion $0 < b < 1$ de blanches ($1 - b$ de n.) On choisit une urne (probabilité p pour B), on tire une boule avec remise ; si elle a même couleur que l'Urne, on garde l'Urne, sinon on change.

- Soit $V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ où p_n est la probabilité que la n ème soit blanche. Limite de V_n en l'infini ?
- Probabilité que la n ème soit blanche si blanche au k ème tirage : $k \leqslant n$; puis $k \geqslant n$?

$\boxed{\text{Solution.}}$ Soit A_n l'événement : Au n ème tirage, on a une blanche ; <u>qui implique</u> : on est dans l'urne B, au rang $n+1$. Déjà : $p_1 = p.(1-a) + q.b$ et $p_n + q_n = 1$. Puis :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = (1-a).p_n + b.q_n, \ \forall n \geqslant 0, \text{ en posant } p_0 = p,\ q_0 = q.$$

Ainsi : $\boxed{p_{n+1} = (1-a-b).p_n + b. \quad p_n \text{ est une suite arithmético-géométrique (connue)}}$ d'où :

(...) $p_n = \dfrac{b}{a+b} + (1-a-b)^n . \left(p - \dfrac{b}{a+b}\right)$ de limite : $\dfrac{b}{a+b}$. Puis :

<u>Cas où $n \geqslant k$.</u> Ici : $V_n = M^{n-k}.V_k$ où $M = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ et $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La relation est donc analogue à la précédente et devient : $p_{n,k} = \dfrac{b}{a+b} + (1-a-b)^{n-k} . \left(1 - \dfrac{b}{a+b}\right)$ <u>pour $n \geqslant k$</u>

<u>Cas où $k \geqslant n$.</u> Cette fois : $1 = \dfrac{b}{a+b} + (1-a-b)^{k-n} . \left(p_{n,k} - \dfrac{b}{a+b}\right)$; d'où on trouve, par calcul ... $p_{n,k} = \dfrac{b}{a+b} + (1-a-b)^{n-k} . \left(1 - \dfrac{b}{a+b}\right)$ <u>pour $n \leqslant k$</u>. Même expression !

M+ **Exercices: Probabilités, généralités** **PTSI**

---

1. (Dénombrement). On lance 4 fois un dé à 6 faces. On appelle tirage cette suite de 4 lancers.
   (a) Combien a-t-on de tels tirages ?
   (b) Combien avec exactement 2 numéros différents ?
   (c) Combien avec exactement 3 numéros différents ? (1296, 210, 720).

2. (Dénombrement). On lance 3 dés (Bleu, Jaune, Rouge) à 6 faces.
   (a) Nombre total de tirages possibles ?
   (b) Nombre de tirage ayant au moins un "6" ?
   (c) Nombre de tirage ayant au moins 2 faces identiques ?
   (d) Nombre de tirage tels que la somme des 3 dés soit paire ?
   (e) Nombre de tirage vérifiant 2) et 3) ? puis 3) et 4) ? (216, 91, 96, 108, 31, 48)

3. (Probabilités) Un joueur atteint sa cible avec une probabilité de 0,04.
   Combien doit-il faire d'essais pour l'atteindre ($\geqslant 1$ fois) avec une probabilité d'au moins 0,95 ?
   Réponse : En n lancers, on résout : $1-p=(0,96)^n \leqslant 0,05$. On trouve $n \geqslant 74$.

4. (Probabilités) On dispose de deux dés : A a 4 faces rouges, 2 blanches. B : 2 rouges, 4 blanches.
   On joue toujours avec le même dé ; mais avec une probabilité $1/3$ pour A ; et $2/3$ pour B.
   (a) Probabilité d'avoir la couleur rouge au premier coup ?
   (b) On a eu 2 fois rouge (sur deux). Probabilité d'avoir rouge au 3ème ?
   (c) On a obtenu n fois rouge en n coups. Probabilité d'avoir utilisé A ?

   Réponses : (a) $p(R_1)=p(R_1|A).p(A)+p(R_1|B).p(B)=\dfrac{4}{6}.\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{6}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}\simeq 0,4444$.
   (b) On cherche $p(R_1\cap R_2\cap R_3|R_1\cap R_2)$. $p(R_1\cap R_2)=p(R_1\cap R_2|A).p(A)+p(R_1\cap R_2|B).p(B)\ ...=\dfrac{2}{9}$.
   $p(R_1\cap R_2\cap R_3)$ analogue... et vaut $\dfrac{10}{81}$. D'où la réponse : $\dfrac{5}{9}\simeq 0,5555$.
   (c) Déjà la probabilité d'avoir n rouge est (de même) $\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{2^n+2}{3^{n+1}}$ d'une part.
   Et $p(A|n-rouge)=\dfrac{p(A\cap n-rouge)}{p(n-rouge)}=\dfrac{p(R_1\cap R_2\cap ...\cap R_n|A).p(A)}{p(n-rouge)}$ (selon la formule de Bayes). Le numérateur est $\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$. D'où la probabilité $\dfrac{2^n}{2^n+2}$ (qui tend vers 1, si $n\to+\infty$).

5. (Probabilités) Une particule se déplace entre 3 points A,B,C. Si en A, elle va en B avec la prob. 0,75 ou en C avec la prob. 0,25. Si en B, elle va en A avec la prob. 0,75 ou en C avec la prob. 0,25. Si en C, elle va forcément en B. On note a_n, b_n, c_n les probabilité d'être en A,B,C au temps n.
   On considère aussi les matrices : $M=\begin{pmatrix}0 & 3/4 & 0\\ 3/4 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/4 & 0\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}12 & 3 & 1\\ 16 & -1 & -1\\ 7 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $X_{n+1}=M.X_n$.
   (b) Calculer P^{-1} (on peut s'aider d'une machine) et vérifier que $P^{-1}MP=diag(1,-1/4,-3/4)$.
   En déduire M^n puis X_n en fonction de X_0.
   (c) En déduire la limite X, quand n tend vers $+\infty$, de X_n.

Chapitre 33

Probabilités : Variables aléatoires

33.1 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

33.1.1 Définitions

1. Soit Ω un ensemble fini, muni d'une probabilité. Par exemple, avec un dé lancé 2 fois, $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$ chacun de probabilité $\dfrac{1}{36}$ si les faces sont équiprobables.
2. On définit une **application de** Ω **dans** $\mathbb{R}$ mais les notations usuelles ici sont X. Sur le cas ci-dessus, par exemple, X **est la somme des numéros pour 2 lancers** : $X(\Omega) = \{2,3,4,...12\}$.
   $p(X=2) = \dfrac{1}{36}$, $p(X=3) = \dfrac{1}{18}$, $p(X=4) = \dfrac{1}{12}$, $p(X=5) = \dfrac{1}{9}$, $p(X=6) = \dfrac{5}{36}$, $p(X=7) = \dfrac{1}{6}$,
   $p(X=8) = \dfrac{5}{36}$, $p(X=9) = \dfrac{1}{9}$, $p(X=10) = \dfrac{1}{12}$, $p(X=11) = \dfrac{1}{18}$, $p(X=12) = \dfrac{1}{36}$.
3. $\boxed{\text{Souvent}}$ $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$; on note $\{X = x_i\}$ l'ensemble $\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ avec : $p_i = p(X = x_i)$. C'est une autre probabilité : $\sum p_i = 1$. ($X \in A$ signifie $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$.)

33.1.2 Autres exemples

1. Composition foX : Sur l'exemple précédent, on peut considérer une fonction f (par exemple **un gain**) disant si la somme vaut k, le gain est $f(k)$. Par exemple avec : $f(x) = 2.x$, foX se noterait $2.X$ et son ensemble de valeurs serait : $foX(\Omega) = \{4,6,8,...,24\}$.
2. Toujours avec 2 lancers de dés, soit Y : le **minimum obtenu**. Ici, $Y(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et :
   $p(Y=1) = \dfrac{11}{36}$, $p(Y=2) = \dfrac{9}{36}$, $p(Y=3) = \dfrac{7}{36}$, $p(Y=4) = \dfrac{5}{36}$, $p(Y=5) = \dfrac{3}{36}$, $p(Y=6) = \dfrac{1}{36}$.
3. Exemple. Loi de X, rang d'apparition de la Noire : tirages sans remise dans une Urne (2 B, 1N) ?
   Solution. $X(\Omega) = \{1,2,3\}$. Puis $(X=1)$ signifie qu'on tire de suite la noire $p(X=1) = \dfrac{1}{3}$.
   $p(X=2) = p\big((B,N)\big) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. $p(X=3) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{3}$. X suit une loi uniforme sur $[[1,3]]$.

33.1.3 Couple de variables aléatoires. Indépendance

1. Définition Etant donné, deux variables aléatoires, notées ici : X, Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut définir les probabilités : $\boxed{p_{ij} = p(X = x_i \cap Y = y_j).}$ Exemple :

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$1/5$	0	$1/5$
1	$1/5$	$1/5$	$1/5$

   Ici : $p(X=0 \cap Y=1) = 1/5 \boxed{\neq} p(X=0).\,p(Y=1) = 1/5 \;.\; 3/5$.

2. Ce qu'on appelle "lois marginales", **c'est** : $p(X=-1)$, $p(X=0)$, $p(X=1)$; idem avec Y ; en général : $p_{i,\,\bullet} = p(X=x_i,\, Y \text{ quelconque}) = \sum\limits_j p_{i,j}$ et $p_{\bullet,\,j} = p(Y=y_j,\, X \text{ quelconque}) = \sum\limits_i p_{i,j}$.
3. On appelle loi **conditionnelle** de Y sachant que $X=x_i$, la donnée de : $p(Y=y_j|X=x_i) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i,\,\bullet}}$
4. $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont dites } \textbf{indépendantes} \text{ si } p(X=x_i, Y=y_j) = p(X=x_i).p(Y=y_j).}$ Se généralise ...
   Deux propriétés immédiates. **Si indépendance :** $p\left((X\in A)\cap(Y\in B)\right) = p(X\in A).\ p(Y\in B)$ et $f(X),\ g(Y)$ indépendantes. Ainsi : **X, Y indépendantes $\Rightarrow$ $a.X+b, cY+d$ indépendantes.**

33.2 Espérance, variance, écart-type.

33.2.1 Définitions

1. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i avec les probabilités p_i.
   Alors **l'espérance** mathématique vaut, par définition : $\boxed{E(X) = \sum x_i.p_i = \sum x_i.p(X=x_i).}$
2. **Exemple**. Supposons une variable aléatoire représentant la longueur de divers lancers ; soit :

Longueurs	5m.	10m.	12mètres
Effectifs :	6	9	5.

   La moyenne ou l'espérance vaut : $E(X) = \overline{X} = 9$ mètres.
3. **Variance et écart-type** (dispersion) $\boxed{V(X) = \sum (x_i - E(X))^2.\ p_i = \sum (x_i - \overline{X})^2.\ p_i}$ $\boxed{\sigma = \sqrt{V}.}$
4. **L'exemple : la variance en m^2 ; l'écart-type en mètres.** $V = 7,5\ m^2$ **;** $\sigma \simeq 2,74$ mètres.
   Note : $\boxed{V(X) = E\left([X-\overline{X}]^2\right) = E\left([X-E(X)]^2\right)}$ (Et une v.a. constante est dite "certaine".)

33.2.2 Propriétés de l'Espérance (Si $E(X)=0$, on dit v.a. "centrée")

1. Linéarité. $E(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.E(X) + \mu.E(Y)$ que X, Y soient, **ou non,** indépendantes.
   Donc $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.

   Démonstration de Ligne 1 (*). $E(\lambda.X) = \lambda.E(X)$ évident avec la définition ; **et** (intéressant) :
   $E(X+Y) = \sum\limits_{i,j}(x_i+y_j)p_{i,j} = \sum\limits_{i,j}(x_i+y_j).p_{i,j} = \sum\limits_{i,j} x_i.p_{i,j} + \sum\limits_{i,j} y_j.p_{i,j}$. Or **doubles indices** :
   $$\sum_{1\leqslant i\leqslant 2, 1\leqslant j\leqslant 3} a_i.b_j = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{i,j}\Big) = \sum_j\Big(\sum_i ...\Big) \text{ à voir !}$$
   $$\Rightarrow \sum_{i,j} x_i.p_{i,j} = \sum_i\Big(\sum_j x_i.p_{i,j}\Big) = \sum_i x_i.p_i = E(X).$$ Idem l'autre terme avec $\sum\limits_j\sum\limits_i$.
2. Croissance : $E(X) \geqslant 0$ si $X \geqslant O$ et donc (linéarité) : $X \leqslant Y \implies E(X) \leqslant E(Y)$.
3. Formule "de transfert" : $E(f(X)) = \sum f(x_i).p(X=x_i)$. En exercice.
4. Enfin $\boxed{X,\ Y \textbf{ indépendantes} \Rightarrow E(X.Y) = E(X).E(Y).}$ $p(X=x_i \cap Y=y_j) = p(X=x_i).p(Y=y_j)$.
   Démonstration : Ici, $E(X.Y) = \sum x_i.y_j.p(X=x_i \cap Y=y_j) = \sum\limits_{i,j} x_i.y_j.p(X=x_i).p(Y=y_j)$!
   (//ci-dessus) $... = \sum\limits_i x_i.p(X=x_i).E(Y) = E(Y).E(X)$. **Réciproque fausse :** à voir au I.

33.2.3 Propriétés de la Variance

1. $\boxed{\text{Si } a,\ b\in\mathbb{R},\ E(a.X+b) = a.E(X)+b.\ V(a.X+b) = a^2.V(X) \textbf{ donc } \sigma(a.X+b) = |\,a\,|\,.\,\sigma(X).}$
   Démonstration. $V(a.X+b) = \sum\left(a.x_i - a.E(X)\right)^2.\ p_i = a^2.\left(\sum (x_i - E(X))^2.\ p_i\right) = a^2.V(X)$.

2. Formule de Huyghens. $\boxed{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \textbf{ mais ici on voit mal } V(X) \geqslant 0. \text{ (cf. Ex. II.1.)}}$
Démonstration. Notons $m = E(X) = \overline{X}$; alors : $V(X) = E\left((X - \overline{X})^2\right) = E\left((X - m)^2\right) =$
$\sum (x_i - m)^2.p_i = \sum x_i^2.p_i - 2m.\sum x_i.p_i + m^2.\sum p_i = E(X^2) - 2.m.m + m^2 = E(X^2) - m^2$.
3. Covariance. On a : $V(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - \big(E(X+Y)\big)^2$ d'après la formule précédente ; d'où
$V(X+Y) = E(X^2) + E(Y^2) + 2.E(X.Y) - \big(E(X)\big)^2 - \big(E(Y)\big)^2 - 2.E(X).E(Y)$. Qui donne
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\left(E(X.Y) - E(X).E(Y)\right)$. Puis **on définit** (avec $\overline{X} = E(X)$) :
$Cov(X,Y) = E\left((X-\overline{X}).(Y-\overline{Y})\right) = E(X.Y) - \overline{X}.E(Y) - \overline{Y}.E(X) + \overline{X}.\overline{Y} = E(X.Y) - E(X).E(Y)$
donc : $\boxed{Cov(X,Y) = E\left((X-\overline{X}).(Y-\overline{Y})\right) = E(X.Y) - E(X).E(Y)\,;\quad V(X) = Cov(X,X).}$
Et $\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y) \text{ avec } X,\ Y \textbf{ indépendantes } \Rightarrow Cov(X,Y) = 0.}$
(dernière implication **déjà vue** en II.2.)

Analogie avec un produit scalaire : (forme bi-linéaire symétrique, positive ...)
Analogie $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \leftrightarrow Cov(X,Y) = E\left((X-\overline{X}).(Y-\overline{Y})\right) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$.
$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} \leftrightarrow Cov(X,X) = V(X)$ d'où : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y)$ est le Théorème d'Al-Kashi $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2.(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})$ [+ Inég. de C-S et de Minkowski !]
4. Note. $X - \overline{X}$ 'centrée' car $E\left(X - \overline{X}\right) = 0$. X, Y ind. $\Rightarrow X - \overline{X}, Y - \overline{Y}$ ind. (fin I), $Cov(X,Y) = 0$.
A nouveau et retenir : $\boxed{X,\ Y \textbf{ indépendantes } \Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y).}$

33.3 Lois de probabilités finies usuelles.

33.3.1 Loi uniforme $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$; $p(X = x_k) = 1/n$

Pour la loi uniforme sur $[[1,n]]$: $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}\ ;\quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$ Car, avec $\sum k^2$ **(donné)**
$$V(X) = E(X^2) - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = ... = \frac{n^2-1}{12}.$$

33.3.2 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ $X(\Omega) = \{0,1\}$, $p(X=1) = p$, $p(X=0) = 1 - p = q$

(Succès, échec) : $\boxed{E(X) = p\,;\ V(X) = p - p^2 = p.q.}$ (avec : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.)

Exercice. X, Y, Z sont 3 v.a. **ind.** suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$; calculer $E(X + XY + XYZ)$.
Solution Soit $U = X + XY + XYZ$. Par linéarité $E(U) = E(X) + E(XY) + E(XYZ)$; et par indépendance : $E(U) = E(X) + E(X).E(Y) + E(X)E(Y)E(Z) = p(1 + p + p^2)$.

33.3.3 Loi Binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, $X(\Omega) = [[0,n]]$, $p(X = k)$: avec les coeff. binômiaux

Théorème : Si $X_1, ..., X_n$ v.a. indépendantes suivent une Loi de Bernoulli, alors $S_n = X_1 + ... + X_n$ (Nombre de Succès en n tentatives **indépendantes**) suit une loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration. Si indépendance, $S_n = k$ signifie qu'on a choisi k X_i où $X_i = 1$; les autres : 0. **D'où**
$p(S_n = k) = \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$. $\boxed{E(S_n) = n.p\,;\quad V(S_n) = n.p.q}$ car $X,\ Y$ ind. $\Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Exercice 1. Une Urne contient 5 boules numérotées de (1) à (5). Tirons successivement avec remise 2 boules ; soit X le nombre de numéros pairs obtenus. Loi de X ? **Rép**. X suit la loi $\mathcal{B}(2,\frac{2}{5})$.

Exercice 2. Espérance, variance par calcul : Simplifier $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.x^k.y^{n-k}$ $[(x+y)^n]$; calculer $f'(x)$ $[n(x+y)^{n-1}]$; en déduire $E(X) = n.p$. Vérifier que $\sum k.(k-1).x^k.y^{n-k} = n.(n-1).x^2.(x+y)^{n-2}$ avec f'' ; en déduire $E(X^2) - E(X) = n.(n-1).p^2$ et $V(X) = E(X^2) - n^2p^2 = n.p.q$, comme ci-dessus !

33.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

33.4.1 Enoncé et démonstration

On a $\boxed{p\left(\mid X-E(X)\mid \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t^2}.V(X)}$ ou bien : $p\left(\mid X-E(X)\mid \geqslant k.\sigma(X)\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$.

Preuve. $V(X) \geqslant \sum_{|X-E(X)| \geqslant t} \left(x_i - E(X)\right)^2 .p_i \geqslant t^2.p\left(|X-E(X)| \geqslant t\right)$ et isoler le terme cherché.

33.4.2 Exemples

1. Exemple 1 : On fait divers lancers d'un dé parfait à 6 faces. Nombre de lancers à faire pour pouvoir affirmer avec une erreur $< 5/100$ que la fréquence d'apparition du 6 est dans $[\frac{1}{6}-0,01, \frac{1}{6}+0,01]$?

   $\boxed{\text{Sol.}}$ X_n, le nombre de 6 obtenus en n lancers, suit la loi : $B(n, \frac{1}{6})$. $\frac{X_n}{n}$ est la fréquence :

   $p\left(\mid \frac{X_n}{n} - \frac{1}{6} \mid \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{V(X_n/n)}{0,01^2} = \frac{10^4.n.p.q}{n^2} = \frac{5.10^4}{36.n}$. $\underline{\frac{5.10^4}{36.n} \leqslant \frac{5}{100}}$ suffit ; réalisé si $\underline{n \geqslant 27778}$.

2. Exemple 2 : On effectue $n \geqslant 1$ lancers avec une pièce équilibrée. Trouver n pour qu'on puisse affirmer avec un risque d'erreur $< 4/100$ que la fréquence des piles ne diffère pas de $1/2$ de plus de $\frac{3}{100}$.

   $\boxed{\text{Sol.}}$ X_n, nombre de piles obtenus, suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. La fréquence $F_n = X_n/n$ vérifie :

   $p(\mid F_n - \frac{1}{2} \mid \geqslant \frac{3}{100}) \leqslant \frac{10^4}{36.n}$. On veut $p(\mid F - \frac{1}{2} \mid < \frac{3}{100}) > 1 - \frac{4}{100}$. $\underline{\frac{10^4}{36.n} < \frac{4}{100}}$ suffit ; $\underline{n \geqslant 6945}$.

3. Exemple 3 : Un avion peut transporter 400 passagers. Un passager prévu fait défaut avec une probabilité de $\frac{8}{100}$. 420 réservations ont été faites. Probabilité qu'il manque des places ?

   $\boxed{\text{Sol.}}$ On étudie les désistements : on a la loi $\mathcal{B}(420; 0,08)$ d'espérance $m = 33,6$ et de variance $V = 30,912$. Si D est le nombre de désistements : $p(D \leqslant 19) = p\left((D-m) \leqslant -14,6\right)$.

   Donc : $p(D \leqslant 19) \boxed{\leqslant} p(\mid D-m \mid \geqslant 14,6) \leqslant \frac{\sigma^2}{14,6^2} \simeq 0,1450$. Probabilité inférieure à $\frac{14,5}{100}$.

33.5 Exercices corrigés

33.5.1 Une Urne a 4 boules 1B, 1N, 2R. On tire sans remise chaque boule ...

1. X rang de la B. ; Y de la 2è R. Loi de (X, Y) ? Loi marginale de X ? de Y ? de $Z = \mid X - Y \mid$?

2. Solution :

$Y \backslash X$	1	2	3	4
2	0	0	1/12	1/12
3	1/12	1/12	0	1/6
4	1/6	1/6	1/6	0

avec un arbre ! X : loi uniforme ; et :

$p(Y=2) = 1/6$; $p(Y=3) = 1/3$; $p(Y=4) = 1/2$

Loi de $Z = \mid X - Y \mid$ **temps d'attente** :

$p(Z=1) = 1/2$; $p(Z=2) = 1/3$; $p(Z=3) = 1/6$.

33.5.2 Comment trouver la loi de la somme de 2 v.a., à valeurs dans $\mathbb{N}$

$p(S=n) = \sum_k p\left((X=k) \cap (Y=n-k)\right)$. **Et si** X, Y sont indépendantes, somme de produits !

33.5.3 (*) Comment trouver la loi de $Z = minimum(X, Y)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$

Ce qui est commode $p(Z > n) = p\left((X > n) \cap (Y > n)\right)$ **puis** $p(Z = n) = p(Z > n-1) - p(Z > n)$.

33.5.4 (*) Comment trouver la loi de $Z = maximum(X, Y)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$

Idem : $p(Z \leqslant n) = p(X \leqslant n \cap Y \leqslant n)$ **puis** : $p(Z = n) = p(Z \leqslant n) - p(Z \leqslant n-1)$.

Ex. : Une Urne contient n boules numérotées 1,2, ...n. On tire 2 boules à la fois et Z=max(Numéros). Loi de Z ? **Rép.** $p(Z \leqslant k) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$ car $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2.1}$. Donc $p(Z = k) = \dfrac{2.(k-1)}{n.(n-1)}$, $2 \leqslant k \leqslant n$.

33.5.5 (*) Espérance et Variance d'une Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$

Sondage de n 'personnes' ($n \leqslant N$) dans une 'Population' de N, avec proportion p de tel caractère - ex. groupe sanguin AB - (donc $N.p \in \mathbb{N}$ au total) et q sans ce caractère (donc $N.q \in \mathbb{N}$ non groupe AB).

Soit X la v. a. donnant le nombre de 'AB' dans le sondage : $p(X = k) = \dfrac{\binom{N.p}{k} \cdot \binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

[Ex. si $N = 12$, $p = 1/3$, $N.p = 4$ AB, $N.q = 8$ non, $n = 3$, en notant $p_k = p(X = k)$:
on vérifie que : $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = (\ 1.\frac{8.7.6}{3.2.1} + 4.\frac{8.7}{2.1} + 6.8 + 4.1)\ /\ \frac{12.11.10}{3.2.1} = 1.$]

La somme de ces probabilités vaut 1, c'est normal : formule de Van Der Monde, exercice.

(L'idée, dans une grande population de 70 millions d'h, est de chercher $p = 1/3$ (?) par des tests dans des échantillons de $n = 500$ personnes par ex.) Puis $E(X)$ avec ce qui suit et le rappel :

$$\boxed{\binom{r}{k} = \frac{r}{k}.\binom{r-1}{k-1}} \quad E(X) = \sum_{k\geqslant 1} k.p(X = k) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{N.p.\binom{N.p-1}{k-1} \cdot \binom{N.q}{n-k}}{\frac{N}{n}.\binom{N-1}{n-1}} = N.p.\frac{n}{N} = n.p \ (\underline{\text{bon}}).$$

(**) Et toujours avec la formule encadrée ci-dessus et celle de Van Der Monde :

$$E(X^2) = \sum_{k\geqslant 1} k^2.p(X = k) = E(X) + \sum_{k\geqslant 2} k.(k-1).p(X = k) = n.p + \sum_{k\geqslant 2} N.p(N.p-1).\frac{\binom{N.p-2}{k-2} \cdot \binom{N.q}{n-k}}{\frac{N.(N-1)}{n.(n-1)} \binom{N-2}{n-2}}$$

$E(X^2) = n.p + N.p.(N.p-1).\dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$. D'où avec la formule de Huyghens $V(X) = n.p.q.\dfrac{N-n}{N-1}$.

33.5.6 (**) Indépendance ? (On a besoin de la somme des k^2)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, soit X son numéro. On la remet et on ajoute alors une boule numérotée X. On tire une boule dans l'urne modifiée et soit Y son numéro.

Questions : Loi de X ? de Y ? $E(X.Y)$? Conclusion ? $\boxed{\text{Réponses :}}$

1. X suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$. $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$. $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ (sera utile).

2. Puis avec un système complet d'événements évident, Y suit aussi cette loi uniforme car :
$$p(Y = i) = p(Y = i|X = i).p(X = i) + p(Y = i|X \neq i).p(X \neq i) = \frac{2}{n+1}.\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

3. Ensuite : $p(X = i \cap Y = i) = p(X = i).p(Y = i|X = i) = \dfrac{1}{n}.\dfrac{2}{n+1}$;

   et si $i \neq j$: $p(X = i \cap Y = j) = p(X = i).p(Y = j|X = i) = \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n+1}$. Donc, avec $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$

$$E(X.Y) = \sum_{1\leqslant i=j\leqslant n} i^2.\frac{2}{n(n+1)} + \sum_{i\neq j} i.j.\frac{1}{n(n+1)} = S.\frac{2}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i.j - i^2\right).\frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\frac{1}{n(n+1)}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{3n^2+7n+2}{12} \neq E(X).E(Y) : \text{ V.a. } \underline{\text{non}} \text{ indépendantes.}$$

M+ **Exercices: Variables aléatoires.** **PTSI**

1. Dans une ville, il y a une proportion p de personnes ayant un virus. Si on est en contact avec une telle personne, on a 2 chances sur 3 d'être contaminé. Un représentant rencontre n personnes.
   (a) Montrer que la variable aléatoire N : nombre de malades rencontrés suit une loi $B(n,p)$.
   (b) Montrer que la probabilité que le représentant soit contaminé est : $1-\left(1-\dfrac{2p}{3}\right)^n$.

2. Une puce fait des sauts (égaux) à Droite avec une probabilité p, ou à G. $(1-p)$.
   Au départ son abscisse vaut 0. Soit X_n l'abscisse au pas n. Loi, espérance et variance de X_n ?

   Rép. Soit S_k la v.a. de Bernoulli valant 1 si le $k$ème pas est à D, 0 sinon. Alors $D_n = \sum S_k$ $(k \leqslant n)$ suit une loi $B(n,p)$. Et $G_n = n - D_n$. Donc $X_n = 2.D_n - n$.
   D'où : $p(X_n = 2k-n) = \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$. $E(X_n) = n.(2p-1)$ et $V(X_n) = 4.n.p.q$.

3. Montrer la "formule de Van Der Monde" : $\displaystyle\sum_k \binom{n_1}{k}\cdot\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$. $(N = n_1 + n_2)$.

4. (*) Avec une matrice 3x3 (à la puissance n). On a deux casiers A et B contenant chacun 2 jetons.
   Au départ $(n=0)$, A possède les jetons 0 et 0 ; B les jetons 1 et 1.
   A chaque coup, on permute un jeton de A et un de B. Soit X_n la somme en A après n coups.
   $(X_n(\Omega) \in [[0,2]])$. On note : $a_n = p(X_n=0)$, $b_n = p(X_n = 1)$, $c_n = p(X_n = 2)$. Avec :
   (a) $p(X_{n+1} = i) = p(X_n = 0).p(X_{n+1} = i|X_n = 0) + p(X_{n+1} = i|X_n = 1) + p(X_{n+1} = i|X_n = 2)$, on a :
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} diag(0,1,\frac{-1}{2}) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$
   (b) On déduit <u>pour $n \geqslant 1$</u> : $a_n = c_n = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \to \dfrac{1}{6}$; $b_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \to \dfrac{2}{3}$.

5. (*) Indépendance ? (on a besoin des $\sum k^2$ et $\sum k^3$). Une urne contient $n-2$ boules N et 2 B. On tire successivement une boule sans remise : $X \in [[1, n-1]]$ est le numéro du tirage pour lequel la 1ère B. apparaît ; $Y \in [[2,n]]$ le numéro de la 2ème B. Loi de X ? de Y ? $E(X.Y)$? Conclure.
   (a) On a : $p(X=k) = \dfrac{(n-2).(n-3)...[(n-2)-(k-2)].2}{n(n-1)...(n-(k-1))} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
   D'où : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k.\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = ... = \frac{n+1}{3}$. Et (...)
   (b) $p(Y=k) = \dfrac{2.(k-1).(n-2).(n-3)...[(n-2)-(k-3)]}{n(n-1)...(n-(k-1))} = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$. $E(Y) = \dfrac{2(n+1)}{3}$.
   (c) Et pour $0 < i < j \leqslant n$, $p_{ij} = \dfrac{2.(n-2)(n-3)...(n-k+1)}{n(n-1)...(n-(k-1))} = \dfrac{2}{n(n-1)}$. On trouve alors :
$$E(X.Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j.\frac{j.(j-1)}{2} = ... = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} \neq E(X).E(Y). \quad \boxed{\text{Non}} \text{ ind.}$$

Chapitre 34

Compléments : Hyperboliques réciproques

34.1 Fonctions hyperboliques réciproques

34.1.1 sh^{-1}=Argsh (graphe après)

sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, C^1 et $sh' \geqslant 1$. La réciproque est $Argsh$, de dérivée $\boxed{Argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$

Ceci se voit par le Th. de dérivation des fonct. réciproques ou bien avec $\boxed{Argsh(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2}).}$
En effet
$y = sh(x) \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2y.e^x - 1 = 0$ (second degré). On trouve $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ car il faut choisir la racine positive ; d'où $x = Argsh(y) = ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

Exercice. $Argsh(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ln(x)$. Retenir $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ admet pour primitive } ln(x + \sqrt{1+x^2}) + cte.}$

34.1.2 ch^{-1}=Argch (graphe après)

ch est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$, C^1 mais $ch' > 0$ que sur $]0, +\infty[$. La réciproque est $Argch$, de dérivée $\boxed{Argch'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.}$

Ceci se voit par le Th. de dérivation des fonct. réc. ou bien avec $\boxed{Argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1}), x \geqslant 1.}$
En effet
$y = ch(x) \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2y.e^x + 1 = 0$ (second degré). On trouve $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$ et il faut choisir la racine $\geqslant 1$ [produit des racines =1], donc + ; d'où $x = Argch(y) = ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

Exercice. $Argch(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ln(x)$.

On peut retenir ici $\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ admet pour primitive sur chaque intervalle : } x < -1 \text{ ou } x > 1, \\ \qquad ln \mid x + \sqrt{x^2-1} \mid + cte, \quad cte \text{ dépendant ici de l'intervalle.}\end{array}}$

34.1.3 th^{-1}=Argth. $coth^{-1}$=Argcoth

$Argth$ définie sur $]-1, +1[$. $Argcoth$ définie hors de $[-1, +1]$.

Attention : c'est th (et non $Argth$) qui "ressemble" à $Arctan$. (Mais très différentes pour la dérivée).

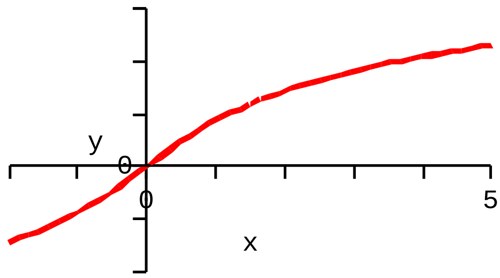
On a : $Argth(x) = \dfrac{1}{2}.ln\dfrac{1+x}{1-x}$; et : $Argcoth(x) = \dfrac{1}{2}.ln\dfrac{x+1}{x-1}$; $\boxed{\text{chacune de dérivée } \dfrac{1}{1-x^2} \ !}$
En exercice.

En sens inverse :

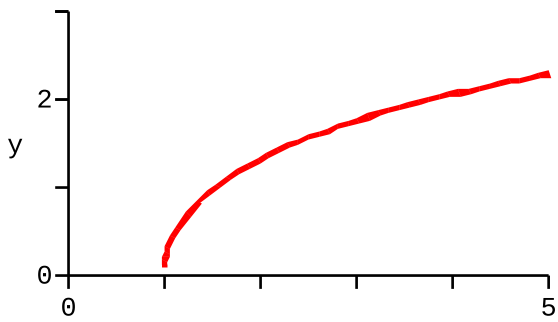
$$\boxed{\text{Si on veut une primitive de } \frac{1}{x^2-1},\ \underline{\text{décomposer en éléments simples}} \\ \text{et on trouve } \frac{-1}{2}.ln \mid \frac{x+1}{x-1} \mid +cte,\ \text{ avec } cte \text{ dépendant de l'intervalle.}}$$

34.2 Expressions logarithmiques -parfois-, dérivées et graphes.

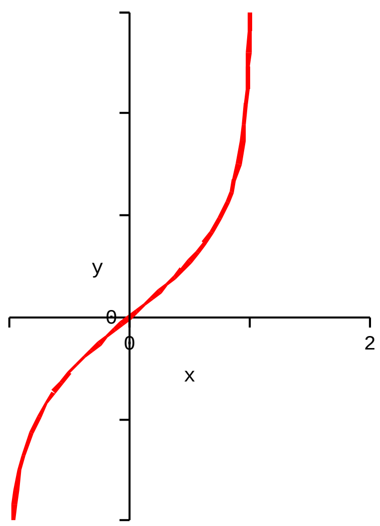
(On peut ainsi donner deux preuves des dérivées : soit avec une telle expression, soit comme dérivée de fonction réciproque)

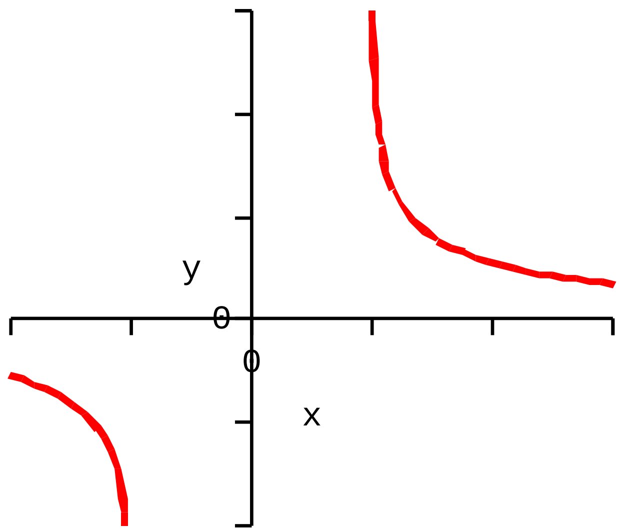


$\underline{Argsh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ de dérivée } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$



$\underline{Argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ de dérivée } \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1}$





$\underline{Argth(x) \text{ de dérivée } \frac{1}{1-x^2} \geqslant 0,\ \mid x \mid < 1}$ et $\underline{Argcoth(x) \text{ de dérivée } \frac{1}{1-x^2} \leqslant 0,\ \mid x \mid > 1.}$

Chapitre 35

Courbes en paramétriques [hors coniques]

35.1 Exemple : la tractrice

35.1.1 Domaines

Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto F(t) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} x = a[t - th(t)] \\ y = a/ch(t). \end{array} \right.$ a>0. F définie pour $t \in \mathbb{R}$ [chaque coordonnée de $M(t)$ ou composante de $\overrightarrow{OM}(t)$]. Mais en changeant t en $-t$, on a une symétrie / Oy. Domaine d'étude : $t \geqslant 0$.

35.1.2 Variations. Tableau à faire !

On a : $x'(t) = a.th^2(t)$; $y'(t) = -a.\dfrac{sh(t)}{ch^2(t)}$. Pour $t = 0$: $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(0) = \overrightarrow{0}$; on dit point stationnaire $A \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.

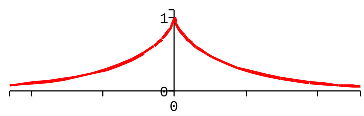
$\boxed{\text{Tangente au point stationnaire } A}$ 1ère méthode : Calcul de $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(0)$... souvent **par D.L.** cf. II-III

2ème méthode : On a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \dfrac{a.sh(t)}{ch^2(t)}.\overrightarrow{u}$ **colinéaire à** $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} sh(t) \\ -1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Alors : $\overrightarrow{u}(0) = -\overrightarrow{\jmath}$ colinéaire à $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ mais non nul en $t = 0$, **donne la tangente en** A, car :

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx}$ [dér. des f. composées] et $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ [dér. des f. réciproques] donc ici $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{sh(t)} \xrightarrow[t \to 0]{} -\infty$.

Par le th. de la limite de la dérivée, on a une tangente verticale en A.



35.1.3 Courbe ci-dessus et propriété géométrique

$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de la courbe, avec } T \text{ intersection de la tangente en } M \text{ avec } Ox, \text{ on a } MT = cte = a.}$

(D'où l'appellation de courbe tractice : $MT = a$ longueur de la barre de remorquage.)

En effet : déjà $\boxed{\text{Attention}}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \neq y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$ selon la notation usuelle précédente !

Puis :

$\dfrac{Y - y}{X - x} = \dfrac{-1}{sh(t)}$, $T[X = x + y.sh(t), Y = 0]$. $\dfrac{1}{ch^2(t)} = 1 - th^2(t)$ donne $MT^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 = a^2$.

35.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ n =2 ou 3

35.2.1 Définition [Fonction vectorielle d'une variable réelle]

$F : t \in \mathbb{R} \longmapsto F(t) = \overrightarrow{OM}(t) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (ou $\overrightarrow{a}(t)$ ou $M(t)$). Au I, c'était $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \in \mathbb{R}^2$.

35.2.2 Limites, Continuité, Dérivée 1ère (vitesse) : voir chaque composante

- Opérations et les théorèmes généraux usuels.
- Composition : $u \in \mathbb{R} \mapsto t = \varphi(u) \in \mathbb{R} \mapsto F[\varphi(u)] \in \mathbb{R}^n$ est continue si F et φ le sont : on dit que c'est un changement de "paramètre". Dérivée : $(Fo\varphi)'(u) = \varphi'(u).F'[\varphi(u)]$. (coefficient .Vecteur)
- **Remarques**

1) Pas d'égalité ses accroissements finis, seulement une inégalité vue avec les intégrales.

En effet : $e^{i\pi/2} - e^{i0} = \frac{\pi}{2}.i.e^{ic}$ est impossible avec les modules.

2) Dérivation du produit scalaire : $\frac{d}{dt}[F(t) \cdot G(t)] = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$. (Avec les composantes)

3) Dérivation du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: $\frac{d}{dt}[F(t) \wedge G(t)] = F'(t) \wedge G(t) + F(t) \wedge G'(t)$

4) $\boxed{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{MN}) = \frac{d\overrightarrow{N}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}}$ où $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM})$, $\forall A$ fixe, est le vecteur vitesse du point M.

35.2.3 Dérivées successives. Fonctions C^p, C^∞

- Analogue au cas des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à voir.
- Exemple : Vitesse et accélération en coordonnées polaires

1) D'abord étant donnée une courbe, **ne pas confondre** les coordonnées polaires ($\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}, \overrightarrow{u}_1$), avec $\overrightarrow{u}_1$ unitaire aussi, directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ [à dessiner] ; avec le repère de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, $\overrightarrow{T}$ unitaire sur la tangente, $\overrightarrow{N}$ unitaire, directement perpendiculaire sur la normale [à dessiner].
Le risque **de confusion provient des mouvements circulaires** (uniformes ou non) de centre O.

2) On a $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho(t).\overrightarrow{u}(t)}$ avec $\overrightarrow{u} = (cos[\theta(t)], sin[\theta(t)])$; d'où $\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\overrightarrow{u}_1$.

Donc $\boxed{\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_1.}$ De même ... $\boxed{\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = [\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\frac{d\theta}{dt})^2]\overrightarrow{u} + [2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}]\overrightarrow{u}_1.}$

3) En fait le 2^e [...] vaut $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\frac{d\theta}{dt})$. D'où $\boxed{\text{Mouv. à acc. centrale de centre } O \Leftrightarrow \rho^2.\frac{d\theta}{dt} = cte, \text{ loi des aires.}}$

En effet, l'aire balayée pendant dt par le rayon-vecteur est : $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\rho.\rho.d\theta = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}dt = Cte.dt$.

35.2.4 Développements limités. Formule de Taylor-Young

$$\boxed{\text{Si } F^{(p)}(t_0) \text{ existe, } \exists \overrightarrow{\epsilon}(t)/F(t) = F(t_0) + \frac{t-t_0}{1!}F'(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^p}{p!}[F^{(p)}(t_0) + \overrightarrow{\epsilon}(t)], \text{ avec } \|\overrightarrow{\epsilon}(t)\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0.}$$

Exemple "DL" au point stationnaire ($t = 0$) pour la tractrice : $t \in \mathbb{R} \mapsto F(t) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = a[t - th(t)] \\ y = a/ch(t). \end{cases}$

On a $th(t) = t - t^3/3 + t^4.\epsilon_1(t)$ donc $x = a.t^3/3 + t^4.\epsilon_1(t)$. Puis $1/(1+h) = 1 - h + h^2 + h^2.\epsilon(h)$ et $y = \frac{a}{1 + t^2/2 + t^4/24 + t^4\epsilon_2(t)} = a.(1 - \frac{t^2}{2}) + t^3\epsilon_2(t)$ qui suffit **car** $\overrightarrow{u} = F"(0)$, $\overrightarrow{v} = F'''(0)$ **non** colin. :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-a \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}.\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}.\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + t^3.\overrightarrow{\epsilon}(t) = X(t).\overrightarrow{u} + Y(t).\overrightarrow{v}, \quad X \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2!}, \ Y \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{3!}$$

Tracé (recto) : Le 1er vecteur $\neq \overrightarrow{0}$, col. à $\overrightarrow{\jmath}$, **donne** la tangente. Et $Y(t)$ **change** de signe avec t.

35.3 Courbes en paramétriques : plan affine euclidien

35.3.1 Autres exemples

• $t \in [0, 4\pi] \mapsto \begin{cases} x = R.cos(t) \\ y = -Rsin(t) \end{cases}$ est un cercle parcouru deux fois et en sens inverse.

• $u \in]-\infty, +\infty[\mapsto \begin{cases} x = R.\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = R.\dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}$ est un cercle sauf un point. ($u = tan(\theta/2)$, $\theta \in]-\pi, \pi[$).

35.3.2 Tangente

• Définition : Position limite, si elle existe, de $M_0M(t)$ quand $t \to t_0$.

• Calcul (Par la formule de T-Y) :

Si $F'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ il donne la tangente : point ordinaire. Si $F'(t_0) = \overrightarrow{0}$, on dit point "stationnaire" : en général, s'il existe un plus petit p tel que $F^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, il donne la tangente.

Remarques

1) En pratique, on peut éviter ceci : faire comme dans **Exemple I**.

2) Exercice laissé (*) $t \in]-\infty, +\infty[\mapsto \begin{cases} x = e^{-1/t^2} \\ y = t.e^{-1/t^2} \end{cases}$, après prolongement continue en O, possède quand même une tangente (horizontale) en $O(0,0)$ bien que chaque $F^{(p)}(0)$ soit $\overrightarrow{0}$.

35.3.3 Position de la courbe par rapport à la tangente

On suppose qu'il existe un plus petit p tel que $F^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$;
et qu'il existe un plus petit $q > p$ tel que $F^{(q)}(t_0)$ soit non colinéaire au précédent.

La formule de (T-Y) donne $\underline{\overrightarrow{M_0M}(t) = X(t)F^{(p)}(t_0) + Y(t)F^{(q)}(t_0)}$; $X(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$, $Y(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$

d'où 4 dessins selon la parité de p et q. **A faire :**

1) Cas usuel $p = 1, q = 2$: point régulier ; p impair, q pair : idem ($x = t,\ y = t^2$)
2) Le cas p et q impairs : inflexion (Par exemple : $x = t,\ y = t^3$)
3) p pair, q impair : rebroussement de 1ère espèce (Tractrice ; ou $x = t^2,\ y = t^3$).
4) p et q pairs : rebroussement de 2ème espèce ($x = t^2,\ y = t^4 + t^5$).

Retenir $\boxed{\text{Inflexion} \Rightarrow F'(t_0), F"(t_0) \text{ colinéaires.}}$ dét$(F'(t_0), F"(t_0))_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}} = 0$ si l'on veut.

35.3.4 Exemple classique

L'astroïde : $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x(t) = a.cos^3(t) \\ y(t) = a.sin^3(t) \end{cases}$ Fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Tout est dans le domaine d'étude

$F(t + 2\pi) = F(t)$ montre qu'un intervalle de longueur 2π donne tout ; on le centrera après !

Demi-période : $F(t + \pi) = -F(t)$ un intervalle de longueur π suffit en faisant une symétrie $/O(0,0)$.

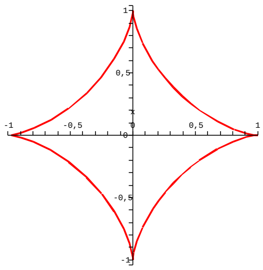
Puis $x(t + \frac{\pi}{2}) = -y(t); y(t + \frac{\pi}{2}) = x(t)$: un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$ suffit avec des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Maintenant, on va changer t en $-t$, donc on centre notre intervalle en $t = 0$: $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Le changement t en $-t$ montre que : $\mathcal{D}_e = [0, \frac{\pi}{4}]$ **suffit** en faisant de plus la symétrie $/Ox$.

Attention : on fera les symétries en sens inverse, à partit du "motif" $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Tableau de Variations sur $[0,\pi/4]$ On prend $a > 0$. $x'(t) = -3a.cos^2(t)sin(t)$; $y'(t) = 3a.sin^2(t)cos(t)$.

- Pour $t=\pi/4$, point B : on a $OB=\dfrac{a}{2}$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ colinéaire à $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
- Pour $t=0$, point stationnaire A. Tangente ? $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ est col. à $\begin{pmatrix}-cos(t)\\sin(t)\end{pmatrix}$ donc col. à $\overrightarrow{i}$, car $t=0$.



Compléments

1) Inflexions :

A partir de : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ on a : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y"(t)x'(t)-x"(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$. On retrouve que $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0 \Leftrightarrow$ (sauf si x' infini) $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt},\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$ colinéaires ; même : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ du signe de $\dfrac{y"(t)x'(t)-x"(t)y'(t)}{x'(t)}$.

2) Obtention cinématique de la courbe :

Soit K fixé sur un cercle (centre Ω, rayon $R/4$) roulant à l'intérieur du cercle (centre 0, rayon R).

On note $A(R,0)$ I le point de tangence ; t l'angle (OA,OI) ; θ l'angle $(\Omega K,\Omega I)$.

Alors si roulement sans glissement, les arcs IA et IK sont égaux à $R.t=R.\theta/4$.

Donc $\theta=4t$ et angle $(\Omega K,\Omega x)=3t$. Avec $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega K}$, on a [calcul] $\begin{pmatrix}x_K=R.cos^3(t)\\y_K=R.sin^3(t)\end{pmatrix}$.

Le point K décrit une astroïde.

35.3.5 Autre classique

La cycloïde : $\boxed{\text{Mouvement d'un point d'un cercle roulant sans glisser sur un plan}}$

Soit I le point de contact cercle-plan ; K fixé sur le cercle ; $\theta=(\Omega K,\Omega I)$:

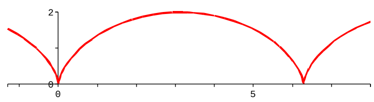
Sans glissement : $OI=$arc$OK=R.\theta$. Puis $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{I\Omega}+\overrightarrow{\Omega K}$ donne $\begin{cases}x=R[\theta-sin(\theta)]\\y=R[1-cos(\theta)]\end{cases}$

$\boxed{\text{Etude à faire.}}$

Domaine d'étude : déjà se ramener à $[0,\pi]$. Tableau ?

Tangente au point stationnaire : $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}=2.R.sin\dfrac{\theta}{2}.\begin{pmatrix}sin(\theta/2)\\cos(\theta/2)\end{pmatrix}$...

Courbe (voici une arche) :



Compléments

1) Tangente en K $\perp KI$ car I "centre instantané de rotation".

2) Aire d'une arche [cf. ch. Intégrales]

$\displaystyle\int y.dx=\int_{-\pi}^{\pi}R.[1-cos[\theta)].R.[1-cos(\theta)]d\theta=2.R^2.\int_0^{\pi}(cos^2(\theta)-2.cos(\theta)+1)d\theta$. Pour finir on linéarise : $cos^2(\theta)=\dfrac{1+cos(2\theta)}{2}$. D'où l'aire valant : $3\pi.R^2=$ 3 fois l'aire du disque.

3) Longueur d'une arche $>2.\pi R$. cf. ch. Longueur des courbes (plus tard) !

35.3.6 Cas de branches infinies

1. Déjà bien voir le numéro $\boxed{\text{Branches infinies}}$ du ch. Dév. limités.

2. $\boxed{\text{Un exemple}}$ $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 1/t^2 + t^2 \end{cases}$

   . Domaine : $\mathbb{R}^*$; pas de symétrie apparente.

   . Variations : $x' = 2(t-1)$; $y' = \dfrac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$.

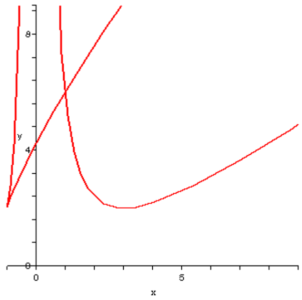
   . Points particuliers : $A(t=-1)$ tangente horizontale ; $(t=0)$ Asymptote $x=0$; $B(t=1)$ Point stationnaire et Tangente : (cf. I) dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. $C(t=2)$ intersection avec Oy.

   Branches infinies pour $t \to \pm\infty$: $y/x \to 1$; puis $y - x = 2t + 1/t^2$ tend vers $+\infty$ si $t \to +\infty$ et tend vers $-\infty$ si $t \to -\infty$: Branches paraboliques de direction $y = x$ mais pas d'asymptote.

   Point double : $\exists t \neq t'$ tels que $\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases}$ soit, après simplification par $t - t'$: $\begin{cases} t + t' = 2 \\ (tt')^2 = 1 \end{cases}$.

   Deux cas à voir : t, t' solutions de $T^2 - sT + p = 0$!

   On trouve : $t = t' = 1$ le Point stationnaire ! et $t, t' = 1 \pm\sqrt{2}$ soit $D(1, 6)$.



   (Inflexion : une recherche facultative conduit à $t = 1$.)

   Au point stationnaire : **Faire un "Dl"** (instructif) et retrouver **tangente** et **position**/tangente.

   $t = 1 + h$, $1/(1+h)^2 = 1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + h^3.\epsilon(h)$ par produit ; ou puissance -2... **A Finir.**

---

3. Exercices **complémentaires** (*)

   (a) Une courbe de Lissajoux. Note [1] $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = cos(t/3) \end{cases}$

   Réduire le domaine à $t \in [0, 3.\pi/2]$ avec des symétries.
   Pas de point stationnaire ici. Points doubles faciles par symétries.

   (b) La Cubique ("Versiera") d'Agnesi. Note [2]

   . Soit une droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à Ox et $\mathcal{D}_2$ parallèle à Oy coupées par Δ passant par O en $P \in \mathcal{D}_1$ et $Q \in \mathcal{D}_2$. Alors, si $M = Py \cap Qx$, M décrit une hyperbole équilatère.

   . Si on remplace $\mathcal{D}_1$ par le cercle passant par O et tangent à $\mathcal{D}_2$ sur Ox, M décrit la cubique d'Agnesi.

   Elle a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = a.cos^2(\theta) \\ y = a.tan(\theta) \end{cases}$ et en cartésiennes : $xy^2 = a^2(a - x)$.

---

[1] Cette famille de courbes fut étudiée par Nathaniel Bowditch en 1815, puis plus en détail par Jules Lissajous en 1857.

[2] "Cubique étudiée avant elle par Fermat, James Gregory en 1668, Huygens en 1674 ..."

"Maria-Gaetana Agnesi était d'une beauté touchante, avec sa physionomie douce et candide. Sa taille était élancée. Ses yeux noirs et se cheveux noirs faisaient ressortir l'éblouissante blancheur de son teint. Elle avait un doux sourire. On admirait sa beauté et sa grâce. A 13 ans, outre l'italien et le français, elle a appris le latin, le grec, l'hébreu, l'espagnol et l'allemand.
Son oeuvre (scientifique) principale, les "Institutions analytiques" parait en 1748, elle a alors 30 ans.
A la mort de son père, Maria entra dans l'ordre assez rigoureux des religieuses appelées Célestes ou Turquines, d'après la couleur de leur robe. Elle renonça complètement à la science humaine et devint supérieure de l'hôpital Trivulzio à Milan (où elle est née). Après avoir abandonné tous ses biens aux malades, on la vit mendier pour eux afin de "servir Dieu ainsi que le prochain". Maria Agnesi, la servante des pauvres, est morte dans son cher hôpital à 81 ans, en 1799".

M+ **Exercices: Courbes en paramétriques** **PTSI**

---

1. Tracer les courbes d'équations paramétriques suivantes :

   (a) $\begin{cases} x = a[t - th(t)] \\ y = a/ch(t). \end{cases}$ [Tractrice ou $\begin{cases} x_M = a[ln(tan(u/2)) + cos(u)] \\ y_M = a.sin(u), \quad u \in]0, \pi[. \end{cases}$ <u>Rem*</u>. $\begin{cases} x_T = a.ln(tan(u/2)) \\ y_T = 0 \end{cases}$

   et si P sym.(T/M), $\begin{cases} x_P = a[ln(tan(u/2)) + 2cos(u)] \\ y_P = 2asin(u) \end{cases}$ et sa tangente$\cap Ox \in$ Médiatr.$[PT]$ ...]

   (b) $\begin{cases} x = a.cos^3(t) \\ y = a.sin^3(t) \end{cases}$ [Astroïde]

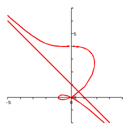
   (c) $\begin{cases} x = a[t - sin(t)] \\ y = a[1 - cos(t)] \end{cases}$ [Cycloïde]

   (d) $\begin{cases} x = a.t^2 \\ y = a.t^3 \end{cases}$ [Parabole "semi-cubique"] $\begin{cases} \text{(*) Sa courbe orthoptique -lieu des points d'où} \\ \text{l'on voit cette courbe sous un angle droit- est} \\ \text{la parabole tangente : } x = 27y^2/(4a) + 4a/27. \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x = a.t^2/(1 + t^2) \\ y = a.t^3/(1 + t^2) \end{cases}$ [Cissoïde droite]

   (f) $\begin{cases} x = a.(t^2 - 1)/(1 + t^2) \\ y = t.x \text{ (cf. ci-dessus)} \end{cases}$ [Strophoïde droite]

   (g) (*) $\begin{cases} x = 3a.t/(1 + t^3) \\ y = t.x \text{ (idem)} \end{cases}$ [Folium de Descartes. Changer t en $1/t$]

   (h) (*) Autre cubique $x = \dfrac{4t^2 - 1}{t^3 + 1}, y = t.x.$

   (i) (*) $\begin{cases} x = a.t/(1 + t^4) \\ y = a.t^3/(1 + t^4) \end{cases}$ [une Lemniscate de Bernoulli. Changer t en $1/t$]

2. (*) Tracer la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 1/t^2 \end{cases}$. Etudier
   - les branches infinies,
   - le point double,
   - et au point stationnaire, faire un développement limité suffisant pour certifier la nature du point (de rebroussement)

3. (*) Une courbe de $\mathbb{R}^3$: L'hélice circulaire (qui sera revue pour sa longueur) $\begin{cases} x = r.cos(\omega.t) \\ y = r.sin(\omega.t) \\ z = h.t. \end{cases}$

Chapitre 36

Courbes en polaires [hors coniques]

36.1 Coordonnées polaires (ρ négatif permis ici)

36.1.1 Généralités

1. Points
   Ici, le paramètre est l'angle polaire $\theta = \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}(\pi)$; de façon précise :
   Si $M \neq O$, et $\theta_1 = \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}(2\pi)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } \theta = \theta_1(2\pi), \text{ alors } \rho = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \text{soit } \theta = \theta_1 + \pi(2\pi), \text{ alors } \rho = -\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right.$ Dessin ?
   Et si $M = O$, il est repéré par θ quelconque, $\rho = 0$.
   Insistons
   Pour les courbes en coordonnées polaires, ρ n'est pas toujours $\geqslant 0$: c'est plus commode !
   Voir des exemples après [ainsi le cercle : $\rho = a.cos(\theta)$].
   Dans tous les cas

Notant $\overrightarrow{u} = [cos(\theta)]\overrightarrow{\imath} + [sin(\theta)]\overrightarrow{\jmath}$ on a : $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u}$ ou $x = \rho.cos(\theta), y = \rho.sin(\theta)$.
En sens inverse : $\rho^2 = x^2 + y^2$, $tan(\theta) = y/x$.

2. Vecteurs
   En dérivant : $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{u}_1 = [-sin(\theta)]\overrightarrow{\imath} + [cos(\theta)]\overrightarrow{\jmath} \quad \text{soit} \quad (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) = \pi/2, \quad \overrightarrow{u}_1 \text{ unitaire.}}$

3. Remarques. • Quand θ est fonction de t, $\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}.\dfrac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} \perp \overrightarrow{u}$.
   • Même en dim. 3, si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} \perp \overrightarrow{u}$ [car $\overrightarrow{u} \centerdot \overrightarrow{u} = 1$ dérivé en $\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} \centerdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \centerdot \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} = 0$].

36.1.2 Equations de droites et de cercles

1. Droites

Passant par O : θ=cte (π). Ne passant pas par O : $\rho = \dfrac{1}{Acos(\theta) + Bsin(\theta)}, (A, B) \neq (0, 0)$.

   Démonstration. $ax + by = c$, $c \neq 0$ devient $\dfrac{a}{c}.\rho.cos(\theta) + \dfrac{b}{c}.\rho.sin(\theta) = 1$. Etc.
   $\boxed{\text{Exemple}}$
   $$x.cos(\alpha) + y.sin(\alpha) = d \Leftrightarrow \rho.[cos(\theta).cos(\alpha) + sin(\theta).sin(\alpha) = d \Leftrightarrow \rho = \frac{d}{cos(\theta - \alpha)}.$$

2. Cercles

Centré en O : $\rho = cte$. [Ainsi $\rho = -1$ est le cercle trigonométrique !]
Passant par O : $\rho = 2a.cos(\theta) + 2b.sin(\theta)$. Sinon : trop compliqué en polaires !

Démonstration

$x^2+y^2-2ax-2by=0$ [O ∈Cercle] $\Leftrightarrow \rho^2-2a\rho cos(\theta)-2b\rho sin(\theta)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \ (1) \quad \text{et } (2) : \\ \rho = 2acos(\theta)+2bsin(\theta) \end{cases}$

mais O [$\rho=0$] appartient à (2) [à voir], donc inutile à rajouter !

$\boxed{\text{Exemples.}}$ Cercles d'équation : $\rho = 2a.cos(\theta)$ $\rho = 2b.sin(\theta)$ $\rho = 2r.cos(\theta-\pi/4)$.

3. **Pour retenir**
   - $\rho = \dfrac{1}{A.cos(\theta)+B.sin(\theta)}$ $(A,B)\neq(0,0)$: équation polaire d'une droite ne passant pas par O.
   - $\rho = A.cos(\theta)+B.sin(\theta)$, $(A,B)\neq(0,0)$, est l'équation d'un cercle passant par O. Ceci s'explique par l'inversion géométrique de pôle O, vue au **ch**. Applic. géométriques des Complexes.

36.2 Tracé de courbes en polaires

36.2.1 Tangentes en polaires

1. Formule. Notons $\boxed{V = (\overrightarrow{u}, \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta})(\pi) \text{ l'angle de la tangente \textbf{avec} } \overrightarrow{u}}$ $(\overrightarrow{\imath}, \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}) = \theta + V(\pi)$. Alors :

   $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u} \Rightarrow \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \dfrac{d\rho}{d\theta}\overrightarrow{u}+\rho.\overrightarrow{u}_1$: $\boxed{tan(V) = \frac{\rho}{\rho'}}$. $\boxed{\text{Si } \rho(\theta_0)=0 \begin{pmatrix}\text{passage}\\ \text{au pôle}\end{pmatrix}, \text{ la tangente est } \theta=\theta_0.}$

   Démonstration du 2ème résultat

   Ici $\rho' = d\rho/d\theta$; ce qui termine, sauf le cas où $\rho(\theta_0)=\rho'(\theta_0)=0$: laissé à l'étude.

   2 dessins pour un passage au pôle [$\rho(\theta_0)=0$] : à faire !

   . Cas où ρ passe du signe + au signe − pour θ_0 [le plus naturel].

   . Cas où ρ s'annule mais garde le signe + [point de rebroussement].

2. $\boxed{\text{Exemple : la Lemniscate de Bernoulli } \rho = a.\sqrt{cos(2\theta)}}$
   - Domaines

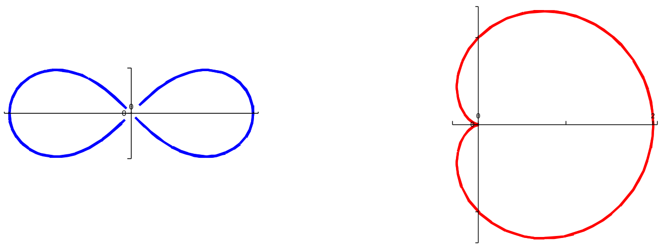
   . Domaine d'étude : $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)$: Donc un int. de longueur π suffit en faisant la symétrie $/O$.
   $\rho(\theta+\pi/2)$ ne donne rien (mais c'est bien d'essayer !)
   Choix $[-\pi/2,\pi/2]$ de longueur π car $\rho(-\theta)=\rho(\theta)$ ramère à $[0,\pi/2]$ en faisant la sym$_\perp/Ox$.

   . Domaine de définition : $\mathcal{D}_{def}\cap\mathcal{D}_{etude} = [0,\pi/4]$.
   - Tableau de signes de ρ
   On se contente d'un tableau de signe [ici, clair que ρ décroit de $a>0$ à 0, θ allant de 0 à $\pi/4$].
   - Tangentes et Courbe ci après.

   . En A $(\theta=0,\rho=a)$, $\rho'=0$ [sans calcul !] donc $tan(V)=\infty$, $V=\pi/2$: Tangente $//Oy$

   . En O $(\theta=\pi/4,\rho=0)$, tangente : $\theta=\pi/4$ soit $y=x$.

   . **Complément : point à tangente horizontale.**
   On veut $\theta+V=0(\pi)$ donc $tan(\theta)=-tan(V)$, qui donne $tan(\theta)=-cot(2\theta)$. Plusieurs façons : $cot(2\theta)=tan(\pi/2-2\theta)=-tan(2\theta-\pi/2)$ par exemple ! Trouver $\theta=\pi/6$, $\rho=a/\sqrt{2}$.

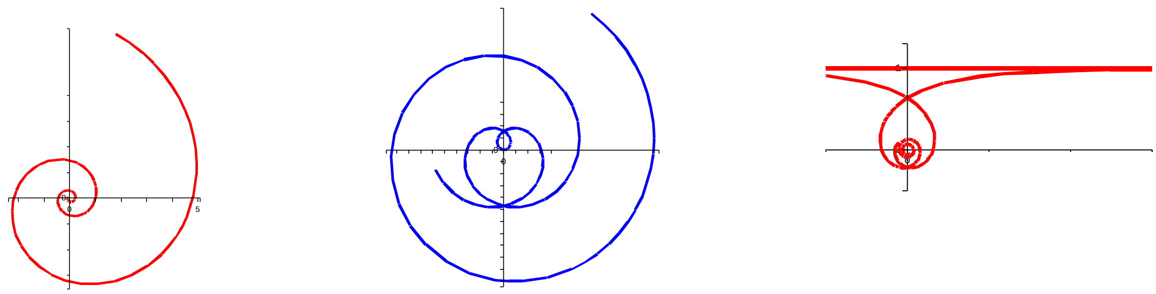


3. $\boxed{\text{Autre exemple : La Cardioïde } \rho = a[1 + cos(\theta)]}$
   - Domaine Un intervalle de longueur 2π donne tout car $\rho(\theta + 2.\pi) = \rho(\theta)$.
     Choix $[-\pi, \pi]$ car $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ ramène à $[0, \pi]$ en faisant la $\text{sym}_\perp/Ox$.
   - Tableau de signes :
     ρ varie de $2a$ (point A, $\theta = 0$) à 0 (point O, $\theta = \pi$) en passant par a (point B, $\theta = \pi/2$)
   - Tangentes et Courbe :
   . En A $(\theta = 0, \rho = 2a)$, $\rho' = 0$ [sans calcul !] donc $tanV = \infty$, donc $V = \pi/2$: Tangente $//Oy$
   . En O tangente $\theta = \pi$: $y = 0$
   . En B trouver $V = -\pi/4(\pi)$ angle fait par la tangente avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\jmath}$, ici !

36.2.2 Branches infinies

1. Dessin de la Spirale logarithmique [ou exponetielle] $\rho = ae^{m\theta}$
   . Etude pour $\theta \in \mathbb{R}$!
   . $tan(V) = cte$, $V = cte$! Un point-asymptote : le pôle.
   Note : Courbe invariante par similitude (bien choisie) de centre O.

2. Dessin de la Spirale d'Archimède $\rho = a.\theta$
   . Etude pour $\theta \in [0, +\infty[$ avec une symétrie $/Oy$ car $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$!
   . Tangente $y = 0$ au pôle. Ne pas oublier la symétrie.



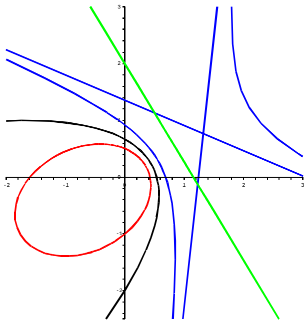
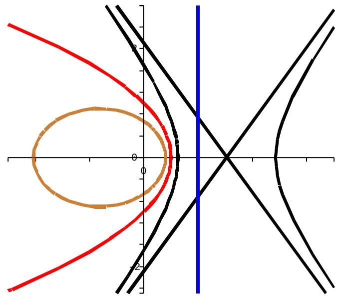
3. Dessin de la Spirale de Nicomède $\rho = a/\theta$
   . Même domaine (sauf $\theta = 0$) que Spirale d'Archimède !
   . Asymptote **en paramétriques** $\begin{cases} x = \rho(\theta).cos(\theta) \\ y = \rho(\theta).sin(\theta) \end{cases}$ $y = a$ (*) ou en **polaires** [1]
   . Dessin : sans oublier la symétrie ; le pôle, point asymptote.

4. Autres courbes classiques en polaire : surtout les coniques.
   . Théorème **d'un ch. ultérieur** . Conique avec, ici, 1 seul foyer et directrice associée :

Soit F (foyer) $\notin \mathcal{D}$ droite dite directrice. Alors $\{M : \dfrac{MF}{\delta(M, \mathcal{D})} = e\}$, $e \geqslant 0$, est une conique :
$e = 1$ Parabole ; $0 < e < 1$ Ellipse (cercle si $e \to 0$) ; $e > 1$ Hyperbole (équilatère $\Leftrightarrow e = \sqrt{2}$)
$p = e.d$ dit paramètre ; $\delta(F, \mathcal{D}) = d$ $\boxed{\text{Pour Parabole : } \delta(F, \mathcal{D}) = p \text{ ; } \delta(\text{Sommet, Foyer}) = \frac{p}{2}}$
Pour toute conique, le paramètre $p =$ longueur du "rayon-vecteur" issu de $F//\ \mathcal{D}$ directrice.

[1] Supposons que $\rho \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} \infty$. Si $\rho.sin(\theta - \theta_0) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} l$: si l finie, $Y_0 = l$ est asymptote [direction θ_0] ; si l infinie, branche parabolique. [Si pas de limite, seulement "direction asymptotique" $\theta = \theta_0$].

Démonstration
On se place dans (O, X_0, Y_0) d'angle θ_0 ; la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur OY_0 est $\overline{OH} = \rho.sin(\theta - \theta_0)$ ...
L'exemple : direction asymptotique $\theta = 0$; et asymptote $Y = a$; qui se traduit ($\theta = 0$!) par $y = a$ asymptote.

. Conséquence : Equation polaire des coniques

O est un foyer : ni centre, ni sommet ! et $\mathcal{D}$ d'équation $x.cos(\alpha)+y.sin(\alpha)=d$; une équation polaire des coniques est $\boxed{\rho=\dfrac{p}{1+e.cos(\theta-\alpha)}}$. Et $\rho=\dfrac{p}{e.cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{d}{cos(\theta-\alpha)}$ redonne $\mathcal{D}$.

Démonstration

$OM^2=\rho^2$ et $\delta^2(M,\mathcal{D})=[\rho.cos(\theta).cos(\alpha)+\rho.sin(\theta).sin(\alpha)-d]^2=[\rho.cos(\theta-\alpha)-d]^2$ conduisent à $\pm\rho=\rho.cos(\theta-\alpha)-d$. Donc : Conique $=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ $\rho_1=\dfrac{p}{1+ecos(\theta-\alpha)}$, $\rho_2=\dfrac{-p}{1-ecos(\theta-\alpha)}$.

Or $\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2$ car $\rho_2(\theta+\pi)=-\rho_1(\theta)$: $M_1(\rho_1,\theta)=M_2(\rho_2,\theta+\pi)$!

Et enfin $\mathcal{D}$: $\rho.cos(\theta)cos(\alpha)+\rho.sin(\theta)sin(\alpha)=d$. Correct ! (2ème dessin : $\alpha=0$)

Remarques

- L'intérêt (outre que les coniques sont des courbes de degré 2, les plus simples après la droite) provient de la trajectoire des planètes autour du soleil ...
- $\rho=\dfrac{a}{1+cos(\theta)}$ est une parabole (que l'on peut tracer ; et en cartésiennes : $2a.x=a^2-y^2$).

36.3 Des compléments en polaires

36.3.1 Dans le repère tournant, équation de tangente et de normale

Tangente : $Y=\dfrac{\rho}{\rho'}(X-\rho)$. Intersection avec OY : $\overline{OT}=-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$ appelé "sous-tangente polaire" $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}_1)$.

Normale : $Y=\dfrac{-\rho'}{\rho}(X-\rho)$. Intersection avec OY : $\overline{ON}=+\rho'$ appelé "sous-normale polaire".

Courbes à "sous-tangente polaire" constante ?

1) Cas $\dfrac{-\rho^2}{\rho'}=k\in\mathbb{R}^*$ on trouve $\rho=\dfrac{a}{\theta-\theta_0}$: Spirale de Nicomède à une rotation près.

2) Cas $\overline{OT}=0$, qui ne veut pas dire $\rho=0$: θ n'est pas un paramètre possible puisqu'on va voir qu'il est fixé ! $\overrightarrow{OM}=\rho(t).\overrightarrow{u}(t)\Rightarrow\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}=\dfrac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u}+\rho\dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_1$ donc col. à $\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\rho.\dfrac{d\theta}{dt}=0$ soit $\theta=\theta_0$:
Droites passant par O qui correspond à $\overline{ON}=\infty$.

3) Cas $\overline{OT}=\infty$ qui correspond à $\overline{ON}=0$; ici $\rho'=0$: Cercles de centres O.

Courbes à "sous-normale polaire" constante ?

Hors les deux cas particuliers déjà vus, il reste $\rho'=a\in\mathbb{R}^*$ ou $\rho=a(\theta-\theta_0)$: Spirale d'Archimède !

36.3.2 Etude générale

1. Le plus important est le domaine d'étude.

   • On commence par la période éventuelle, (puis la demi-période), qui fixe la longueur (et non pas le centre !) de l'intervalle d'étude. De plus les cas $T = 2m\pi$ et $T = (2m+1)\pi$ sont différents : dans celui-ci, une sym/O = rotation(O, π) est nécessaire ! A noter que $T = 2\pi.\dfrac{m}{n}$ est aussi possible.

   Des exemples : $\rho = a.cos(\dfrac{2\theta}{3})$; $\rho = a.cos(\dfrac{3\theta}{2})$; $\rho = a.cos(\dfrac{6\theta}{5})$ [6 rotations ici !]

   • Demi-période. Si $\rho(\theta + \dfrac{T}{2}) = -\rho(\theta)$, amplitude réduite à $\dfrac{T}{2}$ en faisant une rotation d'angle $\dfrac{T}{2} + \pi$.

   • Symétries éventuelles, enfin :

   $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ est une symétrie /Ox. Avant, on centrait l'intervalle en $\theta = 0$.
   $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ est une symétrie /Oy. Avant, on centrait l'intervalle en $\theta = 0$.
   $\rho(\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$ est une symétrie / Droite $\theta = \theta_0/2$. Avant, on centrait l'intervalle en $\theta_0/2$.
   $\rho(\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$ est une symétrie /Droite $\theta = \theta_0/2 + \pi/2$. Avant, on centrait l'intervalle en $\theta_0/2$.

2. Ensuite un tableau (facile) du signe de ρ suffit en général. Et $\boxed{tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'}}$ si utile.

3. Branches infinies : on sait trouver une asymptote éventuelle. Courbe.

4. Points multiples ? $\left\{ \begin{array}{c} \text{soit } \rho(\theta + k2\pi) = \rho(\theta), \\ \text{soit } \rho(\theta + \pi + k2\pi) = -\rho(\theta) \end{array} \right.$

5. Concavité(très rare) ?

   • A l'origine, la courbe est connue.

   • Si $M \neq O$, soit $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath}$; on considère le signe de $[\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}].\overrightarrow{k}$
   Cette quantité vaut par calcul : $[\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho.\rho"]$. Donc :

   si [...] > 0 : concavité tournée vers O ; si [...] < 0, convexité tournée vers O ; si [...] $= 0$, inflexion (en général). La quantité [...] sera naturellement retrouvée quand on parlera de **la courbure**.

   Question : Quelles sont les courbes telles que $\forall\theta, [...] = 0$? On s'attend à trouver les droites ne passant pas par O (car θ variable) ; y en a-t-il d'autres ? Non :

   En remarquant que $(\dfrac{1}{\rho})" + \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{[...]}{\rho^3}$, c'est facile : $(\dfrac{1}{\rho})" + \dfrac{1}{\rho} = 0$ donne $\dfrac{1}{\rho} = Acos(\theta) + Bsin(\theta)$.

36.3.3 Notes finales (toujours en compléments)

1. $\rho = a.cos(\theta)$ est un cercle passant par 0. Plus généralement $\rho = acos(\theta) + \lambda$ est une famille de courbes appelées "Limaçons de Pascal" (Etienne, père de Blaise). Etude ?

   Elles ont même ρ' que le cercle : on dit "conchoïdes de cercle par rapport à un de ses points".

2. De même les "conchoïdes de droites" $\rho = \dfrac{a}{cos(\theta)} + \lambda$.

3. Par inversion de pôle O des "Limaçons", on obtient $\rho = \dfrac{p}{1 + e.cos(\theta)}$ ce sont des coniques de foyer O [vu plus tard]. L'inverse de la parabole par rapport à son foyer est justement la cardioïde ($e = 1$).

4. Attention et à voir :

   L'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est la Lemniscate de Bernoulli !

5. (*) On appelle podaire d'une courbe par rapport à O, le lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes. Cas de la courbe $\rho = 2a.cos(\theta)$? [Cardioïde].
   Cas d'un cercle ne contenant pas O ? [Limaçons de Pascal].

M+ **Exercices: Courbes en polaires** **PTSI**

Pour les branches infinies, on peut se ramèner à des paramétriques : $\theta \mapsto \begin{cases} x = \rho(\theta).cos(\theta) \\ y = \rho(\theta).sin(\theta) \end{cases}$

1. Tracer les courbes d'équation polaire :
   (a) $\rho = a.[1 + cos(\theta)]$ [Cardioïde]

   (b) $\rho = a.\ \sqrt{cos(2\theta)}$ [Lemniscate de Bernoulli]

   (c) (*) $\rho = a.sin^2(\theta)/cos(\theta)$ [Cissoïde droite]

   (d) (*) $\rho = a.cos(2\theta)/cos(\theta)$ [Strophoïde]

   (e) (*) $\rho = a.\theta$ [Spirale d'Archimède] $\rho = a/\theta$ [de Nicomède] $\rho = a.e^{m.\theta}$ [Spirale logarithmique]

2. Tracer les courbes d'équation polaire :

   (a) $\rho = a.cos(2.\theta)$ [Trèfle ; domaine réduit à [0,π/4] !] (*) $\rho = a./cos(2.\theta)$ [Son "inverse"] ;

   (b) (*) $\rho = \dfrac{a}{\mid cos(\theta) \mid + \mid sin(\theta) \mid}$ [Jolie !] (*) $\rho = a.cos(\dfrac{2.\theta}{3})$; (*) $\rho = a.cos(\dfrac{3.\theta}{2})$.

3. (*) L'inversion géométrique (et le cours !) intervient en (a) [et (c)]

   (a) Courbes d'équation $\rho = \dfrac{1}{A.cos(\theta) + B.sin(\theta)}$ $(A, B) \neq (0, 0)$ puis $\rho = A.cos(\theta) + B.sin(\theta)$.

   (b) (*) "Coniques" : 1) $\rho = \dfrac{a}{1 + cos(\theta)}$; 2) $\rho = \dfrac{4}{2 + cos(\theta - \pi/4)}$; 3) $\rho = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}.sin(\theta)}$.

   (c) [(*) Et aussi] Courbes d'équation $\rho = \dfrac{p}{1 + e.cos(\theta)}$? et $\rho = a[cos(\theta) + \lambda]$?

Remarques. 1) Ellipse de centre O : $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{cos^2(\theta)}{a^2} + \dfrac{sin^2(\theta)}{b^2}$; d'où si on prend θ et $\theta + \dfrac{\pi}{2}$:
$\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{OH^2}$: "l'enveloppe des droites (MN) est un cercle" (Newton) !
2) Coniques passant par O : $\rho = \dfrac{2.p.cos(\theta)}{sin^2(\theta)}$; $\rho = \dfrac{2.a.b^2.cos(\theta)}{b^2.cos^2(\theta) \pm a^2.sin^2(\theta)}$.

Chapitre 37

E.v. euclidiens/Affines, affines euclidiens

Introduction : Le travail élémentaire d'une force est donné par $\delta W = \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{dl} = F.dl.cos(\alpha)$.
Plus généralement, on a dégagé les axiomes (de calcul) suivants en e.v. de dim. finie ou infinie :

37.1 Produit scalaire

37.1.1 Définitions

On appelle produit scalaire sur E e.v. **réel :** toute "forme bilinéaire symétrique définie positive".

forme signifie : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}$

bilinéaire : $\phi(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}) + \phi(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v})$; $\phi(\lambda.\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda.\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; idem $/\overrightarrow{v}$
symétrique : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
positive : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geqslant 0$ et
définie : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (réciproque évidente).

Remarques
. La linéarité $/\overrightarrow{u}$ et la symétrie entrainent la linéarité $/\overrightarrow{v}$.
. On a $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geqslant 0$; mais on peut avoir $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < 0$.
. On note $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v})$ ou $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$; $\sqrt{\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} = \|\overrightarrow{u}\|$.

37.1.2 Exemples : en dim. finie et en dim. infinie

1. Sur $\mathbb{R}^2$, avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ Note [1]

   $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' + x'y$: f.b.s. Linéarité$/\overrightarrow{u}$ car : x', y' fixés, on a $\begin{pmatrix} cte & cte \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{non}}$ positive.

2. Sur $\mathbb{R}^3$, avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\boxed{\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + yy' + zz'}$

   est un produit scalaire dit produit scalaire canonique. Valable aussi pour $\mathbb{R}^2$!

3. Dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ e.v. de dim. infinie (car contient $\mathbb{R}[x]$), maintenant :

   $\boxed{\phi(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x).\psi(x).dx}$ est un produit scalaire. "Définie" : avec un théorème du ch. Intégration, dit "des 4 hypothèses" : $(\varphi^2 \geqslant O,\ \varphi^2 \neq O,\ \varphi^2\ \underline{C^0},\ 0 < 1) \Longrightarrow \phi(\varphi, \varphi) > 0.$ [2]

[1] . $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + 1$ non linéaire $/\overrightarrow{u}$; donc n'est pas un produit scalaire. . $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x^2x'$ idem.

[2] Sur $E' = \mathcal{CM}([0,1], \mathbb{R})$ ce n'est pas un (vrai) produit scalaire, cet axiome n'étant pas satisfait. Pas trop grave ...

37.1.3 Inégalités

1. $\boxed{\text{Inégalité de Cauchy-Schwartz : } \mid \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \mid \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\text{, avec les nouvelles notations.}}$

   On va voir que c'est vrai sans utiliser ϕ "définie" ; [donc même pour les fonctions continues par morceaux : $\mid \int_0^1 \varphi(x).\psi(x).dx \mid^2 \leqslant [\int_0^1 \varphi^2(x).dx] \cdot [\int_0^1 \psi^2(x).dx]$, par exemple !]

   Démonstration

   Avec les anciennes notations : $\phi(\lambda.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\lambda.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \geqslant 0,\ \forall\lambda.$ Ou [calcul essentiel] :
   $\lambda^2.\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})+2.\lambda.\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\phi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) \geqslant 0\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$

   Cas $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})>0$; on a un trinôme du second degré et forcément $\Delta \leqslant 0$: c'est l'inégalité de C-S.
   Cas $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0$; il reste $2.\lambda.\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\phi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) \geqslant 0,\ \forall\lambda$; ce qui exige $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$. Fini.

2. $\boxed{\text{Inégalité de Minkowski : } \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \ \leqslant\ \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|\text{, avec les nouvelles notations.}}$

   Démonstration

   $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\phi(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})+2.\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\phi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2+2.(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})+\|\overrightarrow{v}\|^2$ a déjà été vu. On majore : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leqslant \mid \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \mid \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$ et c'est fini.

37.1.4 Théorème géométriques

1. Norme euclidienne.

   Définition $\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}\in E \longrightarrow N(\overrightarrow{u})\ \in\mathbb{R}^+ \text{ est appelée une norme si on a, de plus, les 3 propriétés :}\\ N(\overrightarrow{u})=0 \Rightarrow \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\ ;\quad N(\lambda.\overrightarrow{u})=\mid\lambda\mid.N(\overrightarrow{u})\ ;\quad N(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \leqslant N(\overrightarrow{u})+N(\overrightarrow{v})\end{array}}$

   Théorème $\boxed{\begin{array}{l}\|\overrightarrow{u}\| \text{ (radical du produit scalaire) est une norme; dite euclidienne car de plus on a}\\ \text{le théorème du parallélogramme : } \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2[\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2].\end{array}}$

   Démonstration

   Ce qui était difficile était l'inégalité triangulaire, appelée ici inégalité de Minkowski.

   Le théorème du parallélogramme ou de la médiane est laissé en exercice (facile).

2. Théorème d'Al Kashi ou de Pythagore généralisé

   $\boxed{\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2.(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})+\|\overrightarrow{v}\|^2}$ (déjà vu ci dessus !)

   Remarques, en plus de faire des dessins !

   - Théorèmes vrais pour tout produit scalaire, même avec celui vu en dim. infinie.
   - La norme à l'aide du produit scalaire (p.s.) : $\boxed{\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u})}.}$

   Le p. s. à l'aide de la norme ? $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2]}=\frac{1}{4}[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2].$

37.1.5 Bases orthonormées

1. Introduction. Dans $E=\mathcal{C}^0([0,2.\pi],\mathbb{R})$ soit le p.s. (facile à voir) $<\varphi,\psi>=\int_0^{2.\pi}\varphi(x).\psi(x)dx.$

   Considérons la famille $(cos(p.x),\ sin(q.x),\ p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*)$.

   Limitons-nous à, pour $p\neq p'$: $<cos(px),cos(p'x)>=\int_0^{2.\pi}\frac{1}{2}[cos(p+p')x+cos(p-p')x]dx=...=0$;
   on dit que la famille infinie, ici des $(cos(px))$ est orthogonale pour ce p.s.

   Définition $\boxed{(\overrightarrow{u}_1,...,\overrightarrow{u}_k,...) \text{ est dite orthogonale si } \overrightarrow{u}_i\cdot\overrightarrow{u}_j=0 \text{ pour } i\neq j\ ; \text{ normée si } \forall i, \|\overrightarrow{u}_i\|=1.}$

2. **Intérêts d'une base o.n. :** on suppose être en dim. finie, quitte à se placer dans un s.e.v.

   Soit $\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}$ une base orthonormée de E, muni d'un p.s. Alors :

- Si $\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i.\overrightarrow{e_i}$, $\overrightarrow{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i.\overrightarrow{e_i}$, le p.s. $\boxed{\overrightarrow{x}\,.\,\overrightarrow{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i.y_i}$ la norme $\boxed{\|\overrightarrow{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.}$
- Si $\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i.\overrightarrow{e_i}$, on a $\boxed{x_i=\overrightarrow{x}\,.\,\overrightarrow{e_i}}$: composantes de $\overrightarrow{x}$ obtenu avec le p.s. Toutefois :

Si la base est seulement orthogonale $(\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n})$, et $\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{a_i}$, alors : $\boxed{\alpha_i=\dfrac{\overrightarrow{x}\,.\,\overrightarrow{a_i}}{\|\overrightarrow{a_i}\|^2}.}$

3. Théorème: Dans tout e.v. euclidien : **e.v. : réel et dim. finie muni d'un p.s.,** il existe une base orthonormée. (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt par exemple.)

Démonstration (*) On se limite à un exemple en dim. 3 avec une base initiale $\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}$.

Pour $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, soit $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=xx'-xy'-x'y+2yy'-2yz'-2y'z+2xz'+2x'z+8zz'$.

- ϕ est un produit scalaire. Forme : évident ; Linéarité/$\overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{u}\mapsto\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{pmatrix}cte & cte & cte\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

Symétrie facile ; Définie positive : $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=(x-y+2z)^2+y^2+4z^2$; $[\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0\Rightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}]$.

- Pourquoi n'a-t-on pas la forme $xx'+yy'+zz'$? Car :

la base canonique $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\jmath}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'est pas orthonormée pour $\boxed{\text{ce}}$ produit scalaire.

- On va donc construire une b.o.n. Procédé de Schmidt : on pose

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\imath}; & \text{puis :}\\ \overrightarrow{b}=\lambda.\overrightarrow{a}+\overrightarrow{\jmath}; & \text{et :}\qquad \overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\in Vect(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) : \text{générateurs ; donc nouvelle base !}\\ \overrightarrow{c}=\mu.\overrightarrow{a}+\nu.\overrightarrow{b}+\overrightarrow{k}\end{cases}$$

On orthogonalise au fur et à mesure et on se sert du travail déjà fait comme suit :

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=0\Leftrightarrow\lambda.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})+\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{\jmath})=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\lambda=1.$

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}\Leftrightarrow\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})=0\Leftrightarrow\mu.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})+\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{k})=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\mu=-2.$

$\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}\Leftrightarrow\phi(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0\Leftrightarrow\nu.\phi(\overrightarrow{b},\overrightarrow{b})+\phi(\overrightarrow{b},\overrightarrow{k})=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\nu=0.$

Enfin, on normalise pour $\boxed{\text{ce}}$ produit scalaire : [ainsi $\|\overrightarrow{b}\|_\phi^2=1$!]

$\overrightarrow{I}=\dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}}$, $\overrightarrow{J}=\dfrac{\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}}$, $\overrightarrow{K}=\dfrac{\overrightarrow{c}}{\|\overrightarrow{c}\|}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}}$ est o.n. D'où,

si $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}_{\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}_{\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}}$: $\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=XX'+YY'+ZZ'$. Et $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$.

Complément [3]

[3] D'autres produits scalaires (*Spé)

. Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vérifier que $Tr({}^tA.B)=<A,B>$ est un produit scalaire. Préciser $(I_2)^\perp$. Vérifier encore que les sous e.v. des matrices sym. et antisymétriques sont orthogonaux. (Idem dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

. Sur $E=\mathbb{R}_n[x]$ de dim. $n+1$, avec a_i réels distincts et le p.s. $\phi(P,Q)=<P,Q>=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i)$ ["défini" car un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ nul en $(n+1)$ valeurs est identiquement nul], une base o.n. est constituée des polynômes d'interpolation de Lagrange signalés en compléments au ch. Déterminants.

. En e.v. de dim. infinie, on a divers produits scalaires (avec des intégrales : $\phi(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx$ par ex. sur $E=\mathbb{R}[x]$, qui donne des polynômes "orthogonaux" classiques : Polynômes de Legendre, ici)

37.2 Projections et symétries orthogonales

37.2.1 Orthogonal d'une partie

Définition Pour A une partie quelconque de E $\boxed{A^{\perp} = \{\vec{x} \in E : \forall \vec{a} \in A, \vec{x} \perp \vec{a}\}}$ $\begin{pmatrix}\text{Vecteurs orthogonaux} \\ \text{à tout vecteur de } A.\end{pmatrix}$

Propriété $\boxed{A^{\perp} \text{ est toujours un sous e.v. et } A^{\perp} = (Vect A)^{\perp}\,;\ \{\vec{0}\}^{\perp} = E\,;\ E^{\perp} = \{\vec{0}\};\ \ \vec{u}^{\perp} = Vect(\vec{u})^{\perp}.}$

Facile en exercice (pour $E^{\perp}$: si $\vec{x} \in E^{\perp}$, $\vec{x}$ est orthogonal à tout vecteur, donc à lui-même : $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$...)

37.2.2 Projection orthogonale sur un sous e.v. de dim. finie

Théorème $\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } E \text{ de dim. quelconque et } E_1 \text{ un sous e.v. de dim. finie. Alors } E = E_1 \oplus E_1^{\perp}. \\ \text{Par suite, la proj. sur } E_1 \ // \ E_1^{\perp} \text{ est appelée proj. orthogonale ; la symétrie de même.}\end{array}}$

Démonstration intéressante

1) $E_1 \cap E_1^{\perp} = \{\vec{0}\}$ est vrai même si $dim(E_1) = +\infty$: $\vec{x} \in E_1 \cap E_1^{\perp} \Longrightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} = 0$. Donc $\vec{x} = \vec{0}$.

2) $E \subset E_1 + E_1^{\perp}$ pas toujours vrai si $dim E_1 = +\infty$! Si $dim(E_1)$ finie : soit $\vec{e_1}, ..., \vec{e_r}$ une base orthonormée de E_1 (existe : Schmidt) ; pour $\vec{x} \in E$, posons $\vec{x}_1 = (\vec{x} \cdot \vec{e_1}).\vec{e_1} + ... + (\vec{x} \cdot \vec{e_r}).\vec{e_r} \in E_1$ [choix malin !]
Voyons que $\vec{x} - \vec{x}_1 \in E_1^{\perp}$ ou $(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{e_k} = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant r$; [celà finira, car alors $\vec{x} = \vec{x}_1 + (\vec{x} - \vec{x}_1)$]
Or : si $\vec{x}_1 = \alpha_1.\vec{e}_1 + ... + \alpha_r.\vec{e_r}$, alors $\vec{x}_1 \cdot \vec{e_k} = \alpha_k$; donc ici : $\vec{x}_1 \cdot \vec{e_k} = \vec{x} \cdot \vec{e_k}$; d'où $(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{e_k} = 0$.

$\boxed{\text{Remarques}}$

- Si on a seulement une base orthogonale de E_1, $(\vec{a_1}, ..., \vec{a_r})$, alors $\boxed{\vec{x_1} = p(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|^2}.\vec{a_1} + ... + \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{a_r}}{\|\vec{a_r}\|^2}.\vec{a_r}}$

  en particulier, la projection orthogonale sur $Vect(\vec{u})$ est telle que : $\boxed{p(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x} \cdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}.}$

- Soit $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$. Alors $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2$. Pourquoi ? Dessin ?

Et $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ est la symétrie orthogonale qui vérifie donc $\boxed{\|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \text{ : conserve la norme.}}$
Tandis que pour $p = proj._{\perp}$: $\|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$. $[Id + s = 2p]$

37.2.3 Exemple dans $E = \mathbb{R}^3$, avec base canonique o.n.

$\boxed{\text{Expression de la symétrie orthogonale (matrice } M\text{) / plan } \Pi \text{ d'équation } 2x - 3y + z = 0.}$

Solution : D'abord, si la base est orthonormée, $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \Pi : ax + by + z = 0.}$ Ici $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis si q est la $proj._{\perp}$ sur $Vect(\vec{n}) = \Pi^{\perp}$, alors

$$\vec{x} : X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto q(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}.\vec{n} = \frac{1}{14}.(2x - 3y + z).\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A.X.$$

On aurait pu aussi trouver la matrice A par colonnes en faisant $q(\vec{i})$, etc [laissé]. Et si s est la symétrie cherchée, on a (dessin) : $\vec{x} - s(\vec{x}) = 2.q(\vec{x})$; d'où : $M = I_3 - 2A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. **cf. ch.25.**

$\boxed{\text{Vérifications}}$ $Tr(A) = rg(A) = 1$ (proj.) $M.M = I_3$ et $Tr(M) = +1$, dét$(M) = -1$ (pourquoi ?)
Enfin on va voir au III que ${}^tM.M = I_3$ était attendu, qui donne ${}^tM = M^{-1}$. Avec $M^{-1} = M$ ici, on a expliqué **que** ${}^tM = M$ **ou bien que** M **soit symétrique ;** et **donc** A **aussi** car : $A = \dfrac{1}{2}(I_3 - M)$.

(Rappel : une **symétrie orthogonale conserve la norme** de tout vecteur, pas une projection)

37.3 Automorphismes orthogonaux. Changements de bases o.n. (ch.25)

37.4 Espaces affines

37.4.1 Généralités

1. Définition $\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{E} \neq \emptyset\text{, dont les éléments sont appelés points, est un e.a. attaché à un e.v. } E \text{ si :}\\ \text{. Quand on choisit une origine } O \in \mathcal{E}\text{, on a la bijection : } M \in \mathcal{E}_O \longmapsto \overrightarrow{OM} \in E;\\ \text{. Les changements d'origine se faisant par la relation de Châsles : } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.\end{array}}$

   Ainsi
   - Dans un espace vectoriel (e.v.), il y a un élément particulier, à savoir : $\overrightarrow{0}$.
   - Un espace affine-muni-d'une-origine $\mathcal{E}_A$ est "identique" à un e.v. ; mais justement : on n'est pas obligé de choisir une origine ! dans un e.a., tous les points jouent le même rôle : homogénéïté.

2. Translations : Soit $\overrightarrow{u} \in E$. $\boxed{\forall M \in \mathcal{E}, \exists M' \in \mathcal{E} : \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}\text{ ; noté aussi } M' = M + \overrightarrow{u}}$
   d'après la bijection. On dit que $M \longmapsto M'$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des translations muni de la composition } (\mathcal{T}, o) \text{ est un groupe abélien comme } (E, +)}$

   Au lieu de dire "comme", on peut dire "isomorphe à" (sans importance).
   Simplement comprendre que composer 2 translations, c'est additionner 2 vecteurs.

3. Exemple usuel : $\boxed{\mathcal{E} = \mathbb{R}^3 \text{ est un e.affine attaché à l'e.v. } E = \mathbb{R}^3.}$ $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère de $\mathcal{E}$ si $O \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ base de E. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$: point **ou** vecteur $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}, ... \in E$. Chang. de repère : cf. Ex.

37.4.2 Sous espace affine

1. Définition $\boxed{\begin{array}{l}\text{Un sous e.a. } \mathcal{E}_1 \text{ est défini par la donnée de : } A \in \mathcal{E} \text{ et d'un sous e.v. } E_1 \text{ de } E \text{ selon}\\ \boxed{M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in E_1} \text{ ou } \boxed{M = A + \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \in E_1}\ A \in \mathcal{E}_1 \neq \emptyset.\ E_1 \text{ : direction de } \mathcal{E}_1.\end{array}}$

   Dessin dans $\mathbb{R}^2$: $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ avec $E_1 = \Delta = Vect(\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$? On a des droites parallèles **affines** $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}'_1$ passant par A, B. Attention : Pas de parallélisme avec des sous e.v. !

2. Les sous e.a. de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ sont : **les points, les droites affines, plans affines et $\mathcal{E}$.** Notes [4]

37.5 Applications affines (cf. ch 25)

37.5.1 Définition

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } \mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ deux e.a. associés aux e.v. } E.F. \quad f : M \in \mathcal{E} \to M' \in \mathcal{F} \text{ est dite affine s'il existe une A.L.,}\\ \text{forcément unique notée } \overrightarrow{f} \text{ (changement de notation pour les A.L.) : } \boxed{\forall O, M, \ \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})}\end{array}}$

Remarques

. Au lieu de dire "$\forall O, M$ ...", il est équivalent de dire "$\forall M$", O fixé. En effet :
  Si $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ pour $O \in \mathcal{E}$ fixé, alors $\overrightarrow{O'I'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OI})$; par différence $\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}), \forall I, M$.

. **Cas** $\overrightarrow{f} = \mathbf{0} \in \mathcal{L}(E, F)$ **:** $M' = O'$ **soit** $f =$ **Cte.** Peu d'intérêt géométrique. On préfère f bijective.

. On peut écrire au choix $\boxed{M' = O' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})}$ ou $\boxed{f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).}$ ($\mathcal{F}$ d'origine Ω.)

37.5.2 Expression d'une application affine

Théorème $\boxed{\textbf{En dimensions finies, } p \text{ pour } \mathcal{E}, n \text{ pour } \mathcal{F}, \text{ on a } \textbf{l'écriture matricielle } Y = A.X + B.}$

Démonstration. Résulte de ce qui précède.

---

[4] . L'intersection de 2 sous e.a. est ou bien $\emptyset$ ou bien un sous e.a. de direction $E_1 \cap E_2$.

. Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, quelles sont (dessiner) les intersections du tétraèdre $ABCD$, avec le plan (MNP), où : $M \in [A, B]$; $N \in [B, C]$; $P \in [C, D]$? [Facultatif et indication : considérer $MN \cap AC$].

37.5.3 Exemples dans le cas $\mathcal{F} = \mathcal{E}$

1. $\boxed{\text{Homothéties affines et Translations, donc } \mathcal{F} = \mathcal{E}}$ mais dimension quelconque

On a $\overrightarrow{f} = Id_E \Leftrightarrow f$ **translation.** Et **si** $k \notin \{0,1\}$ **:** $\overrightarrow{f} = k.Id_E \Leftrightarrow f$ **homothétie affine** de rapport k, de centre l'unique point fixe. En particulier : $\overrightarrow{f} = -Id \Leftrightarrow f$ symétrie-point.

2. Cas d'un point fixe (au moins), donc $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ (dimension quelconque)

Une application affine est, en général, plus compliquée que l'A.L. associée ;
(penser, en dim. finie, à : $Y = A.X$ **et à :** $Y = A.X + B$**). Mais :**
si f a au moins un point fixe I en prenant I pour origine, $\overrightarrow{f}$ et f ont même expression
$\overrightarrow{f} : \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ $\quad f : \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM})$; f n'est ici pas plus compliquée, seul le langage change.

3. $\boxed{\text{Autres exemples dans } \mathcal{E} = \mathbb{R}^3}$ [La lettre P est réservée pour un point. A pour une matrice ...]

- Soit $\mathcal{P}$ un plan affine contenant un point I ; $\overrightarrow{w}$ un vecteur qui n'est pas dans la direction Π de $\mathcal{P}$; c'est-à-dire la droite affine $\mathcal{D} = (I, \overrightarrow{w})$ non incluse dans $\mathcal{P}$; ou encore : si $ax + by + cz = d$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est une équation de $\mathcal{P}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, alors : $ax + by + cz = 0$ de Π dans $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath} + \gamma\overrightarrow{k}$ ne vérifie pas l'équation de Π : $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Attention : Dire $\overrightarrow{w} \in \mathcal{P}$ ou dire $\overrightarrow{w} \notin \mathcal{P}$ sont tous deux absurdes. $\boxed{\text{Dessin ?}}$

L'application $q : M \mapsto Q$ où $Q \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'//\mathcal{D}$ passant par M, est affine, appelée projection oblique sur $\mathcal{P}$ de direction $\Delta = Vect(\overrightarrow{w})$, d'endomorphisme associé $\overrightarrow{q}$ proj. vect sur Π de dir. Δ.

- Si enfin $\overrightarrow{QM"} = k.\overrightarrow{QM}$, $k \neq 0$, $f_k : M \mapsto M"$ est dite "dilatation affine ou affinité" de base $\mathcal{P}$, de direction Δ, de rapport k. $\boxed{\text{Questions}}$ Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ base de Π, matrice de $\overrightarrow{f_k}$ dans $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?

37.5.4 Propriétés générales des applications affines : ch. 25

37.6 Espaces affines euclidiens

37.6.1 Généralités

1. Définitions $\mathcal{E}$ est un e.a.e. si l'e.v. associé E, est euclidien (p.s. et dim. finie) ; distances, angles.

2. **Isométries affines** f est une isométrie affine de $\mathcal{E}$, $[f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ (groupe)] si l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle de E : $\overrightarrow{f} \in \mathbb{O}(E)$ (groupe).

3. $\boxed{\text{Non}}$ **isométrie, mais connu**

- $\overrightarrow{f} \in \{k.Id_E, k \neq 0\}$ (gr. abélien des hom. vect.) $\quad\Leftrightarrow\quad f \in \{$Homothéties-Translations de $\mathcal{E}\}$ (groupe **non abélien** pour les homothéties-affines et translations !)
- $\overrightarrow{f} = k.(\overrightarrow{\text{isométrie vect.}})$ [on dit similitude vectorielle] $\quad\Leftrightarrow\quad f$: similitude affine de $\mathcal{E}$.

Similitudes vectorielles/et affines **en dimension 2**

– En **vect.** Matr. de $\overrightarrow{f}$ en base o.n. $r.\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ ou $r.\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$

On peut aussi utiliser **les complexes** $z \mapsto z' = r.e^{i\alpha}.z$ **ou** $z \mapsto z' = r.e^{i\alpha}.\overline{z}$.

– $\boxed{\text{En affine}}$ $z \mapsto z' = r.e^{i\alpha}.z + Cte$ (similit. directes) ou $z \mapsto z' = r.e^{i\alpha}.\overline{z} + Cte$ (indirectes).

37.6.2 Projection et symétrie affines orthogonales, dans $\mathcal{E}_3 = \mathbb{R}^3$

Exercice (*) Soit $\mathcal{P}$, le plan affine : $ax + by + cz = d$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, de direction $\Pi : a.x + b.y + c.z = 0$. Expression de $q : M \mapsto Q = M'$, projection orthogonale sur $\mathcal{P}$?

. On cherche 12 coefficients : $Q = M' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$. Notons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \Pi$ ou $\mathcal{P}$;

et $f^*(M) = ax + by + cz - d$. [La lettre f étant gardée pour une application affine $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$].

. Posant $\boxed{\overrightarrow{QM} = \lambda.\overrightarrow{n}}$ (1), on passe de 12 à 1 inconnue : λ_M. Reste à exprimer que $\boxed{M' = Q \in \mathcal{P}}$ (2). Dessin ?

$\boxed{\text{Cherchons } \lambda}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **et** $ax' + by' + cz' = d$: $\underline{ax + by + cz - d = \lambda.(a^2 + b^2 + c^2)}$ [5]

. En reportant $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}(ax + by + cz - d). \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'où la réponse $Y = A.X + B$

ou bien : $$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.}$$

Vérifications. Remarques.
1) A : est la matrice de $\overrightarrow{q}$ proj. vect. associée : $\underline{rg(\overrightarrow{q}) = Tr(\overrightarrow{q}) = 2}$ (vérification) et $\overrightarrow{q}\, o \,\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}$.

2) B : $X = 0$ (soit O) a pour image O' ; $\underline{B = \overrightarrow{OO'} = \mu.\overrightarrow{n}}$; et $\overrightarrow{O'O} \centerdot \overrightarrow{n} = f^*(O) = -d \Rightarrow \mu = \dfrac{d}{[...]}$.

3) Si $d = 0$, ce n'est rien d'autre qu'une projection orthogonale en espace vectoriel : endomorphisme.

4) Si on voulait la symétrie orthogonale / $\mathcal{P}$, il suffit de dire $\overrightarrow{M"M} = 2.\lambda.\overrightarrow{n}$, avec le même λ : fini.

5) Au passage soit σ cette cette symétrie ; $\overrightarrow{\sigma} + Id = 2.\overrightarrow{q}$ conserve la norme ; comme $\overrightarrow{\sigma}$ est une symétrie orthogonale, sa matrice est symétrique : $\underline{S = S^{-1} = {}^tS}$; donc $A = \dfrac{1}{2}(I_3 + S)$ est symétrique !

6) Si $I \in \mathcal{P}$, la proj. orth. p de M sur $\mathcal{D}(I, \overrightarrow{n})$ est aisée : $\overrightarrow{IP} = \lambda.\overrightarrow{n}$. $(\overrightarrow{p} = 1/({}^tN.N).(N.{}^tN) = Id - \overrightarrow{q})$.

• $\boxed{\text{Retenir}}$ $\boxed{\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \mathcal{P}}$ et les égalités : $\underline{\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{IP} = \dfrac{(\overrightarrow{IM} \centerdot \overrightarrow{n})}{\|\overrightarrow{n}\|^2}.\overrightarrow{n} = \dfrac{f^*(M)}{\|\overrightarrow{n}\|^2}.\overrightarrow{n}}$.

• Elles redonnent la $\boxed{\text{distance de } M_1 \text{ à } \mathcal{P} : \delta(M_1, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{QM_1}\| = \dfrac{| f^*(M_1) |}{\|\overrightarrow{n}\|} = \dfrac{| ax_1 + by_1 + cz_1 - d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

• Si, plus généralement, $\overrightarrow{QM''} = k.\overrightarrow{QM}, k \neq 0$ fixe, $M \mapsto M''$ est appelée dilatation affine, orthogonale ...

37.7 Isométries affines en espace affine euclidien : ch.25

37.8 (*) Exercice : dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, projection affine générale oblique !

Soit $\mathcal{P}$ plan affine $ax + by + cz = d$ $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; $\underline{\overrightarrow{w} \notin \Pi, \text{ où } \Pi \text{ direction de } \mathcal{P}}$: $\underline{a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0}$. Expression de $q : M \mapsto Q = M'$, projection oblique sur $\mathcal{P}$ de direction $\Delta = Vect(\overrightarrow{w})$.

On trouve : $$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a.\alpha + b.\beta + c.\gamma} \begin{pmatrix} b\beta + c\gamma & -b\alpha & -c\alpha \\ -a\beta & a\alpha + c\gamma & -c\beta \\ -a\gamma & -b\gamma & a\alpha + b\beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{d}{a.\alpha + b.\beta + c.\gamma} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.}$$

Vérifications. Remarques.
1) A : est la matrice de $\overrightarrow{q}$ proj. vect. associée ...
2) B : $X = 0$ (soit O) a pour image O' ; $B = \overrightarrow{OO'} = \mu.\overrightarrow{w}$ [et $\overrightarrow{O'O} \centerdot \overrightarrow{n} = f^*(O) = -d$ donnent $\mu = \dfrac{d}{[...]}$)

---

[5] ou : cf Notes ; ou : on a vu (ch. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) $\boxed{\overrightarrow{M_0M} \centerdot \overrightarrow{n} = f^*(M), \ \forall M_0 \in \mathcal{P}.}$ Puis $M_0 = Q = M'$... : même λ.

M+ **Exercices: E.v.euclidiens/affines euclidiens (cf. ch 25)** **PTSI**

---

1. Angles dans $\mathbb{R}^3$ e.v.e. : (a) Avec la relation $dim(\Pi_1+\Pi_2) = dim(\Pi_1)+dim(\Pi_2) - dim(\Pi_1 \cap \Pi_2)$, montrer que pour Π_1, Π_2, plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $\Pi_1 = \Pi_2$; ou $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Delta$ droite vectorielle.
 (b) Angle des plans $x - 3y + z = 0$, $x + y + z = 0$? [penser à des vecteurs orthogonaux et dessin.]
 (c) Soit $\Delta' = Vect(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$ (base o.n.). Angle approximatif de Δ' et de Π_2 ?
2. Montrer qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls (même infinie) est toujours libre.
3. (a) Montrer l'inégalité $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2 \leqslant n.\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ où $a_i \in \mathbb{R}$ (comme cas d'inégalité de Cauchy-Schwartz).
 (b) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale (de vecteurs colonnes $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$: nouvelle base o.n.).
 Avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + ... + \overrightarrow{v}_n$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + ... + \overrightarrow{e_n}$ ($\overrightarrow{e_k}$: ancienne base o.n.) montrer : $(\sum\limits_{i,j} a_{ij})^2 \leqslant n^2$.
4. (a) En e.v.e., rappeler l'expression (du cours) de $p(\overrightarrow{x})$, $p = proj._{\perp}$ sur $Vect(\overrightarrow{u})$. Maintenant :
 (b) Dans $\mathbb{R}^3$, si $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath} + \gamma\overrightarrow{k}$ en base o.n., vérifier que la matrice de p est alors $\dfrac{1}{{}^tU.U}(U.{}^tU)$
5. (*) En e.v.e., montrer, plus généralement, que la projection oblique sur $Vect(\overrightarrow{v})$ parallèlement à $\overrightarrow{u}^{\perp}$ est : $p(\overrightarrow{x}) = \dfrac{(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})}{(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})}.\overrightarrow{v}$ [où $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) \neq 0$ donc $Vect(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}^{\perp}$ supplémentaires].
6. (*) Dans $\mathbb{R}^3$ e.v. e. orienté. (a) Montrer : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}).(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{t}) - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{t}).(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$.
 (b) Puis $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}).\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).\overrightarrow{t} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}).\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}).\overrightarrow{u}$.
 Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ libres, composantes de $\overrightarrow{t}$? [Formules de Cramer reconnues, dans ce cas.]

---

7. Chang. de repères en dim finie pour un point. (a) Commenter les formules $X = P.X'$ et $X - X_0 = X'$.
 (b) Montrer le cas général $\boxed{X - X_0 = P.X'}$ (Changer d' origine ; puis de vecteurs de base).
8. (*) Lien : points fixes de f–Vecteurs invariants de $\overrightarrow{f}$. Cas où $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ (donc $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$).
 Notons $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points fixes.
 Vérifier : $M' = M \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{f} - Id)(\overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{OO'}$. $(**)$
 Donc : soit $\mathcal{E}_1 = \emptyset$; soit sous espace affine de direction Ker $(\overrightarrow{f} - Id)$. Exemples ?
9. (*) Préciser les antidéplacements de $\mathbb{R}^2$? $[z' = e^{i.\theta}.\overline{z} + b]$
 Solution. on sait que $\overrightarrow{f}$ est une sym$_{\perp}/y = x.tan(\theta/2)$. Soit $\overrightarrow{I}$ sur cette droite vect. et $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ o.n.
 Dans ce repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ on a $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$: $X' = X + \alpha$; $\dfrac{Y + Y'}{2} = \dfrac{\beta}{2}$.
 Si $\alpha = 0$ on reconnait la sym$_{\perp}/\mathcal{D}$: $Y = \beta/2$, notée σ. Sinon : f apparait comme la composée commutative de σ et de la translation $t_{\alpha.\overrightarrow{I}}$ (vecteur dirigeant $\mathcal{D}$!) : on l'appelle "symétrie-glissée".
 $[f = \sigma ot = to\sigma \Rightarrow fof = to\sigma o\sigma ot = tot = t_{2.\alpha.\overrightarrow{I}}$; d'où t ; puis $\sigma = t^{-1}of$ uniques !]
10. Etude des similitudes affines indirectes en dimension 2 : $z' = a.\overline{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$.
 (a) Pour $|a| \neq 1$ (sinon ex. précédent), vérifier qu'il y a un point fixe.
 (b) Etudier le cas $z' = re^{i.\alpha}.\overline{z}$, $r > 0$. Puis conclure qu'on a une composée commutative d'une homothétie de centre M_0 et d'une sym. orthogonale / $\mathcal{D}$, $M_0 \in \mathcal{D}$.

 Voir aussi le chapitre 25.

Chapitre 38

Les cercles et les coniques

38.1 Cercles [révisions]

38.1.1 Revoir les équations

$\boxed{\text{En général}}$ $\begin{cases} x = a + R.cos(u) \\ y = b + R.sin(u) \end{cases}$ $\boxed{\text{Passant par } O}$ $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0\,;\ \rho = 2a.cos(\theta) + 2b.sin(\theta)$ [1]

38.1.2 Et le théorème de l'angle inscrit

D'où : $\dfrac{a}{sin(A)} = \dfrac{b}{sin(B)} = \dfrac{c}{sin(C)} = \dfrac{abc}{2S} = 2R$ relation des sinus. Relation des cosinus ?

38.1.3 Et le théorème de la puissance d'un point

1. Au ch. Géométrie de $\mathbb{R}^2$ on a vu $\{M : \dfrac{MA}{MB} = k\}$: Cercles. Ou $\{M : MA^2 - k^2.MB^2 = 0\}, k \geqslant 0.$

   (*) En compléments, le théorème de la puissance d'un point/un cercle avait permis de montrer l'orthogonalité de ces Cercles $\mathcal{C}_k$, $k \neq 1$, ($\mathcal{C}_1$ médiatrice) avec tout cercle passant par A et B.[2]

2. Exercice : $\boxed{\text{une généralisation } \{M : \ \alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2 = \lambda\} \ ?}$

   Solution. Soit $\phi(M) = \alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2$: **"fonction scalaire de Leibnitz"**. Alors

   $$\forall G \in \mathcal{P} : \phi(M) = \alpha.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \beta.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + \gamma.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = (\alpha+\beta+\gamma).MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,\boldsymbol{.}\,(\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} + \gamma.\overrightarrow{GC}) + \phi(G).$$ Donc deux cas :

   - Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

     Prenant $G = Bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, on a : $\phi(M) = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \phi(G)$. D'où

     $\phi(M) = \lambda \Leftrightarrow GM^2 = \dfrac{\lambda - \phi(G)}{\alpha+\beta+\gamma} = Cte$: cercles **de centre** G sous réserve que $Cte \geqslant 0$.

   - Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Soit ici $G = O$ (comme on veut)

     Soit $\overrightarrow{V_0} = \alpha.\overrightarrow{OA} + \beta.\overrightarrow{OB} + \gamma.\overrightarrow{OC}$ (on sait même que ce vecteur ne dépend pas de O). Alors :

     $\phi(M) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{V_0}\,\boldsymbol{.}\,\overrightarrow{OM} = \dfrac{\phi(O) - \lambda}{2}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \boldsymbol{.} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Cte$: droites affines $\perp \overrightarrow{V_0}$ **si** $\overrightarrow{V_0} \neq \overrightarrow{0}$.

---

[1] Un paramétrage de cercle passant par O : $y = t.x \Rightarrow \begin{cases} x = 2.\dfrac{a+bt}{1+t^2} \\ y = 2.\dfrac{t.(a+bt)}{1+t^2} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{c}\text{cercle qui contient aussi } O : \\ t = \dfrac{-a}{b} \text{ si } b \neq 0\ ;\ t = \infty, \text{ sinon}\end{array}\right)$.

[2] Au ch. Equations différentielles, on avait aussi vu que les cercles d'équation $x^2 + y^2 - 2\mu x = 0$ (tangents à Oy en O) étaient "trajectoires orthogonales" aux cercles $x^2 + y^2 - 2\lambda.y = 0$.

38.2 Ellipse, hyperbole, parabole : <u>équations réduites</u>

38.2.1 Courbes du second degré $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

$\boxed{\text{Classification. Il n'y a que 3 coniques propres : parabole, ellipse, hyperbole (et quelques cas dégénérés).}}$

<u>**Démonstration en compléments** (plan affine euclidien)</u> (*)

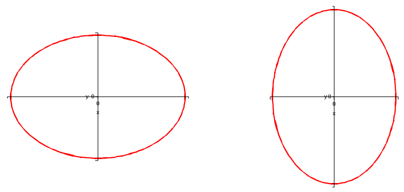
Commençons par un éventuel centre de symétrie. Soit $\underline{f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}$.

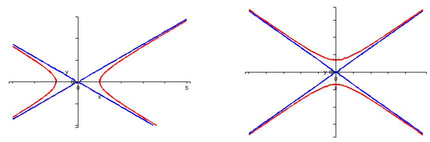
Posons $\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \end{cases}$: $\left(\begin{array}{c} \text{On supprime les } h \text{ et } k, \text{ ou bien on a :} \\ Ah^2 + Bhk + Ck^2 + 0.h + 0.k + G = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \ldots \begin{cases} 2Ax_0 + By_0 = -D \\ Bx_0 + 2Cy_0 = -E. \end{cases}$

Note [3]

• <u>Cas $B^2 - 4AC \neq 0$, système de Cramer</u>. On dit ici : <u>conique à centre, type ellipse ou hyperbole $\mathcal{E}, \mathcal{H}$</u>. [4]

<u>On arrive à</u> $\boxed{\text{Ellipse } \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1.}$ Dessins si $a > b$; puis si $b > a$; dorénavant, $a \geqslant b$: Fig 1.





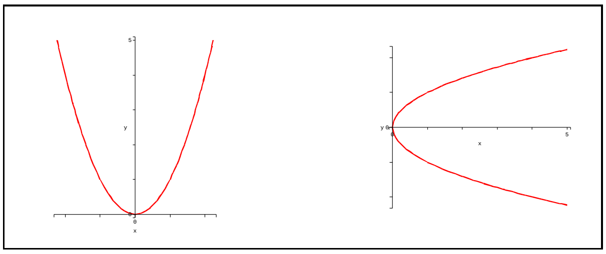
<u>ou</u> $\boxed{\text{Hyperbole } \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = -1.}$ On verra que $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ sont les <u>asymptotes</u>.

Dorénavant, on prendra OX pour "axe transverse" : Fig 3.

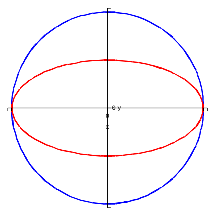
[<u>Sauf cas dégénérés</u> : 2 droites sécantes $(4.X^2 - Y^2 = 0)$, point $(X^2 + 2Y^2 = 0)$, $\emptyset : (X^2 + 2Y^2 = -1)$.]

• <u>Cas $B^2 - 4AC = 0$</u> : <u>On est ramené, si $C \neq 0$, à $C(y - mx)^2 + Dx + Ey + F = 0$: type parabole $\mathcal{P}$</u>.

[<u>Sauf cas dégénérés</u> : 2 droites parallèles $(X^2 = 1)$, confondues $(X^2 = 0)$, $\emptyset : (X^2 = -1)$], on a avec changement de repère o.n. possible : $\boxed{\text{Parabole } X^2 = 2pY \text{ ou } Y^2 = 2pX.}$ [5]



Ellipse :



38.2.2 Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ [On reprend x, y]

1. <u>Paramétrage</u> $\begin{cases} x = a.cos(t) \\ y = b.sin(t) \end{cases}$ cercle "directeur" $(a \geqslant b)$ $\begin{cases} x = a.cos(t) \\ y = a.sin(t) \end{cases}$ (**Aussi** : $\underline{T = tan(\frac{t}{2})}$.)

2. <u>Par affinité (ou dilatation)</u> $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = \frac{b}{a} y \end{pmatrix}$, ce cercle a pour image l'ellipse. Ci-dessus.

---

[3] <u>On a exactement le système</u> $\begin{cases} \partial f / \partial x (x_0, y_0) = 0 \\ \partial f / \partial y (x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ ou $\overrightarrow{grad}(f)(M_0) = \vec{0}$. <u>$B^2 - 4AC$ intervient</u>.

[4] . Une solution de Spé consiste alors à étudier la forme quadratique $(h, k) \mapsto Ah^2 + Bhk + Ck^2$.

. Solution de Sup : <u>Posant</u> ici $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ [rotation d'axes, donc $P^{-1} = {}^tP$]

(On supprime le terme "rectangle" en $h.k$) $\Leftrightarrow B.cos(2.\theta) + (C - A).sin(2.\theta) = 0$; qui est possible.

[5] On verra que p est le "paramètre" et $OF = \frac{p}{2}$, où <u>F foyer, O sommet</u> ; cf. Propriétés monofocales.

3. **Compléments** • D'où **l'aire** de l'ellipse : $\frac{b}{a}.\pi.a^2 = \pi.ab$. cf. intégrales : $g_{ellipse}(x) = \frac{b}{a}.f_{cercle}(x)$
   • Méthode de la "bande de papier". M lié à une tige PQ, $P \in Ox, Q \in Oy$, $QM = a, PN = b$, décrit une ellipse. $(N \in \mathcal{C}(O,a) \mapsto M$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{QM}$: affinité de dir. Oy de base Ox de rapport $-b/a)$. [6] [Ou Cercles de Châsles. $M = mil(R\begin{pmatrix} r.cos(t) \\ r.sin(t)\end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} s.cos(t) \\ -s.sin(t)\end{pmatrix})$, $r = a+b, s = a-b$; F', F, R, S quadr.harm. car (OF) biss., $OF^2 = OF'^2 = OR.OS$; donc (RM) biss., $MR^2 = MS^2 = MF.MF'$ $(F'FRS$ cocycl.) !]
   • Théorèmes d'Apollonius. Avec $M(t)[a.cos(t), a.sin(t)]$, on a : $m(t)[a.cos(t), b.sin(t)]$, $p = m[t+\pi/2]$. $\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Op}$, diam.conj. 1) $Om^2 + Op^2 = a^2 + b^2$ 2) $Aire.parall(Om, Op) = a.b$ 3) $\prod$coeff.dir : $-b^2/a^2$.

38.2.3 Hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Axe transverse Ox

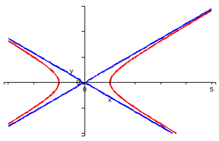
1. Paramétrage $\begin{cases} x = \epsilon.a.ch(t) \\ y = b.sh(t) \end{cases}$ $\epsilon = \pm 1$ **ou** $x = a(T + \frac{1}{T}), y = b(T - \frac{1}{T})$; $x = \frac{1}{cos(t)}, y = tan(t)$...
2. Asymptotes : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}$ ou $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x.}$ $\boxed{\text{Hyperbole "équilatère" (asymptotes } \perp) \Leftrightarrow b = a.}$

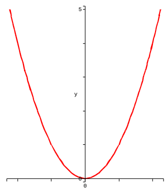
   Preuve : cas $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$. On a : $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}th(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a}$; puis : $y - \frac{b}{a}x = b.[sh(t) - ch(t)] = -b.e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$; d'où une asymptote. Et asymptotes orthogonales $\Leftrightarrow$ produit des pentes : -1.

   Autre preuve : Pour l'asymptote cherchée, dire $y = \frac{b.x}{a}.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ et Dl : $(1+h)^\alpha = ...$
3. Théorème $\boxed{\text{Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes : } X.Y = Cte \text{ ou } Y = Cte/X.}$

   Car $\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a.\overrightarrow{\imath} - b\overrightarrow{\jmath})$, $\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a.\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath})$, nouvelle base $\boxed{\text{non}}$ orthogonale en général convenable. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$: $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(X+Y)$, y...

   (cf. Matrices) et l'ancienne équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ donnent (à voir !) $X.Y = \frac{a^2+b^2}{4}$.





38.2.4 Parabole. Prenons ici l'équation $x^2 = 2py$: tournée comme ci-dessus

Compléments • Pour M sur le parabole, soit MT, $T \in Ox$ la Tangente, P la projection de M sur Ox. Alors $\overline{OP} = 2.\overline{OT}$ par son équation. Et donc la Tangente coupe Oy en U avec $y_U = -y_M$.

• Exercice Lieu des milieux des cordes d'une parabole de direction donnée ?
  On résout $\begin{cases} x^2 = 2py \\ y = m.x + \lambda \end{cases}$ λ variable. Milieux $\frac{x' + x"}{2} = m.p = cte$ dans $x^2 - 2.p.m.x - 2.p.\lambda = 0$:
  Droite $//Oy$ qui est la direction asymptotique. [Déjà vu avec le Théorème des accroissements finis pour $f(x) = \alpha.x^2$, $C^\infty(\mathbb{R})$: $f(b) - f(a) = (b-a).f'(\frac{a+b}{2})$]. Note sur les Coniques.[7]

[6] Avec cette génération, on peut construire la tangente en M à l'ellipse de deux façons :
. Les normales à Ox et Oy en P et Q donnent le "centre instantané de rotation" $I = R$, d'où (tangente en M) $\perp \overrightarrow{IM}$!
. Et aussi : l'image de la droite tangente au cercle en N coupant Ox en T est la tangente MT (T fixe) à $\mathcal{E}$ en M !
Th. d'Apollonius et Hyperbole. Si $m[a.ch(t), b.sh(t)]$, $p[a.sh(t), b.ch(t)] \in$ Hyp. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1$, $\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Op}$ diamètres conjugués/forme bilin. sym. $xx'/a^2 - yy'/b^2$ [Des $//(O,p)$ coupent Hyp en K, L, Asympt en U, V, Om en μ : milieu] ; alors on a encore (2), (1') $Om^2 - Op^2 = a^2 - b^2$ et (3'). Et les diagonales du parallélogramme $mOpq$ sont $//$ Asymptotes.

[7] Ce sont les sections planes du cône de révolution $z^2.tan^2(\alpha) = x^2 + y^2$. [Théorèmes de Dandelin-Quetelet].

38.3 Propriétés monofocales des coniques

38.3.1 Théorème : 1 seul foyer utilisé et sa directrice associée

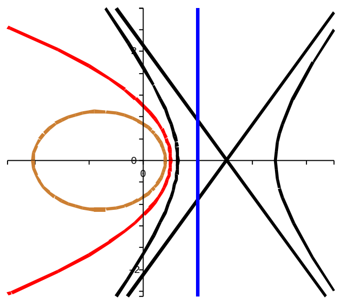
Soit F (foyer) $\notin \mathcal{D}$ droite 'directrice'. Alors $\{M : \dfrac{MF}{\delta(M,\mathcal{D})} = e\}$, $e \geqslant 0$, est une conique :

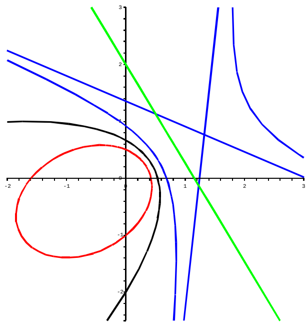
$\underline{e = 1 \text{ Parabole}}$; $\underline{0 < e < 1}$ Ellipse (cercle si $e \to 0$) ; $\underline{e > 1}$ Hyperbole (équilatère $\Leftrightarrow e = \sqrt{2}$).

Soit $\boxed{p = e.d}$ dit paramètre, $d = \delta(F,\mathcal{D})$. $\boxed{\text{Pour la Parabole : } \delta(F,\mathcal{D}) = p\,;\ \delta(\text{Sommet, Foyer}) = \dfrac{p}{2}}$

Pour toute conique, le paramètre p est la longueur du "rayon-vecteur" issu de F // $\mathcal{D}$ directrice.

Démonstration (*) [8]





Remarques et dessin

- Pour $x = 0$, on a aisément (sur l'équation initiale) $y = \pm p$ comme annoncé.
- L'étonnant, quand $e \neq 1$, est que l'équation : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B} = 1$ donne un autre axe de symétrie ! cf.IV.

38.3.2 Conséquence : Equation polaire des coniques

O étant un foyer, ni centre, ni sommet ! et $\mathcal{D}$ d'équation : $x.cos(\alpha) + y.sin(\alpha) = d$, une équation polaire des coniques est $\boxed{\rho = \dfrac{p}{1 + e.cos(\theta - \alpha)}}$ Et $\rho = \dfrac{p}{e.cos(\theta - \alpha)} = \dfrac{d}{cos(\theta - \alpha)}$ redonne $\mathcal{D}$!

Démonstration

$OM^2 = \rho^2$ et $\delta^2(M,\mathcal{D}) = [\rho.cos(\theta).cos(\alpha) + \rho.sin(\theta).sin(\alpha) - d]^2 = [\rho.cos(\theta - \alpha) - d]^2$ conduisent à $\pm\rho = \rho.cos(\theta - \alpha) - d$. Donc : Conique $= \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ d'équations $\rho = \dfrac{p}{1 + ecos(\theta - \alpha)}$, $\rho = \dfrac{-p}{1 - ecos(\theta - \alpha)}$.
$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ car $\rho_2(\theta + \pi) = -\rho_1(\theta) : M_1(\rho_1, \theta) = M_2(\rho_2, \theta + \pi)$! $\mathcal{D} : \rho.cos(\theta)cos(\alpha) + \rho.sin(\theta)sin(\alpha) = d$.

Remarques

- On retrouve, pour $\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ (Rayon-vecteur // Directrice) la valeur connue $\rho = p$ (paramètre).
- Dessiner la parabole $\rho = \dfrac{p}{1 + cos(\theta)}$ $[\alpha = 0]$ qui est aussi $y^2 = -2p[x - \frac{p}{2}] = -2pX$, $X = x - \dfrac{p}{2}$.

---

[8] Prenons ici, $F(0,0)$ et $\mathcal{D}$: $x = d > 0$. $d = FD$: distance d'un foyer à la directrice associée. Alors :
$x^2 + y^2 = e^2 \mid d - x \mid^2 = (ex - p)^2$ $[parfois\ x^2 + y^2 = (ex + p)^2, x = x_0 + X : y^2 = 2pX + (e^2 - 1)X^2.]$
ou $\boxed{\text{si } e = 1}$: $y^2 + 2px = p^2$; soit $y^2 = -2p.[x - \frac{p}{2}]$. Parabole : $\delta(F,\mathcal{D}) = p$; $\delta(\text{Sommet, Foyer}) = \frac{p}{2}$.
tandis que $\boxed{\text{si } e \neq 1}$ appelée excentricité, on obtient : $(1 - e^2)x^2 + 2pe.x + y^2 = p^2$ ou encore :

$$\frac{[x + \frac{pe}{1-e^2}]^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

Donc si $\underline{0 < e < 1}$: Ellipse. Si $e \to 0$, $d \to +\infty$, $p = e.d \neq 0$ fini, on a : $x^2 + y^2 = p^2$, cercle.
(Planètes autour du soleil : excentricité faible. Mercure $1/5$, Vénus $1/140$; même $1/2$ quasi-cercle).
Si $\underline{e > 1}$: Hyperbole. Et hyperbole équilatère $\Leftrightarrow$ $e^2 - 1 = \sqrt{e^2 - 1}$ $\Leftrightarrow$ $e = \sqrt{2}$: est revu plus loin.

On a aussi une définition pour Ellipse et Hyperbole par Foyer et Cercle directeur avec 2 foyers : après.

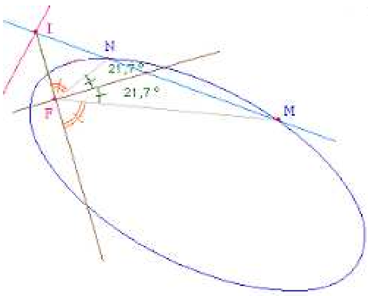
38.3.3 Ellipse (avec foyer) : Retenir surtout $a^2 = b^2 + c^2$; $e = \dfrac{c}{a} < 1$

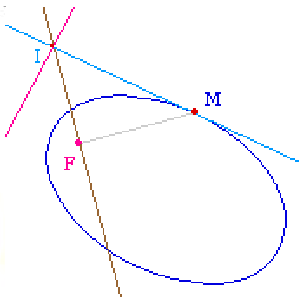
Dém.(*) Soit $\Omega(\dfrac{-pe}{1-e^2}, 0)$ le centre de symétrie, $\overrightarrow{\Omega F} = c\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\Omega D} = \delta\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\Omega A} = -\overrightarrow{\Omega A'} = a\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\Omega B} = b\,\vec{\jmath}$:
$e = \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{A'F}{A'D} = \dfrac{a-c}{\delta - a} = \dfrac{a+c}{\delta + a} = \dfrac{2a}{2\delta} = \dfrac{2c}{2a}$ car $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{t} = k \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{t} = \dfrac{x+y}{z+t} = \dfrac{x-y}{z-t}$. Donc
$\underline{e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{\delta} = \dfrac{BF}{\delta} < 1}$ $\underline{\delta = \dfrac{a^2}{c}}$ $\underline{BF = a}$ $\boxed{BF^2 = a^2 = b^2 + c^2}$ ou $\underline{c^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\text{axe focal=Grand axe.}}$

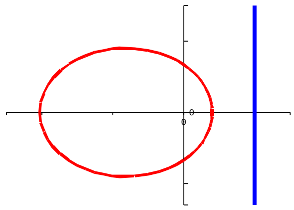
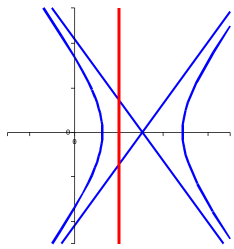
$\boxed{\text{Placer les points et distances ci-dessous}}$ (ici, un seul couple Foyer $F = O$, Directrice $\mathcal{D}$). Note [9]

3 exercices . (E,H), $\underline{O}$ pôle : $\rho^2 = \dfrac{\pm b^2}{1 - e^2.cos^2(\theta)}$, $d = dist(F, \mathcal{D}) = \dfrac{b^2}{c}$. . M, F, M' alignés, $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'} = \dfrac{2}{p}$.

. Théorème **(angles, foyer, directrice)** Si $M, N \in \mathcal{C}$ et $I \in \mathcal{D}$ alignés, FI est bissectrice de FM, FN :
Biss.-ext. sauf si $M, N \in 2$ branches d'hyp. $\boxed{\text{En particulier si } MI \text{ tang. } \underline{FM \perp FI}}$ cas M, F, M' alignés ?
Fig.1,2 : $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{dist(M,\mathcal{D})}{dist(N,\mathcal{D})} = \dfrac{FM}{FN} \Rightarrow I$ sur une biss de MFN ; puis $N \to M$. $\left(\begin{matrix} F \text{ pied de hauteur de } IMM' \text{ et* } I \\ \text{centre de cercle (ex)inscrit } MM'F' \end{matrix}\right)$
$\Rightarrow \underline{\underline{\nu M = p}}$, $\nu = proj_\perp(K, FM)$, $K = Norm_M \cap G.axe$. $[D = pr(F, \mathcal{D}), H = pr(M, \mathcal{D}), I = Tg \cap \mathcal{D}, MFIH \in$ cercle
$u = \widehat{MHF} = \widehat{MIF} = \widehat{FMK}$: MHF, FMK semblables ; $\nu M = MK.cos(u) = e.HF.cos(u) = e.FD = p$. Parabole : verso.]
(Note : $FM \perp FI$ donne les propr. des tang. à la P. et, pour E et H : $Tang_M$. biss. de $F'MF$! IV.)





38.3.4 Hyperbole (avec foyer) : $c^2 = a^2 + b^2$; $e = \dfrac{c}{a} > 1$. **Equilatère** $\Leftrightarrow e = \sqrt{2}$

Dém. (*) en complément. Ayant $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (B = -b^2)$: $\boxed{\text{L'axe focal est toujours l'axe transverse.}}$
Soit $\Omega(\dfrac{+pe}{e^2-1} > \dfrac{p}{e} = d, 0)$ centre de symétrie, $\overrightarrow{\Omega F} = -c.\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\Omega D} = -\delta.\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\Omega A} = -\overrightarrow{\Omega A'} = -a.\vec{\imath}$. Alors
$e = \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{A'F}{A'D} = \dfrac{c-a}{a-\delta} = \dfrac{c+a}{a+\delta} = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{2a}{2\delta}$ $\Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{\delta} > 1$, $\underline{\delta = \dfrac{a^2}{c}}$ (comme l'ellipse) mais $e > 1$.
Ici $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$: soit B', $\overrightarrow{A'B'} = b.\vec{\jmath}$; $\Omega B'$ asymptote car pente $\dfrac{b}{a}$; si $M(\begin{matrix} x > 0 \\ \text{grand} \end{matrix}, \approx \dfrac{b.x}{a})$ dans $\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$
sur $\mathcal{H}$: $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{MF^2}{\delta^2(M, \mathcal{D})} \approx \dfrac{(a^2+b^2)x^2}{a^2x^2}$ $(x \to +\infty)$! Enfin (hyp. équil.) $\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$.
Donc $\boxed{\Omega B' = \Omega B = c \text{ (triangle rectangle) ce qui donne une construction de } c = \Omega F = \Omega F' \text{ rigoureuse.}}$

---

[9] Complément . Tang. en $\underline{M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}}$: $\dfrac{x.x_0}{a^2} + \dfrac{y.y_0}{b^2} = 1$. Si $M_F = (c, p)$ $\boxed{p = b^2/a \text{ et Tang}\cap\text{axes } (\delta, 0); (0, a).}$
$\boxed{\text{Dir. } \mathcal{D} : \text{polaire de } F.}$ 4 façons 1) $Tang_{M_F} \cap Ox = D(\delta, 0) \in \mathcal{D}$ et sur la polaire de F. 2) Affinité, triangles semblables $\Omega FP_F, P_F(c, b) \in$ cercle.principal $\mathcal{C}(\Omega, a)$ et P_FFD, $d = b^2/c$. 3) Ici, MFM' alignés : $MFI = M'FI = \pi/2$, $I \in \mathcal{D}$ aussi sur la polaire de F. 4) $\boxed{\overline{AF}/\overline{AD} = -\overline{A'F}/\overline{A'D} : (A, A', F, D) \text{ D. H.}}$ (donc $\mathcal{D}$ aussi $pol.(F/\mathcal{C})$, d'où $\mathcal{C} \perp$ tout cercle de diam $FL, L \in \mathcal{D}$). On déduit : $T = T_M \cap T_N$ pôle de (M, N) est conjugué de $I \in (M, N)$; I et F aussi conjugués $\boxed{\Rightarrow FT\ Biss.(FM, FN) \text{ (Poncelet)}}$ $\underline{FT \perp FI.}$ Et $\forall \Delta$ passant par F coupant $Con.$ en U, V ; $Dir.$ en J : $[U, V, F, J] = -1$.
. Axe radical des cercles 38.4 $(F', 2a)$ $(F, 0)$ cercle-point $\left(\begin{matrix}\text{droite des points qui} \\ \text{ont même puissance}\end{matrix}\right)$: $\boxed{\text{toujours Dir. } \mathcal{D}}$ car $\left(\begin{matrix} DFM_F \text{ rectangle} \\ \underline{\text{et}}\ sym_\perp/DM_F \end{matrix}\right)$.
$\boxed{\text{Hyp. idem !}}$ IV. $H = \{centres(c), F \in (c)$ tang. à $\mathcal{C}_{F',2a}$ en Q, $tang_M$ médiatr$[FQ]\}$. $M \to \infty$, $(c) \to dr(FQ^*) \perp Asympt.$
$\underline{hom_{F,2}(\mathcal{C}_{principal}) = \mathcal{C}_{F',2a}}$: tang. issue de F à $\mathcal{C}_p$ le rencontre en $P^* \in \mathcal{D} \cap Asympt.$ (P^* conj. de $F(c, 0)/\mathcal{C}_P$ donc $/H$).

38.3.5 Parabole (avec foyer)

Soit ici $\boxed{F(\frac{p}{2},0)\,;\ \mathcal{D}: x=\frac{-p}{2}.}$ Alors $\{M:\ MF=\delta(M,\mathcal{D})\}$ est la parabole $\boxed{y^2=2px}$ p paramètre. [Ex. facile] L'origine n'est pas le foyer maintenant ! Par contre $FD=p$ ($e=1$) ! O milieu de FD.

1. Théorème: La tangente en $P\in$ Parabole, projeté sur $\mathcal{D}$ en M, est **médiane** de FPM isocèle **donc médiatrice, hauteur, surtout bissectrice intérieure de FPM.** D'où la propriété des rayons lumineux pour les miroirs paraboliques et le mot "foyer".

2. Démonstration vue au II ; mais la parabole non tournée ainsi. **Aussi voyons ce calcul :** pour y', **expliciter y fonction de x, $y=\pm\sqrt{2px}$ mal aisé et inutile !** $y^2=2px\Rightarrow 2yy'=2p;\ y'=\frac{p}{y}$.

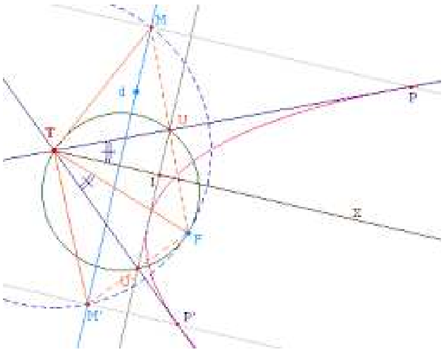
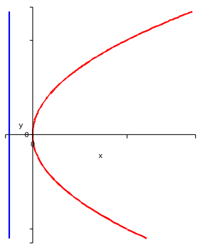
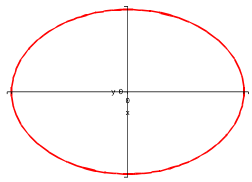
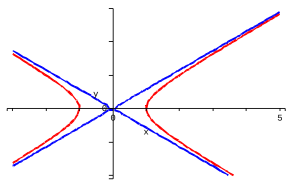
   $Tang.$ en $P\binom{x}{y}\in\mathcal{P}$ $\boxed{\frac{Y-y}{X-x}=\frac{p}{y};\ (x,y):y^2=2px.}$ $Tang\cap Oy: X=0\,;$ $U(0,\frac{y}{2})$ mil$[PT]$, mil$[MF]$.

   $Tang\cap Ox: T(-x,0)\,;$ F mil$[TN]$ car $\overline{HN}=p=\nu P$, $H(x,0)\,;$ $N: Norm\cap Ox\,;$ $\nu: proj_\perp(N,FP)$

   donc $\boxed{\text{les rayons lumineux parallèles à l'axe, passant par } M \text{ convergent vers } F\ !}$ A dessiner.

3. Exercices en complément. Les deux Th. de Poncelet 1) FT biss de FP,FP' 2) $\widehat{PTx}=\widehat{FTP'}$.
   1) $\widehat{TMP}=\widehat{TM'P'}$ (car $TM=TM'$) donc ... [Autre figure à voir : T à droite de la directrice].
   2) $\widehat{MTx}=\widehat{xTM'}$: $2.\widehat{PTF}-\widehat{xTF}=\widehat{xTF}+2.\widehat{FTP'}$ ..., isogonalité. D'où : [ii) vrai que pour $\mathcal{P}$]

PFP' alignés $\Leftrightarrow T\in\mathcal{D}$ car $\widehat{PFT}=\pi/2=\widehat{TMP}$. Si $Tang_{P'}\perp Tang_P$, $T\in\mathcal{D}$ car $\widehat{MTM'}=2(\widehat{FTP}+\widehat{FTP'})$.

38.4 Propriétés bifocales des coniques

38.4.1 Théorème : 2 foyers (pas de directrice ici)

Nouvelles notations : soit un repère o.n. $\Omega=O$ ici, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $F(c\geqslant 0,0)\,;$ $F'(-c,0)$. Fig. 3,4. Dém.(*) [10]

$$\boxed{\begin{array}{l}\{M: MF+MF'=2a\}\ \textbf{est}\ \text{ si } a<c:\emptyset;\ \text{ si } a=c:[F',F];\ \text{ et si } a>c:\text{l'ellipse } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1\\ \{M: |MF-MF'|=2a\}\ \textbf{est}\ \text{ si } a>c:\emptyset;\ \text{ si } a=c:(F,F')\backslash]F',F[\ \text{ et si } a<c:\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1\end{array}}$$

38.4.2 Conséquences (parabole exclue ici)

1. "Construction du jardinier" pour l'ellipse. Avec un fil de longueur $2a$ tendu entre 2 piquets F,F', $FF'=2c<2a$: $\boxed{MF+MF'=2a.}$ Placer les foyers ci-dessus : fig 3,4. (Hyperbole analogue).

---

[10] 1) Cas $a\leqslant c$: aisé. Cas $a>c$: soit $\mathcal{E}'=\{M: MF+MF'=2a\}$, $\mathcal{E}$ l'ellipse. $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'$ clair avec la "déf. monofocale".
Réciproque : $M\in\mathcal{E}'\Leftrightarrow[MF^2=(2a-MF')^2;\ MF'\leqslant 2a]\Leftrightarrow[a.MF'=a^2+cx;\ MF'\leqslant 2a]$
$\Leftrightarrow[M\in\mathcal{E};\ MF'\leqslant 2a;\ a^2+cx\geqslant 0]\Leftrightarrow M\in\mathcal{E}$, car les 2 conditions sont satisfaites pour $M\in\mathcal{E}$.

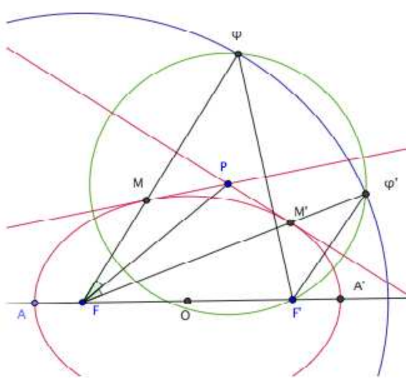
2) Cas $a\geqslant c$: aisé. Cas $c>a$: Soit $\mathcal{H}'=\{M:|MF-MF'|=2a\}$, $\mathcal{H}$ l'hyperbole. $\mathcal{H}\subset\mathcal{H}'$ aisé avec la "déf. monofocale".
Réciproque : $[M\in\mathcal{H}';\ x\geqslant 0]\Leftrightarrow MF'=MF+2a\Leftrightarrow cx-a^2=a.MF\Leftrightarrow[M\in\mathcal{H};\ cx-a^2\geqslant 0]\Leftrightarrow[M\in\mathcal{H};\ x\geqslant 0]$ car $[x\geqslant 0; M\in\mathcal{H}]\Rightarrow c.x\geqslant c.a\geqslant a^2$! D'où E, H avec **cercle.dir**. $\mathcal{C}(F',2a)$: M centre de Γ tang. à $\mathcal{C}$ en φ, $F\in\Gamma$; $F\notin\mathcal{C}$.

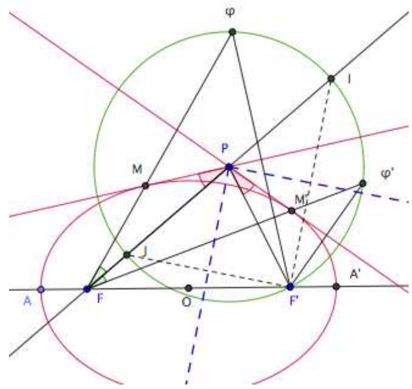
2. Propriété des tangentes. [Autre dém. : position limite de MM' avec φ, φ' et axe radical de $\mathcal{C}_{M,M'}$; ou bien, $\mathcal{D}$ étant la médiatrice de $F'\varphi$, M est le seul point de $\mathcal{D}$ tel que $FM + F'M = 2a$. (*)]

> La tangente en M est **bissectrice extérieure** de FMF' pour $\mathcal{E}$ et **intérieure** pour $\mathcal{H}$.
> Pour l'ellipse, convergence des rayons issus de F vers F' par réflexion. Divergence pour hyp.

Dém. $\sqrt{\overrightarrow{FM}^2(t)} \pm \sqrt{\overrightarrow{F'M}^2(t)} = cte$, or $\dfrac{d}{dt}\sqrt{\overrightarrow{FM}^2(t)} = 2\overrightarrow{FM}.\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}/2\sqrt{\overrightarrow{FM}^2(t)} = \overrightarrow{u}.\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}, \|\overrightarrow{u}\| = 1$ d'où $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} \perp \overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}$!

Propriété "des confessionaux" F=pénitent, F'=confesseur seul lieu d'audition (abbaye de La Chaise-Dieu 43).[11]

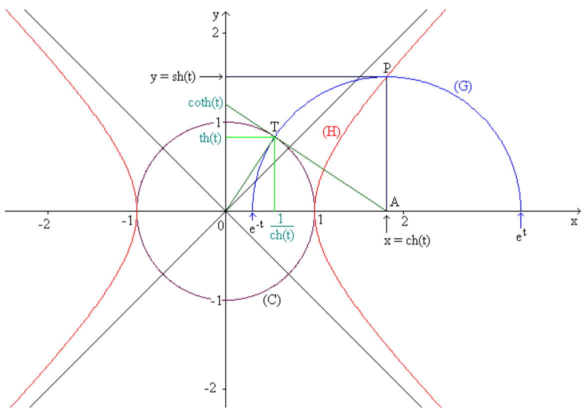


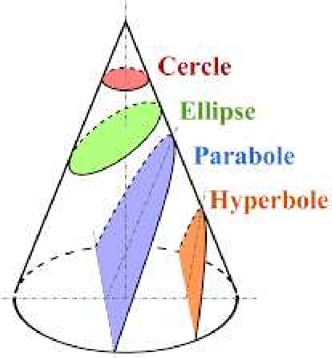


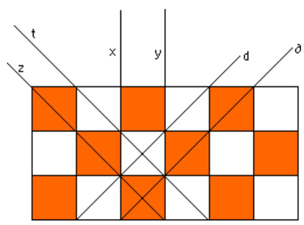
- D'où le lieu des sym. de F'/tang. est le cercle directeur $(F, 2a)$ F, M, φ' alignés [directrice si par.] et par $h_{F',1/2}$ le lieu des $proj_\perp(F'$,tang) est le cercle principal [tangente au sommet si parabole.] Si $proj_{t_M}(F, F') = \alpha, \beta$, alors : $F\alpha.F'\beta = b^2$. [Puissance de F/ cercle principal]. Th. de La Hire.
- $\boxed{\text{1er Th. de Poncelet}}$ (1 foyer, fig.1) : $\widehat{MFP} = \widehat{PFM'}$ [car $P\varphi = PF' = P\varphi'$: PF biss. de $\varphi F\varphi'$.]
- $\boxed{\text{2è Th. de Poncelet}}$ (2 foyers, fig.2) : $PM, PM'; PF, PF'$ isogonales [$PM, PM' \perp F'\varphi, F'\varphi'$: biss. de (PM, PM') $(F'\varphi, F'\varphi')$ même dir. : $F'I, F'J$ et $IJPF$ alignés*, même dir. de biss. que FPF'.]
  *F, P, I milieu de de $[\varphi, \varphi']$ alignés par le 1er Th. de Poncelet, cf. aussi III [... ligne suivante : $2.\widehat{IFJ} = \widehat{MFM'}$.]
- Angle pivotant : portion de tang. mobile IJ entre 2 tang. PM, PM' vue de F sous un angle fixe !
- $T \in Orthoptique$, $T = \varphi * \varphi', FT \perp T\varphi$: $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$, $TO^2 = a^2 + b^2$ (Th. de la Médiane à FTF') [ou $F\varphi'P$, $4a^2 = PF^2 + PF'^2 - 2PF.PF'cos(V)$, angle des tang. donc $V = \pi/2 \Leftrightarrow PO^2 = a^2 + b^2$.]

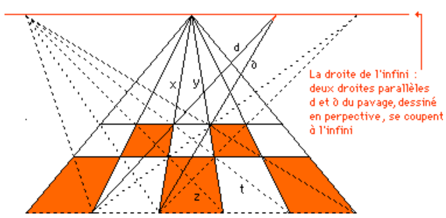
Ex. 1) Si tang.$_{M \in Ell.ou.Hyp.} \cap$ tang.$_{A,A'} = \{P, P'\}$: $PF \perp FP'$. 2) Si $H, H' = proj_\perp(F, F'/\text{tang.}_M)$, $I = FH' \cap HF'$: $MI \perp tang$; $N = sym(M/I) \in (F, F')$; $O, H', K' = proj(F', Norm.)$ alignés. [hom.$_{centres.F,F'}$, $\psi, \psi' = sym(F, F')$.] Puis $\frac{MN}{2.FH} = \frac{F'M}{2a}$; $MN^2 = \frac{b^2}{a^2}MF.MF'$ et si $t = \widehat{FMN}$, $cos(t) = \frac{FH}{MF} = \frac{F'H'}{MF'}$; d'où $\boxed{MN.cos(t) = p}$ (aussi pour P). 3) E. (H.) Si (BB') coupe tang.$_M$ en U, norm. en V, $\mu = sym(M, BB') \neq M$: $F \in Cercle(MU\mu)$ [à voir] F', V aussi.

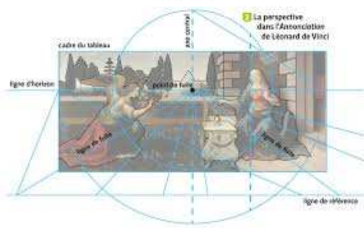
[11] . **Compléments** : un exercice sur l'hyperbole équilatère et les fonctions hyperboliques et coniques :











. **Perspectives** : la vision euclidienne devenant vision projective d'Alberti. **Ici, "l'Annonciation" de Léonard de Vinci.**

M+ **Exercices: Cercles et coniques** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Sur les cercles.}}$ Montrer, avec le théorème de l'angle inscrit, que le symétrique de l'orthocentre H, par rapport aux côtés d'un triangle, est sur le cercle circonscrit.

2. Dans le plan affine euclidien, soit A, B, C tels que $AB = 3; AC = 4; BC = 5$. Dessin ? Quel est l'ensemble $\mathcal{C} = \{M : -5MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 12\}$? [Vérifier que (B, C) est tangente à $\mathcal{C}$.]

3. (*) Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P} : A, B, C$. (a) Montrer que M est forcément barycentre de A, B, C avec des coefficienst α, β, γ judicieux [$\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}$ liés.]
(b) Montrer qu'on peut choisir $\alpha = Aire(MBC)$ etc. [Prendre le produit vectoriel de $\alpha\overrightarrow{MA} + ... + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ par $\overrightarrow{MA}$; se limiter à M intérieur au triangle $(\alpha,\ \beta,\ \gamma \geqslant 0)$ ici et pour la suite.]
(c) I étant le centre du cercle inscrit à PQR, déduire que $I = Bar\begin{pmatrix} P & Q & R \\ QR & PR & PQ \end{pmatrix}$ [PQ longueur.]
(d) En déduire la position du centre de gravité d'un fil triangulaire homogène ABC pesant.
(e) Cas de la plaque triangulaire homogène ? [Découpage en lamelles parallèles à (B, C)].

4. (*) Soit I le centre d'une similitude directe plane $A \mapsto A'; B \neq A \mapsto B'$ donnés, donc $\alpha = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$. Que dire des angles $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}$, $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}$? Déduire que I est intersection de 2 cercles connus et que c'est le point autre que $(A', B') \cap (AB)$. [Sinon, cercles tangents et résultat encore vrai.]

5. Parabole. Soit $\mathcal{D} : x = \dfrac{-p}{2}$ et $F(\ \dfrac{p}{2}\ , 0)$. **Equation de** $\{M : MF = \delta(M, \mathcal{D})\}$ **?** [$y^2 = 2px$.] Puis
(a) Equation de la tangente en $M(x, y) \in \mathcal{P}_{ar}$ décrite par(X, Y) ? Tangente $\cap Oy$, conséquences ?
(b) Si N = Normale $\cap Ox$ et $P(x, 0)$, vérifier que $\overline{PN} = cte$. [Peut servir pour la courbure en O].
(c) (*) Avec (a) mais fixons ici $V(X, Y)$. Nombre de tang. contenant V [second degré en y ; $\Delta \geqslant 0$] ? Lieu de V d'où la parabole est vue sous 90degrés [courbe orthoptique ; tangentes $\perp$: produit des pentes -1] ? Vérifier que les points de tangence sont alignés avec F et que $(V, F) \perp (M_1, M_2)$!
[(*) Lieu d'où $\mathcal{P}_{ar}$ est vue sous un angle α : hyperbole(foyer F, direct. $\mathcal{D}$, excentricité $1/\mid cos(\alpha) \mid$).]

6. Hyperbole. Lieu des centres de symétrie des hyperboles : $\mathcal{H}_m \quad (m - x).y = x^2 - 1$? $(m \neq \pm 1.)$

7. Ellipse, image du cercle par affinité. (a) Aire de l'ellipse et "méthode de la bande de papier" ?
(b) Coupant $\mathcal{E}$ par des droites parallèles, déduire que les milieux des cordes sont alignés. [On dit "diamètre conjugué" ; par une application affine bijective, l'image d'une droite est une droite !...]
(c) Soit $\mathcal{E}_1 : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$; $\mathcal{E}_2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Montrer que si deux cordes de $\mathcal{E}_1$, AB, AC, sont tangentes à $\mathcal{E}_2$, il en est de même de BC. [Qui se généralise "grand théorème de Poncelet".]

8. Courbe d'éq. pol. $\rho = \dfrac{a}{1 + cos(\theta)}$; $\rho = \dfrac{a}{1 + \sqrt{2}.cos(\theta)}$; $\rho = \dfrac{2.a}{2 + cos(\theta)}$? Si $\rho = \dfrac{p}{1 + e.cos(\theta)}$, $\rho = \dfrac{p/\sqrt{2}}{1 + \frac{e}{\sqrt{2}}.cos(\theta)}$, (*) montrer que les droites $(P[\theta = \alpha - \pi/4],\ Q[\alpha + \pi/4]), P, Q \in$ 1ère conique, enveloppent la 2ème !
[Trouver $(P, Q) : (e + \sqrt{2}).X.cos(\alpha) + \sqrt{2}.Y.sin(\alpha) = p$. Point caractéristique $\theta = \alpha$!]

9. (*) Si $A \notin \mathcal{D}$, lieu des foyers des paraboles passant par A de directrice $\mathcal{D}$; puis lieu des sommets ? [Affinité encore pour les sommets : trouver une ellipse.]

10. (*) Soit l'hyperbole équilatère $\mathcal{H} : x.y = k$, $M_0 \in \mathcal{H}$, N_0 son symétrique / O et $\{M_1, M_2, M_3\} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre M_0 passant par N_0. Montrer que le triangle obtenu est équilatéral :
(a) Avec les complexes. (b) Puis en montrant que $G[(x_1 + x_2 + x_3)/3, ...]$ coïncide avec M_0.

Chapitre 39

Longueur/courbure des courbes planes

39.1 Longueur d'un arc paramétré

39.1.1 Généralités

1. Exemples d'arc paramétré. C'est la donnée de $F : t \in I \ \ [I \ \text{segment}] \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
   - en cartésiennes : $x \in [x_0, x_1] \mapsto F(x) = \begin{cases} x = x \\ y = x^2/2p \end{cases}$ [Arc de parabole.]
   - en paramétriques : $t \in [0, 2\pi] \mapsto F(t) = \begin{cases} x = a.cos(t) \\ y = b.sin(t) \end{cases}$ [Ellipse.]

     autre cas à voir : $t \in [0, 1] \mapsto F(t) = \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ [Segment $[M_0, M_1]$ si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.]
   - en polaires : $\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto F(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta).\overrightarrow{u}(\theta)$ **où** $\overrightarrow{u} = cos(\theta)\overrightarrow{\imath} + \sin(\theta)\overrightarrow{\jmath}$;

     [$\rho = \dfrac{p}{1 + e.cos(\theta - \alpha)}$: coniques de foyer O ; $\rho = 2a.cos(\theta) + 2b.sin(\theta)$: cercle passant par O.]

2. Etude de l'hélice circulaire dans $\mathbb{R}^3$: $t \in [0, \dfrac{2.\pi}{\omega}] \mapsto F(t) = \begin{cases} x = r.cos(\omega.t) \\ y = r.sin(\omega.t) \\ z = h.t. \end{cases}$

   Elle est tracée sur le $\boxed{\text{"cylindre de révolution" : } x^2 + y^2 = r^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$

   La période en projection sur Oxy est $T = \dfrac{2.\pi}{\omega}$. $\boxed{\text{Le "pas" de l'hélice est } \dfrac{2.\pi}{\omega}.h}$ (avancée sur Oz).

   On a : $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} -r.\omega.sin(\omega.t) \\ r.\omega.cos(\omega.t) \\ h \end{pmatrix}$ donc : $\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\| = \sqrt{h^2 + r^2\omega^2}$: vecteur vitesse constant en norme ;

   et $\alpha = (\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}, \overrightarrow{k}) = cte$, car $cos(\alpha) = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2\omega^2}}$; $\boxed{\text{le vecteur vitesse fait un angle constant avec } \overrightarrow{k}.}$

3. Longueur d'un arc

   Soit $t \in [a, b]$; pour la subdivision $\Delta : t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$ soit $\lambda_\Delta = M_0M_1 + ... + M_{n-1}M_n$ la longueur polygonale. $\boxed{\text{On appelle longueur de l'arc : } \sup\{\lambda_\Delta, \Delta \text{ quelconque}\}.}$ Et si ce sup est fini, on dit que l'arc est rectifiable. Un arc continu [F C^0] n'est pas forcément rectifiable ! cf. au dos.

39.1.2 Longueur d'un arc C^1

1. Théorème $\boxed{\text{Si } F \text{ est } C^1[a, b] \text{ alors l'arc est rectifiable de longueur } L = \int_a^b \|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|dt = \int_a^b \|F'(t)\|dt.}$

2. Interprétation cinématique : Petite longueur : $dL = \|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|.dt = \|\overrightarrow{V}(t)\|.dt = \|d\overrightarrow{M}\|.$

39.1.3 Changement de paramètre

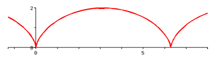
Définition. On écrit plutôt : $s(t)$ =Longueur-arc$\widetilde{M_aM_t}$, appelée "abscisse curviligne" ; donc $\dfrac{ds}{dt} = \|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|$

sauf si on change l'orientation en prenant $s(t)$ =Longueur-arc$\widetilde{M_tM_b}$, cas où $\dfrac{ds}{dt} = -\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|$. D'où :

$$\boxed{ds = \pm\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|.dt = \pm\|\overrightarrow{V}(t)\|.dt = \pm\|d\overrightarrow{M}\|.}$$ Toujours + en pratique ! Puis : $L = \displaystyle\int_{Arc} ds.$ [1] [2] [3]

s est un paramètre essentiel, car "intrinsèque" ; on dit "paramétrage normal".

39.1.4 Calculs de longueur (paramétriques, polaires, cartésiennes)

1. Arche de cycloïde $\begin{cases} x = R[t - sin(t)] \\ y = R[1 - cos(t)] \end{cases}$ 

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = R\begin{pmatrix} 1 - cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} = 2R.sin\frac{t}{2}.\begin{pmatrix} sin\frac{t}{2} \\ cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$ avec $1 - cos(t) = 2.sin^2\frac{t}{2}$; $1 + cos(t) = 2.cos^2\frac{t}{2}$

et $\|\lambda.\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$: $\boxed{ds = \|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|.dt = 2R \mid sin\frac{t}{2} \mid dt.}$ $\quad L = 2R\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mid sin\frac{t}{2} \mid dt = ... = 8R.$

2. Hélice circulaire (pour un tour) : $t \in [0, \dfrac{2.\pi}{\omega}] \mapsto F(t) = \begin{cases} x = r.cos(\omega.t) \\ y = r.sin(\omega.t) \\ z = h.t. \end{cases}$

On a vu que $\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\| = \sqrt{h^2 + r^2\omega^2}$; donc : $ds = \|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|dt = \sqrt{h^2 + r^2\omega^2}.dt$; d'où la longueur

pour un tour : $L = \displaystyle\int_{Arc} ds = \frac{2\pi}{\omega}.\sqrt{h^2 + r^2\omega^2}.$

Vérifions. On découpe et déplie le cylindre : hypoténuse d'un rectangle de côtés $\dfrac{2\pi.h}{\omega}$ et $2\pi.r$.

---

[1] (*) **Complément et cas de fonction F, C^0, où la longueur est infinie : Flocon de Von Koch.**

Soit ABC équilatéral ; sur AB divisé en 3 parties égales AA_1A_2B, on remplace A_1A_2 par $A_1A'A_2$ extérieur avec $A_1A' = A'A_2 = A_1A_2$; idem sur BC, CA, ce qui fait que la longueur est multipliée par 4/3 à ce premièr pas. Dessin ? On recommence sur chacun des 12 côtés. Etc ! Enfin, on prend la courbe limite ...

[2] Démonstration (*)

Déjà : $M_{i-1}M_i = \|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\| = \|\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} F'(t)dt\| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|F'(t)\|dt$, en utilisant $\|\displaystyle\int_c^d \phi(t)dt\| \leqslant \int_d^d \|\phi(t)\|dt$ pour $c \leqslant d$

qui est vrai pour ϕ C^0 (mais non prouvée) ; donc $\lambda_\Delta \leqslant \displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|dt$ d'où $L \leqslant \displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|dt$.

Inégalité inverse : Posons $L(t)$ =Longueur-arc$\widetilde{M_aM_t}$;

on déduit $h > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} \|F'(u)\|du \geqslant \frac{L(t+h) - L(t)}{h} \geqslant \frac{\|F(t+h) - F(t)\|}{h} = \frac{1}{h}\|\int_t^{t+h} F'(u)du\|$.

Par passage à la limite quand $h \to 0$, on a [norme continue] $L'(t) = \|F'(t)\|$; et ceci termine.

Remarque. Le résultat se généralise à F C^0 et C^1 par morceaux, dont voici une définition :

F est C^1 par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un entier N et une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_N = b$ telle que $F_{/]a_{i-1},a_i[}$ soit C^1 sur $]a_{i-1}, a_i[$ et prolongeable en une fonction C^1 sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Exemples. Si f à valeurs dans $\mathbb{R}$: $f(x) = \mid x \mid$ sur $[-1, 1]$. Non C^0 et C^1 p.m. : $f(x) = E(x)$ sur $[0, 6]$.

[3] Propriété (*)

D'abord : $t = \varphi(u)$, $u \in [\alpha, \beta]$, est dit changement de paramètre "admissible" si φ bijective et φ, φ^{-1} sont C^1.

On a vu [fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$] que ceci équivaut à φ C^1 et $\forall u \in [\alpha, \beta] : \varphi'(u) \neq 0$.

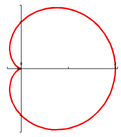
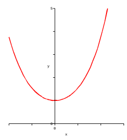
[$L = \displaystyle\int_\alpha^\beta \|(Fo\varphi)'(u)\|du$, pour tout paramètre admissible. Voir le cas φ décroissante : $\varphi(\alpha) = b$ ...]

Si $\mid \dfrac{ds}{dt} \mid = \|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\| \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$, soit avec un arc C^1 sans point stationnaire, alors s est "admissible".

3. Cardioïde : $\rho = a[1 + cos(\theta)]$. $\overrightarrow{OM} = \rho(\theta).\overrightarrow{u}(\theta) \Rightarrow d\overrightarrow{M}/d\theta = \rho'\overrightarrow{u} + \rho.\overrightarrow{u}_1$.

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}_1} = a\begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ 1 + cos(\theta) \end{pmatrix} = 2a.cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -sin\frac{\theta}{2} \\ cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{ds = \|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\|d\theta = 2a \mid cos\frac{\theta}{2} \mid d\theta}$$

D'où $L = 2a\int_{-\pi}^{\pi} \mid cos\frac{\theta}{2} \mid d\theta = ... = 8a$. $\left(\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}} \quad \overrightarrow{u}_1 = \frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = ... \textbf{ aussi o.n.}\right)$

Courbe(s) :  

4. Chainette : $x \mapsto \begin{cases} x = x \\ y = ach\frac{x}{a} \end{cases}$ $\quad \frac{d\overrightarrow{M}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ sh\frac{x}{a} \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{ds = ch\frac{x}{a}.dx}$ D'où $L = \int_0^{x_0} ch\frac{x}{a}.dx = ...$

39.2 Repère de Serret-Frenet

39.2.1 Définitions

On note $\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} \text{ unitaire dirigeant la tangente}}$ (d'après le théorème). Et α tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{T}) = \alpha$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}}$ puis $\boxed{\overrightarrow{N} = \frac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \end{pmatrix}.}$

Ainsi pour passer de $\overrightarrow{T}$ à $\overrightarrow{N}$, inutile de dériver ; **mais permuter les composantes et signe** $-$.

Enfin $\boxed{\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}}$: binormale. $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est appelé repère de Serret-Frenet.

39.2.2 Exemple

Chainette : $x \mapsto \begin{cases} x = x \\ y = ach\frac{x}{a} \end{cases}$ On a $\frac{d\overrightarrow{M}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ sh(x/a) \end{pmatrix}$ donc : $ds = ch\frac{x}{a}.dx$.

$\boxed{\text{D'où, dans la base } (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) :}$ $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{M}/dx}{ds/dx} = \begin{pmatrix} 1/ch\frac{x}{a} \\ th\frac{x}{a} \ ; \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -th\frac{x}{a}\ , \\ 1/ch\frac{x}{a} \end{pmatrix}$!

39.3 Courbure des courbes planes

39.3.1 Dérivée seconde : courbure

On a donc : $\frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}.\overrightarrow{N}$. Qu'est-ce $\frac{ds}{d\alpha}$? (homogène à une longueur).

Soit $M(s)$, $N(s + \Delta\alpha)$ $\qquad \Delta\alpha =$ angle des tangentes. Dessin ?

Ainsi $\frac{\Delta s}{\Delta\alpha} \simeq$ rayon du cercle, centré en I_{MN} intersection des normales en M et N (passant par M).

$\boxed{\textbf{Deux dessins à voir}}$: Cas $\frac{\Delta s}{\Delta\alpha} \geqslant 0$ (virage à gauche) puis $\frac{\Delta s}{\Delta\alpha} < 0$ (virage à droite).

Définition

$\frac{d\alpha}{ds} = lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ est dit courbure en M, notée c ; $\boxed{\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha}} = \frac{1}{c}$: rayon de courbure en M

et on a, pour le signe : $\mathcal{R} > 0 \Longleftrightarrow$ virage à gauche.

Enfin C défini par $\boxed{C = M + \mathcal{R}.\overrightarrow{N}}$ (ou $\overrightarrow{MC} = \mathcal{R}.\overrightarrow{N}$) est appelé centre de courbure.

39.3.2 Formulaire. Formules de Frenet

. Calculer $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ ou en polaires $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{u}_1}$: $ds = \epsilon\, \|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|.dt$ ou ... choix $\frac{ds}{dt} \geqslant 0$ ou $\epsilon = +1$

. Puis : $\boxed{\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}/dt}{ds/dt}}$ et $\overrightarrow{N}$ en permutant les composantes avec changement de signe. Alors :

. $\boxed{\mathcal{R} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{d\alpha}}}$ $d\alpha$ $\begin{cases} \text{paramétriques } \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \text{ col. à } \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{y'}{x'}(t), \quad d\alpha \text{ en différentiant} \\ \text{polaires } \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}_{\vec{u},\vec{u}_1} \text{ col. à } \begin{pmatrix} cos(V) \\ sin(V) \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{u}_1} \Rightarrow tan(V) = \frac{\rho}{\rho'}, \quad dV \text{ en différentiant} \\ \text{attention ici : } \quad \alpha = \theta + V\ (\pi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\alpha = d\theta + dV.} \end{cases}$

. Enfin $\boxed{C = M + \mathcal{R}.\overrightarrow{N}.}$ Et conséquence : $\boxed{\text{deux formules de Frenet}}$ $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}}$; $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{-\overrightarrow{T}}{\mathcal{R}}$.

Formule donnant $\mathcal{R}$: après. 1ère de Frenet : ci-dessus. 2ème : $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{N}}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\mathcal{R}}.(-\overrightarrow{T})$.

Deux exercices corrigés (et voir que C est dans la concavité : $\mathcal{R} \geqslant 0$ ou $\mathcal{R} < 0$)

1) Courbes dont la courbure est toujours nulle ?

2) Courbes dont la courbure est constante, non nulle ($\mathcal{R} = cte$) ?

Solution 1) $\frac{d\alpha}{ds} = 0$ soit $\alpha = cte = \alpha_0$. Alors $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$ constant en norme, est aussi constant en direction, soit $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}_0$. La $\boxed{\text{1ère}}$ dérivation $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T}$ donne $\overrightarrow{OM} = s.\overrightarrow{T}_0 + \overrightarrow{OM}_0$ ou $\overrightarrow{M_0M} = s.\overrightarrow{T}_0$. Droites.

2) Ici on a $\frac{ds}{d\alpha} = \mathcal{R} = \mathcal{R}_0$ d'où $[s = \mathcal{R}_0(s - s_0)$ non utile] et $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T}$ $\boxed{\text{qui est}}$ $\begin{cases} dx/ds = cos(\alpha) \\ dy/ds = sin(\alpha) \end{cases}$.

$\begin{cases} dx = cos(\alpha)ds \\ dy = sin(\alpha)ds \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \mathcal{R}_0.cos(\alpha)d\alpha \\ dy = \mathcal{R}_0.sin(\alpha)d\alpha \end{cases}$ donc $\begin{cases} x - x_0 = \mathcal{R}_0.sin(\alpha) \\ y - y_0 = -\mathcal{R}_0.cos(\alpha) \end{cases}$. Cercles de rayon $\mid \mathcal{R}_0 \mid$.

39.3.3 Rayon de courbure en tout point

1. **Courbes paramétrées** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ On a $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ qui donne ds et $d\alpha$:

- $ds = \pm\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\|dt = \epsilon.\sqrt{[x']^2(t) + [y']^2(t)}dt$, $\epsilon = +1$ **en général, notre choix ;** et
- $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$ étant colinéaire à $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$: $tan(\alpha) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$; d'où $d\alpha$ en différentiant.

Voici : $[1 + tan^2(\alpha)]d\alpha = \frac{y"x' - x"y'}{[x']^2(t)}dt$; soit en remplaçant $tan(\alpha)$: $d\alpha = \frac{y"x' - x"y'}{[x']^2(t) + [y']^2(t)}dt$.

Donc : $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{([x']^2 + [y']^2)^{3/2}}{y"x' - x"y'}$ **ce qui est :** $\boxed{\mathcal{R} = \frac{\|\overrightarrow{M'}\|^3}{[\overrightarrow{M'}, \overrightarrow{M"}]}}$ car on a

dénominateur $= [\overrightarrow{M'}, \overrightarrow{M"}] = \begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & y" \end{vmatrix}$, numérateur : cube de $v = \frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{V}\|$.

Remarques 1) Points d'inflexions à chercher parmi ceux tels que : $y"x' - x"y' = 0$. Connu.

2) Preuve cinématique en paramètre quelconque. [Noter l'accélération centripète au passage]

$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = v.\overrightarrow{T}$; $\overrightarrow{\Gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N}$; $\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma} = \frac{v^3}{\mathcal{R}}\overrightarrow{B}$: $\boxed{\mathcal{R} = \frac{\|\overrightarrow{V}\|^3}{(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma}).\overrightarrow{k}}}$.

$[\frac{1}{R} = \frac{dx}{ds}.\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$; $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1$, $\frac{dx}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0$; avec l'id. de Lagrange $\frac{1}{R^2} = (\frac{d^2x}{ds^2})^2 + (\frac{d^2y}{ds^2})^2$].

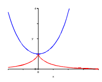
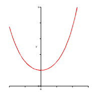
$\boxed{\text{Exemple}}$ Tractrice $\left\{\begin{array}{l} x = a[t - th(t)] \\ y = a/ch(t) \end{array}\right.$ **Prendre** $\boxed{\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha}.}$ (Formule ci-dessus longue !)

Rayon : Ici $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = a.\frac{sh(t)}{ch^2(t)}\begin{pmatrix} sh(t) \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $ds = a.\mid th(t) \mid dt$; et $tan(\alpha) = \frac{-1}{sh(t)}$;

d'où $(1 + tan^2(\alpha))d\alpha = (1+\frac{1}{sh^2(t)}).d\alpha = \frac{ch(t)}{sh^2(t)}\, dt$ donc $d\alpha = \frac{dt}{ch(t)}$. $\mathcal{R} = a. \mid sh(t) \mid.$

Centre de courbure : $C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}$; $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{M}/dt}{ds/dt} = \frac{sh(t)}{\mid sh(t) \mid ch(t)}\begin{pmatrix} sh(t) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{N} = \frac{sh(t)}{\mid sh(t) \mid ch(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ sh(t) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t - th(t) \\ 1/ch(t) \end{pmatrix} + a\frac{sh(t)}{ch(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ sh(t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t \\ ch(t) \end{pmatrix}$

et $y_c = a.ch(x_c/a)$: la développée est la "chainette" ! [4]

2. **En cartésiennes** $\left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = y(x) \end{array}\right.$ [cas particulier $t = x$] : $x' = \frac{dx}{dx} = 1$; $x" = 0$; $y' = \frac{dy}{dx}$; $y" = \frac{d^2y}{dx^2}$.

$\boxed{\text{Ici :}}$ $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(1 + [y']^2)^{3/2}}{y"}$. [5] (C'est aussi : $\mathcal{R} = \frac{1}{y".cos^3(\alpha)}$ cf. **3.4.**)

$\boxed{\text{Exemple}}$ Chainette (ci-dessus) : $y = a.ch\frac{x}{a}$. $\frac{d\overrightarrow{M}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ sh(x/a) \end{pmatrix}$ ... Trouver $\mathcal{R} = a.ch^2\frac{x}{a}$.

3. **En polaires** : $\rho = \rho(\theta)$. Base locale $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1$; $\alpha = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{T})$, $V = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T})$; donc $\alpha = \theta + V(\pi)$

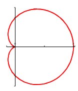
$\boxed{d\alpha = d\theta + dV.}$ $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1}$ d'où $ds = \|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\|\, d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}.d\theta$. $tan(V) = \frac{\rho}{\rho'}$ donne

en différentiant : $[1 + tan^2(V)]dV = ...$ d'où $dV = \frac{(\rho')^2 - \rho.\rho"}{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$, $d\alpha = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho"}{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$

$\mathcal{R} = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho"} = \frac{(\frac{1}{\rho^2} + [(\frac{1}{\rho})']^2)^{3/2}}{\frac{1}{\rho^3}[\frac{1}{\rho} + (\frac{1}{\rho})"]}$ pôle : $\mathcal{R} = \frac{\rho'}{2}$. Et $\mathcal{R} = \frac{1}{[\frac{1}{\rho} + (\frac{1}{\rho})"].sin^3(V)}$

pour une conique de foyer O, $\mathcal{R} = \frac{p}{sin^3(V)}$ [6] pour la spirale log., $V = cte$ ici, $\mathcal{R} = \frac{\rho}{sin(V)}$.

[**Note. Pour une conique, soit MN la sous-normale, N sur l'axe focal et $\nu = proj_\perp(N, FM)$; si on sait que $\nu M = p$ (Ex.) on en déduit une 1ère construction du centre de courbure !**]



$\boxed{\text{Cardioïde}}$ $\rho = a[1+cos(\theta)]$ $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = 2acos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -sin(\theta/2) \\ cos(\theta/2) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1}$ $ds = 2a\mid cos\frac{\theta}{2} \mid d\theta$, choix $\mid \theta \mid \leqslant \pi$

$tan(V) = -cot\,\frac{\theta}{2} ... = tan[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\theta}{2})]$; ici $V = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + k\pi$! $d\alpha = dV + d\theta = \frac{3}{2}d\theta$. $\mathcal{R} = \frac{4}{3}a. \mid cos\,\frac{\theta}{2} \mid$.

---

[4] On a $P = Tang \cap Ox = proj_\perp(C, Ox)$; $\delta ist(P, Tang_{C \in chainette}) = a$! et inv. (éq. diff.) $\boxed{\text{D'où}}$ le lieu de F foyer d'une Parabole $\boxed{\text{roulant sans glisser en } I(CIR)}$ sur $\mathcal{D} = Ox$ est une chainette. Dém. Δ =Dir., $K = proj(I, \Delta)$; $P = mil[KF]$ $T = \Delta \cap \mathcal{D}$ (T, I, P alignés) : $TF \perp FI$, donc (TF) tangente et $dist(P, TF) = dis(P, \Delta) = dist(F, \Delta)/2 = cte$. Fini.

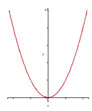
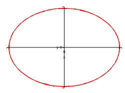
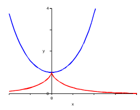
[5] Si $N = Normale \cap Ox$, $(1 + y'^2) = \frac{MN^2}{y^2} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{MN^3}{y^3.y"}$. $\boxed{\text{Cas } y^3.y" = \alpha :}$ $u = y'$, $\dot{u} = \frac{du}{dy}$, $y" = u\dot{u}$ (*) donne $(yy')^2 = -\alpha + qy^2$. Si $q = 0$, $-\alpha = p^2$: parabole, axe Ox ; si $q \neq 0$, $y^2 = 2px + qx^2 + \frac{\alpha + p^2}{q}$; cas $\alpha < 0$: choisir $p^2 = -\alpha$ **conique d'axe** Ox [Ox axe focal que si $q = e^2 - 1 > -1$] ; et cas $\alpha > 0$: $q > 0$, $qy^2 - (qx + p)^2 = \alpha$.

[6] Centre de courbure pour ellipse : soit deux normales en M et M' (proche) sécantes en C ; $\alpha = \widehat{MFM'}$, $\beta = \widehat{MF'M'}$, $\theta = \widehat{MCM'}$. Avec les réflexions $F'MF, F'M'F$, on a : $\theta = (\alpha + \beta)/2$; comme $\theta/MM' \simeq 1/\mathcal{R}$ (diam.-cercle-circonscrit) si P, Q sont sur Normale-en-M et $\widehat{MFP} = \widehat{MF'Q} = \pi/2$, $\frac{2}{MC} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ}$: $[P, Q, M, C]$ D.Harm. ! Supposons $MF > MF'$, φ = sym(F'/Normale), $U = (FF') \cap Normale$, $\gamma \in (MF)$ avec $\widehat{MU\gamma} = \pi/2$. Comme φ sym$_\perp(F')$, $UM, U\gamma$ biss.$(UF, U\varphi)$ $\boxed{M, \gamma, F, \varphi \text{ DH.}}$ Les perp. donnent C, P, Q : $C \in Cercle(M, M, \gamma)$. (Si MT tangente au cercle de dim $[F\varphi]$, $\gamma = proj_\perp(T)$). Si parabole : $Q = \infty$. $MC = 2.MP = 2.M\mu$, $\mu \in Normale \cap Dir$. (triangles égaux). Si hyperbole : $\theta = (\alpha - \beta)/2$, β avec le foyer F' de l'autre branche. Mais MP, MQ sont de sens contraire, à nouveau $[P, Q, M, C]$ $D.H.$ Si $U = Normale \cap (F'F)$, $\widehat{MU\gamma} = \pi/2$ avec $\gamma \in (MF)$, prendre encore : $Normale \cap perp.en.\gamma$ à (MF) ! ["René Godefroy, élève à Polytechnique".] Autre solution de $\boxed{\text{Mannheim utilisant le théorème de Pascal et l'hyp. équil. d'Apollonius}}$ passant par M, M' confondus ...

39.3.4 Rayon de courbure en un seul point

1. **Relation simplifiée**. Dans $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ La courbe a pour équation $y = f(x)$ avec $f(0) = f'(0) = 0$:
$$\mathcal{R} = \frac{(1+[y']^2)^{3/2}}{y"} \Rightarrow \boxed{\text{Avec } f(0) = f'(0) = 0 : \ \mathcal{R} = \frac{1}{f"(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2.y}} \quad \text{car} \quad y \underset{x\to 0}{\sim} \frac{y"(0)}{2} x^2 \ ...$$

2. **C'est le cas des exercices classiques suivants :**
   – Parabole : $x^2 = 2p.y$ donne : $\mathcal{R} = p$ au sommet seulement. (*) Autre solution : sachant que la normale en M coupe Oy en N avec $QN = p$, où $Q = proj_\perp(M, Oy)$, faire tendre M vers O !
   – Ellipse aux sommets seulement : $x = a.cos(t)$; $y = b.sin(t)$. [cf. plus loin pour la "développée".] On fait une translation de repère : $X = x$; $Y = y - b$ alors $\lim\limits_{t\to\pi/2} \frac{X^2}{2Y}$ est possible et donne : $\mid \mathcal{R}_B \mid = a^2/b$ (calcul intéressant, $t = \pi/2 + h$, $1 - cos(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2/2)$; et donc : $\mid \mathcal{R}_A \mid = b^2/a$!

39.4 Courbe développée

39.4.1 Définition (3ème figure ci-dessus et 39.5.3)

$\boxed{\text{Soit une courbe } \Gamma. \text{ Le lieu } \mathcal{C} \text{ du centre de courbure } C \text{ en } M \in \Gamma \text{ est dit : courbe développée de } \Gamma.}$

On a déjà vu que la développée de la tractrice est la chainette : le centre de courbure C est non seulement sur la normale en M à la tractrice initiale ; mais de plus (ci-après) cette normale est tangente en C à la développée, ici la chainette ! [c'était d'ailleurs "prévu", vu **39.3.1**.]

39.4.2 Propriété générale de la développée [et développante 5.3]

Théorème

> La normale en $M \in \Gamma$ (courbe initiale), non seulement contient le centre de courbure $C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}$; mais encore est tangente à la développée $\mathcal{C}$, en $C \in \mathcal{C}$.
> **On dit que $\mathcal{C}$ est "l'enveloppe" des normales à la courbe initiale Γ.**

Démonstration. Avec $C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}$, la tangente est donnée par $\frac{d\overrightarrow{C}}{d*}$ où $*$ est un paramètre quelconque (admissible). Prenons donc l'absisse curviligne s sur Γ. Dessin ?

On a $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T}$; $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{-\overrightarrow{T}}{\mathcal{R}}$; qui donne $\frac{d\overrightarrow{C}}{ds} = \frac{d\mathcal{R}}{ds}\overrightarrow{N}$ et qui termine si $\frac{d\mathcal{R}}{ds} \neq 0$.

[Sinon point stationnaire de $\mathcal{C}$; qui correspond en général, à un extremum de la courbure de Γ].

Remarques. (1) Ainsi $d\sigma = \|d\overrightarrow{C}\| = \pm\, d\mathcal{R}$: la longueur de la développée est toujours calculable car c'est la différence de rayons de courbure de Γ (hors des points stationnaires).

(2) Si Γ env. des D_θ : $x.cos(\theta) + y.sin(\theta) = f(\theta)$, $[\rho = f(\theta)$, podaire] alors $\mathcal{C}$ enveloppe des D'_θ ; $\mathcal{R} = (f + f")(\theta)$. $\mid \Delta\sigma \mid = \mid [f + f"]_\alpha^\beta \mid$. Idem Δs avec une primitive de f ! Ex. **développantes** : $M = C + \lambda.\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{dM}/d\sigma = cte.\overrightarrow{\nu} \Rightarrow d\lambda/d\sigma = -1$, $\lambda = -\sigma + \sigma_0$ ou $\sigma + \lambda = \sigma_0$: $\overset{\frown}{C_0C} + \overline{CM} = Cte$.
$\mathcal{C}$ cercle : $f'(\theta) = R, f(\theta) = R.\theta, F(\theta) = R.\theta^2/2$; $\Delta s = R[\frac{\theta^2}{2}]_\alpha^\beta$. Développante de cercle, par ex. env. des $x.sin(\theta) - y.cos(\theta) = R.\theta$; param. : $x = R.cos(\theta) + R.\theta.sin(\theta), y = R.sin(\theta) - R.\theta.cos(\theta)$.

(3) $x_c - x = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'y" - x"y'}$, $y_c - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y" - x"y'}$: calculs rationnels ; intersect. de 2 droites, enveloppe.

(4) Si $\mathcal{C}$ est convexe (pas de rebroussement), ayant $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| \leqslant \mid \mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 \mid$, forcément un cercle de courbure (ou osculateur) est intérieur à l'autre ! (cf. encore les développantes de cercle.)

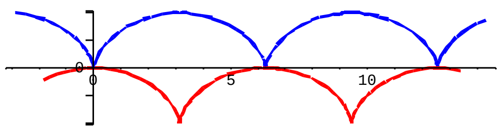
39.4.3 Autre exemple en paramétriques

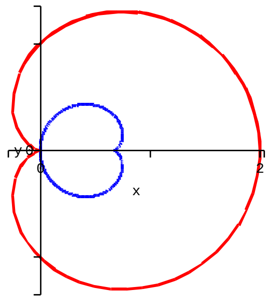
Développée de la cycloïde $\left\{\begin{array}{l} x = a[t - sin(t)] \\ y = a[1 - cos(t)] \end{array}\right.$ $\boxed{\text{Rayon}}$ On a $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = ... = 2a.sin\dfrac{t}{2}\begin{pmatrix} sin(t/2) \\ cos(t/2) \end{pmatrix}$

d'où : $\underline{ds = 2a \mid sin\dfrac{t}{2} \mid dt}$

et $tan(\alpha) = cot\dfrac{t}{2} = tan(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2})$; donc ici : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2} + k\pi$; $\underline{d\alpha = \dfrac{-1}{2}dt.}$ $\underline{\mathcal{R} = -4a. \mid sin\dfrac{t}{2} \mid}$

$\boxed{\text{Puis } C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}}$ donne ... $\left\{\begin{array}{l} x_c = a[t + sin(t)] \\ y_c = a[-1 + cos(t)] \end{array}\right.$. Un dessin montre que c'est une nouvelle cycloïde, ce qui se prouve : $\left\{\begin{array}{l} X_c = x_c - a\pi = a[\theta - sin(\theta)] \\ Y_c = y_c + 2a = a[1 - cos(\theta)] \end{array}\right.$ où $\theta = t - \pi$!





39.4.4 Autre exemple en polaires

Développée de la cardioïde : $\rho = a(1+cos(\theta))$. Rayon de courbure vu. Prenons $\theta \in [-\pi, \pi]$, c'est permis :

$\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{M}/d\theta}{ds/d\theta} = \begin{pmatrix} -sin(\theta/2) \\ cos(\theta/2) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}_1}$; $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -cos(\theta/2) \\ -sin(\theta/2) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}_1}$ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{N}) = \pi + \dfrac{\theta}{2}$; $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{N}) = \pi + \dfrac{3.\theta}{2}$

$\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -cos(3\theta/2) \\ -sin(3\theta/2) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}}$. [ou ch. Matrices : $\boxed{X = P.X'}$ pour changement de bases des vecteurs.]

$C = M + \mathcal{R}\overrightarrow{N}$ conduit à $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho.cos(\theta) \\ \rho.sin(\theta) \end{pmatrix} + \dfrac{4}{3}a.cos\dfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -cos(3\theta/2) \\ -sin(3\theta/2) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}}$, $\rho = a(1 + cos(\theta))$.

Alors : $sin(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[sin(a + b) + sin(a - b)]$; $cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a + b) + cos(a - b)]$ donnent

$\left\{\begin{array}{l} x_c = \dfrac{a}{3}[cos(\theta) - cos^2\theta] + \dfrac{2}{3}a \text{ ; et} \\ y_c = \dfrac{a}{3}[sin(\theta) - sin(\theta)cos(\theta)] \end{array}\right.$ Donc $\left\{\begin{array}{l} X_c = x_c - \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a}{3}[1 - cos(\theta)].cos(\theta) \\ Y_c = y_c = \dfrac{a}{3}[1 - cos(\theta)].sin(\theta). \end{array}\right.$ dans $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ avec $\Omega(\dfrac{2a}{3}, 0)$; c'est-à-dire : $\rho = \dfrac{a}{3}[1 - cos(\theta)]$ est une équation polaire de la développée dans $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

On reconnait une nouvelle cardioïde trois fois plus petite, ce qui se prouve : posant $\varphi = \theta + \pi$, donc étant dans $(\Omega, -\overrightarrow{\imath}, -\overrightarrow{\jmath})$, une équation polaire est : $\rho = \dfrac{a}{3}[1 + cos(\varphi)]$.

39.5 Des compléments

39.5.1 D'autres longueurs (pas toujours calculables !)

1. Arc de parabole [cartésiennes] $x^2 = 2py,\ 0 \leqslant x \leqslant p$.

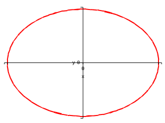
On écrit $x \longmapsto \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{x^2}{2p} \end{cases}$ <u>x paramètre</u> ! Alors $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ x/p \end{pmatrix}$ donc : $\underline{ds = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{p^2}}.dx}$.

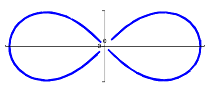
d'où $L = \displaystyle\int_0^p \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}.dx$. Reste le calcul : c'est une intégrale <u>irrationnelle</u> difficile.

Posons $x = p.sh(t)$; alors $x = p \Longleftrightarrow sh(t) = 1 \Longleftrightarrow t = Argsh(1) = ln[1+\sqrt{1+1^2}]$

et $L = \displaystyle\int_0^{ln(1+\sqrt{2})} ch(t).p.ch(t)dt = p.\int_0^{ln(1+\sqrt{2})} \frac{ch(2t)+1}{2}dt = ... = p.\frac{\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2})}{2}$

2. Ellipse $\begin{cases} x = acos(t) \\ y = bsin(t) \end{cases}$ $\underline{ds = \sqrt{a^2sin^2(t)+b^2cos^2(t)}dt}$. Mais intégrale non calculable exactement !





- Intégrales dites <u>"elliptiques"</u> pour et :
- Idem : la longueur de la lemniscate : $\rho = a.\sqrt{cos(2\theta)}$ est, elle aussi, inconnue. Enfin :
- Dans $\mathbb{R}^3$: $(ds)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 = (d\rho)^2+(\rho d\theta)^2+(dz)^2 = (dr)^2+(rd\theta)^2+(rsin(\theta)d\varphi)^2$.

39.5.2 Cercle osculateur

On cherche le cercle <u>qui approche le mieux la courbe : osculateur</u>. Avec de bonnes hypothèses :

(1) $y_{courbe} = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f"(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\epsilon(x) = \underline{\dfrac{f"(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\epsilon(x)}$ et

(2) cercle : $x^2+(y-R)^2 = R^2$ soit $x^2+y^2-2Ry = 0$ ou $y = R-\sqrt{R^2-x^2}$ car $x = 0 \Longrightarrow y = 0$.

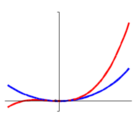
Donc $y_{cercle} = R - R(1-\dfrac{x^2}{R^2})^{1/2} = \underline{\dfrac{x^2}{2R} + 0.x^3 + cte.x^4 + x^4.\epsilon(x)}$. $[f"(0) > 0,\ R > 0$ supposé$]$

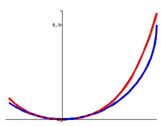
Pour que la différence soit la plus petite possible, un et un seul cercle : $\boxed{R = \dfrac{1}{f"(0)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2.y_{courbe}}}$

Nous voyons que ceci est exactement <u>le rayon de courbure : $\mid \mathcal{R} \mid = \mid 1/f"(0) \mid$ si $f'(0) = 0$</u>. De plus :

– $\boxed{\text{En général, le cercle de courbure traverse la courbe en } M}$

car $y_{courbe} - y_{cercle} \underset{x\to 0}{\sim} k.x^3$, $k = f^{(3)}(0)/3! \neq 0$: 1er dessin.



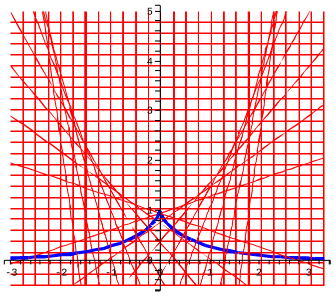
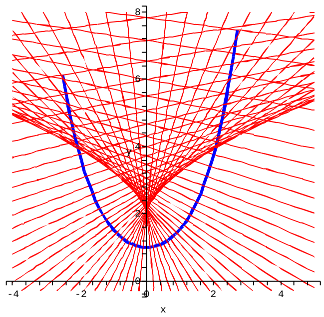
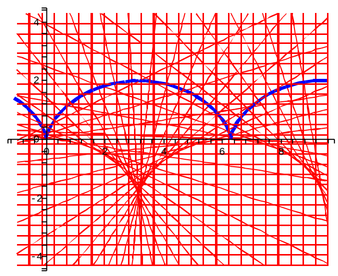


– <u>Cas particulier $k = 0$</u>, par exemple si f paire : souvent $y_{courbe} - y_{cercle} \underset{x\to 0}{\sim} l.x^4$, $l \neq 0$:

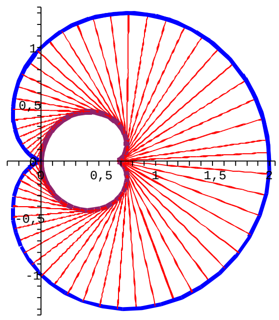
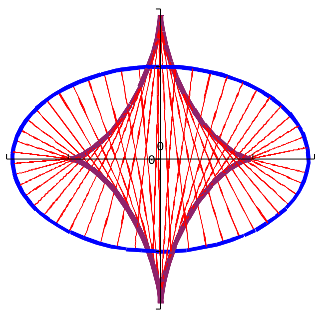
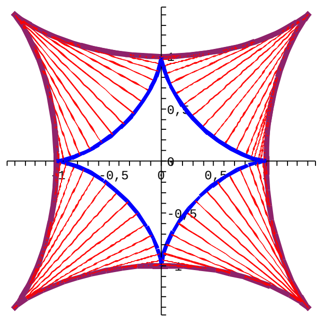
on dit $\boxed{\text{cercle surosculateur}}$ 2ème dessin (donc cas assez particulier).

39.5.3 La développée comme "enveloppe des normales" (Spé)

1. Le théorème sur la "développée" donne une autre méthode de calcul : <u>enveloppe des normales</u>
   - Développée de la Tractrice (en bleue)=la Chainette (en rouge)
   - Développée de la Chainette (en bleue)=la Courbe en rouge.
   - Développée de la Cycloïde (en bleue)=la Cycloïde translatée (en rouge)

2. Inversement, on dit que Γ est **<u>une</u> "développante"** de $\mathcal{C}$. [Ici, on a limité les traits]
   - Développée de la Cardioïde (en bleue)=Une Cardioïde semblable (en rouge)
   - Développée de l'Ellipse (en bleue)=Une astroïde-dilatée (en rouge)
   - Développée de l'Astroïde (en bleue)=Une Astroïde semblable (en rouge)

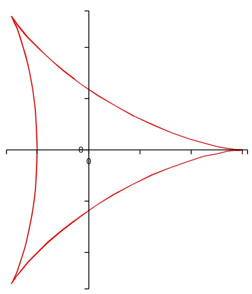
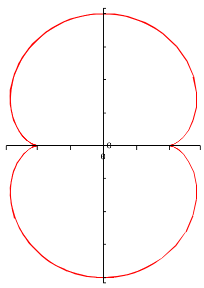
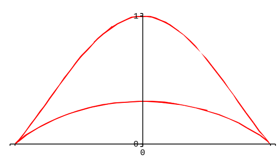




3. <u>Dans $\mathbb{R}^3$</u>, on a seulement une courbure arithmétique $\dfrac{1}{\mathcal{R}} = \|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\|$.

   On parle aussi de "torsion"...

4. Voici enfin 3 autres courbes (de la feuille d'exercices, verso) en compléments !

   Respectivement : La Deltoïde. La Néphroïde. Le Bicorne.

M+ **Exercices: Longueur/courbure des courbes planes** **PTSI**

---

1. Longueur de courbes

   (a) Hélice circulaire : $t \in [0, \frac{2.\pi}{\omega}] \mapsto F(t) = \begin{cases} x = r.cos(\omega.t) \\ y = r.sin(\omega.t) \\ z = h.t. \end{cases}$ (b) Astroïde $\begin{cases} x = a.cos^3(t) \\ y = a.sin^3(t) \end{cases}$

   (c) Arche de cycloïde $\begin{cases} x = a[t - sin(t)] \\ y = a[1 - cos(t)] \end{cases}$ (d) (*) Arc de parabole [cartésiennes] $x^2 = 2py, x \in [0, p]$

   (e) Cardioïde $\rho = a[1 + cos(\theta)]$ (f) Spirale logarithmique $\rho = ae^{m.\theta}, \theta \in]-\infty, \theta_0]$; $m > 0$.
   [On trouve $s(\theta) = k.\rho(\theta)$; $k > 1$. (*) Réciproque ?]

   (g) (*) Deltoïde $\begin{cases} x = a.[2.cos(t) + cos(2t)] \\ y = a.[2.sin(t) - sin(2t)] \end{cases}$ (h) (*) Néphroïde $\begin{cases} x = a.[3.cos(t) - cos(3t)] \\ y = a.[3.sin(t) - sin(3t)] \end{cases}$

   (i) (*) Bicorne $\begin{cases} x = a.cos(t) \\ y = \dfrac{a.sin^2(t)}{2 + sin(t)} \end{cases}$ (j) (*) $\dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ et $\rho = a.cos(2\theta)$ ont même longueur.

2. Trouver les courbes
   (a) dont la courbure est toujours nulle.
   (b) dont la courbure est constante non nulle [i.e. $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$].

3. Rappel : si $y = f(x)$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ $\boxed{\mathcal{R} = \dfrac{1}{f''(0)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2y}}$ (au signe près).
   (a) Rayon de courbure de la parabole $x^2 = 2py$ au sommet ?
   (b) Cas de l'ellipse $x = a.cos(t), y = b.sin(t)$ aux sommets A et B ?
   Equation de $\mathcal{D} \perp (A, B)$ passant par $I(a, b)$? Vérifier que C_A, C_B sont sur $\mathcal{D}$!
   (c) (*) En général, quelle est la position du cercle de courbure/ une courbe ? (cf. cours et dessin)

4. Rayon de courbure en tout point et lieu du centre de courbure : développée
   (a) Tractrice $\begin{cases} x = a.[u - th(u)] \\ y = a/ch(u) \end{cases}$ cf. dessin
   (b) Ellipse $\begin{cases} x = a.cos(t) \\ y = b.sin(t) \end{cases}$ cf. dessin
   (c) Cycloïde (équation ci-dessus) cf. dessin
   (d) Spirale logarithmique (idem ; un changement de bases à faire pour le vecteur $\overrightarrow{T}$!)
   (e) (*) Cardioïde (idem) cf. dessin
   (f) (*) Chainette $y = a.ch(x/a)$ cf. dessin
   (g) (*) Parabole $x^2 = 2py$. Si $U = proj_{\perp}(C, (FM))$ voir que F est le milieu de $[MU]$
   (h) (*) Hyperbole équilatère $\Gamma : xy = a^2$. Voir que $C = M + 1/2.\overrightarrow{NM}$ où $N = Normale \cap \Gamma$.
   (i) (*) Astroïde. Trouver $x_c = a.[c^3 + 3c.s^2]$, $y_c = a.[s^3 + 3c^2.s]$ où $c = cos(t), s = sin(t)$
   [c'est surtout pour voir cette notation ! et] nouvelle astroide.

5. (*) Pour la cycloïde, avec une arche centrée sur Oy, vérifier que : $\mathcal{R}^2 + s^2 = 16a^2$.
   [En fait, on peut chercher toutes les courbes vérifiant cette propriété].

Chapitre 40

Continuité des fonctions de plusieurs variables

On a vu les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puis de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: $t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t)$.
Maintenant voyons celles de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$; $p = 2,\ 3$: c'est plus difficile.

40.1 Exemples géométriques

40.1.1 Cas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Retenir $\boxed{z = f(x,y) \text{ est l'équation en cartésiennes, d'une surface de } R^3 \text{, en général.}}$

Des exemples :

- $z = f(x,y) = 1 - 2x + 3y$: équation d'un plan affine (non vertical).
- $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: $1/2$ sphère de centre O.
- $2p.z = x^2 + y^2$:
  Surface de révolution autour de Oz (faire $z = cte$) ; paraboloïde de révolution autour de Oz.
- $z.tan(\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \pi/2$:
  Surface de révolution autour de Oz (faire $z = cte$) ; puis $1/2$ cône de révolution (sommet O, axe Oz).
- $a.z = x^2$, $a > 0$; y n'intervenant pas : cylindre parabolique d'axe Oy (gouttière). Dessins ? [1]

40.1.2 Cas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est $\boxed{\text{affine}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; f bijective $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.
- $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ sin(xy) \end{pmatrix}$ **est non affine** **mais définie sur** $\mathbb{R}^2$**.**

Exercices

1) Domaine de définition de f : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x-y} \\ ln(xy-1) \end{pmatrix}$: dessin dans le plan O, x, y ?

2) Revoir l'inversion géométrique de $\mathbb{R}^2$: $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ $[f^{-1} = f]$.

---

[1] Sur les deux derniers cas

1) Si : $\forall \lambda, (x,y,z) \in S \Longrightarrow (\lambda.x, \lambda.y, \lambda.z) \in S$, on dit cône de sommet O.

2) De même si : $\forall y, (x,0,z) \in S \Longrightarrow (x,y,z) \in S$, on dit cylindre d'axe Oy.

40.1.3 Cas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (surface en paramétriques)

– $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = 1 + 7u + v \\ y = 3u - v \\ z = 3 - u + 2v \end{pmatrix}$: $M = M_0 + u.\overrightarrow{a} + v.\overrightarrow{b}$ $\underline{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \text{ libres}}$: $\begin{pmatrix} \underline{\text{plan affine}}\ \text{dét}(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0 \\ \text{ou bien : } (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \centerdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \end{pmatrix}$

– Inversement, partant d'une équation cartésienne, trouvons une représentation paramétrique :

Partons de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Posons $\dfrac{z^2}{c^2} = cos^2(v)$ et $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = sin^2(v)$.

Alors $\dfrac{x^2}{a^2.sin^2(v)} + \dfrac{y^2}{b^2.sin^2(v)} = 1$ ... On peut donc le paramétrer : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = a.cos(u).sin(v) \\ y = b.sin(u).sin(v) \\ z = c.cos(v) \end{pmatrix}$.

40.1.4 Cas $f : \mathbb{R}^3 \to \underline{\mathbb{R}}$: fonction numérique de 3 variables

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz$; on dit que $f(x, y, z) = k$ est $\boxed{\text{une ligne de niveau}}$ de f.
Les "lignes de niveau" (ici Surfaces [2]) sont des $\boxed{\text{sphères}}$ sous réserve que $Rayon^2 = k + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}^+$.

40.2 Exemples calculatoires

40.2.1 Produit scalaire

$f = <, > :\quad \overrightarrow{u}(x, y, z), \overrightarrow{v}(x', y', z') \in \mathbb{R}^6 \longmapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \in \mathbb{R}$ est polynômiale.
Par composition avec $\sqrt{\ }$, on obtient $g : \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} \in \mathbb{R}^+$.

40.2.2 Produit mixte

Dét : $\overrightarrow{u}(x, y, z), \overrightarrow{v}(x', y', z'), \overrightarrow{w}(x", y", z") \in \mathbb{R}^9 \longmapsto \text{Dét}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathbb{R}$ est polynômiale.

40.2.3 Produit vectoriel

Soit f : $\overrightarrow{u}(x, y, z), \overrightarrow{v}(x', y', z') \in \mathbb{R}^6 \longmapsto f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} f_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = yz' - zy' \\ f_2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = zx' - xz' \\ f_3(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On dit que f_1, f_2, f_3 sont les applications coordonnées de f. Chacune ici polynômiale de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour la continuïté, on peut étudier les composantes (ou applications coordonnées) l'une après l'autre.
- Ce qui fait qu'on peut (pour la continuïté) se limiter aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

40.2.4 Applications partielles

Définition

Soit $A(a_1, ..., a_p) \in \mathcal{D}_f$. Fixant $p - 1$ variables, on obtient les p applications partielles en A : $\varphi_1 : x_1 \mapsto f(x_1, a_2, ..., a_p)$; ... ; $\varphi_p : x_p \mapsto f(a_1, a_2, ..., x_p)$ chacune fonction d'une variable. A ne pas confondre avec les applications coordonnées (du numéro précédent)

Exemple

Soit la fraction rationnelle $f(x, y) = \dfrac{x.y}{x^2 + y^2}$ si$(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$. Applications partielles en O ?

- Hors de O, fraction rationnelle et le dénominateur ne s'annulle pas : aucun problème (cf. §III).
- En $O(0, 0)$, les applications partielles sont $\varphi_1 : x \longmapsto 0$ même si $x = 0$; et $\varphi_2 : y \longmapsto 0$ idem.

[2] Remarque. Les surfaces du second degré sont appelées quadriques. Comme les coniques, elles sont toutes connues.

40.3 Continuité des fonctions de plusieurs variables

40.3.1 Définitions

1. Normes Sur $\mathbb{R}^p$, pour $\vec{u} = (x_1, ..., x_p)$, on a 3 normes usuelles [définition déjà vue]
   - $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_p^2}$ (norme euclidienne) ;
   - $\|\vec{u}\|_1 = | x_1 | + ... + | x_p |$ et :
   - $\|\vec{u}\|_\infty = max[| x_1 |, ..., | x_p |]$.

   La norme 1, par exemple, ne provient pas d'un produit scalaire car ne vérifie pas le théorème du parallélogramme : $\vec{\imath}(1,0)$; $\vec{\jmath}(0,1) \in \mathbb{R}^2$ et $\|\vec{\imath}+\vec{\jmath}\|_1^2 + \|\vec{\imath}-\vec{\jmath}\|_1^2 = 4+4 \neq 2.(\|\vec{\imath}\|^2 + \|\vec{\jmath}\|^2) = 4$.

   Exercice

   Dessiner les 3 "boules unités" fermées $\{M : \|OM\| \leqslant 1\}$ dans le cas de $\mathbb{R}^2$.

2. Limite finie. Continuïté
   - $\mathcal{V}$ est un voisinage de M_0 s'il contient une boule de centre M_0 de rayon > 0 (norme quelconque) !
   - Soit f définie dans un voisinage de M_0. On dit que $f(M)$ tend vers $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ quand M tend vers $M_0 \in \mathbb{R}^p$ si $\|f(M) - \vec{l}\|$ tend vers 0 quand : $\|\overrightarrow{M_0M}\|$ tend vers 0 (normes quelconques).
   - On dit que f est C^0 en M_0 si : $f(M) \underset{M \to M_0}{\longrightarrow} f(M_0)$.

   Exercice (norme quelconque ici.) Les "projections" (ou plutôt les "formes coordonnées")

   $p_i : \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto y_i \in \mathbb{R}$, sont C^0. [Si $Y_0 = \begin{pmatrix} (y_1)_0 \\ ... \\ (y_n)_0 \end{pmatrix}$ on a : $| y_i - (y_i)_0 | \leqslant \|Y - Y_0\|$.]

40.3.2 Théorèmes généraux

1. Enoncés
   - La somme de fonctions C^0 est C^0.
   - Si $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est C^0 et $f : C^0$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, alors : $M \longmapsto \varphi(M).f(M)$ est C^0.
   - Si f, g C^0 de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, alors $M \longmapsto f(M)/g(M)$ est C^0, là où le dénominateur non nul.
   - Ajoutons la composition. $(f : \mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ $C^0)$ $\Longrightarrow$ gof : C^0.
2. Conséquences
   - Les fonctions polynômiales $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont C^0 partout.
   - Les fonctions rationnelles $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont C^0 sur leur domaine de définition.
   - Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de composantes (ou coordonnées) $f_1, ..., f_n$.

   Avec $f_i(M) = p_i o f(M)$ et $f(M) = f_1(M)\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + f_n(M)\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$, on déduit $\boxed{fC^0 \Leftrightarrow \forall i, f_iC^0.}$

40.3.3 Exercice classique (et modèle)

Continuïté de $f(x,y) = \dfrac{x.y}{x^2+y^2}$ **si** $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$ **?**

- **Hors de** $O(0,0)$ f **est continue comme fraction rationnelle avec dénominateur non nul.**
- **En** O**, les théorèmes généraux ne s'appliquent pas ;**

on voit que les applications partielles, d'une variable, sont continues, mais

f n'est pas continue en O : s'approcher de O sur la demi-droite $y = x > 0$: $f(x,x) = \frac{1}{2} \underset{x \to 0}{\not\longrightarrow} 0$.

40.3.4 Difficulté

1. Attention fC^0 en $A \Longrightarrow$ chacune des p applications partielles $\varphi_1, ..., \varphi_p$ est continue : φ_1 en a_1 fonction d'une variable, ... , φ_p en a_p. Mais réciproque fausse : vu sur l'ex. traité.

   Démonstration

   $\Longrightarrow$ Car une application partielle est une manière particulière de tendre vers $A(a_1, ..., a_p)$.

2. Exercices **en compléments** Peut-on prolonger par continuïté :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 2) $g(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ (*) 3) $h(x,y) = \dfrac{y.x^3}{(y-x^2)^2+x^6}$? (*)

Réponses :

1) f est une fraction rationnelle définie continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash O(0,0)$. En O :

. La 1ère application partielle est $x \neq 0 \mapsto \varphi_1(x) = f(x,0) = x$; donc le seul prolongement éventuellement continue ne peut être que $\varphi_1(0) = \tilde{f}(0,0) = 0$.

. Inversement avec $\tilde{f}(0,0) = 0$: $f(x,y) - \tilde{f}(0,0) = \dfrac{\rho^3[cos^3(\theta)+sin^3(\theta)]}{\rho^2} = \rho.[\text{bornée}] \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. $\tilde{f}C^0(\mathbb{R}^2)$.

2) g est définie continue (par composition) sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \Delta(y=x)$. En $M_0(x_0,x_0)$:

. La 1ère application partielle (à titre indicatif) est $x \neq x_0 \mapsto \varphi_1(x) = \dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}$ donc la seule manière que φ_1 (et donc g) soit continue oblige de poser $\tilde{g}(x_0,x_0) = e^{x_0}$.

. Inversement si $\tilde{g}(x_0,x_0) = e^{x_0}$, par le théorème des accroissements finis, $\exists c \in [x,y] : e^y - e^x = (y-x)e^c$; donc $e^c \underset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\longrightarrow} e^{x_0}$. D'où $\tilde{g}$ (g prolongée) est ainsi continue sur $\mathbb{R}^2$. [A bien voir]

3) h est une fraction rationnelle définie continue là où le dénominateur est non nul : sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash O(0,0)$.
Tout le problème est en $O(0,0)$:

. La 1ère application partielle est $x \neq 0 \mapsto \varphi_1(x) = 0$; donc φ_1 C^0 en $x = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(0) = h(0,0) = 0$.

. La 2ème application partielle est $y \neq 0 \mapsto \varphi_2(y) = 0$; donc φ_2 C^0 en $y = 0 \Leftrightarrow \varphi_2(0) = h(0,0) = 0$.

. Tendons vers O selon un trajet rectiligne quelconque, non vertical : $y = a.x, a \neq 0$ fixé (sinon, vus).

Alors $h(x,ax) = \dfrac{a.x^4}{x^2(a-x)^2+x^6} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a.x^4}{a^2.x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Peut-on donc dire que poser $\tilde{h}(0,0) = 0$ rend h C^0 ?

Non ! ce n'est pas vrai : Si $x \neq 0$, $h(x,x^2) = \dfrac{x^5}{x^6} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$! (arc de parabole $y = x^2$.)

En particulier retenir que la continuïté des applications partielles n'entraine pas celle de la fonction.

40.3.5 Propriétés des fonctions C^0

1. Généralisations

• Le théorème en une variable "fC^0 sur un segment est bornée et atteind ses bornes" se généralise : f continue sur un fermé-borné de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteind ses bornes".

Mais 1) qu'est-ce un fermé ? 2) un borné ?
Pour 2) c'est naturel : une ellipse partage $\mathbb{R}^2$ en 2 parties ; l'une bornée, l'autre non.
Pour 1) disons (intuitivement) qu'une partie est fermée si elle contient sa "frontière" (non définie !).
Exemples dans $\mathbb{R}^2$: l'intérieur d'un triangle avec son contour ; un disque avec le contour ; une demi-droite fermée ; (une droite aussi est fermée). Dans $\mathbb{R}^3$: un plan est fermé. $\mathbb{R}^2 \backslash O$ non fermé !

• Le théorème des valeurs intermédiaires (à bien revoir pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se généralise aussi.

2. Exercice corrigé Pour $M \in$Triangle-fermé, minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$. Dessin ?

Solution $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ est continue (si $M(x,y)$, elle est polynomiale) sur un "fermé-borné", donc posssède un minimum atteint. Mais attention : le minimum peut être atteint en plusieurs points ! (Penser aux fonctions d'une variable). Ici, on a une solution aisée :
La fonction scalaire de Leibniz donne : $f(M) = 3.MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ où G isobarycentre.
Donc minimum atteint uniquement en G et valeur connue ; de plus, cette solution montre qu'on a un minimum en G même si $M \in \mathbb{R}^2$ (le plan) ! Finir : ... $GA^2 + GB^2 + GC^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3$.

3. **Complément** Autre Exercice corrigé (Transition avec le chapitre suivant) (*)
Pour $M\in$Triangle-fermé, soit $x=\delta(M,BC); y=\delta(M,CA); z=\delta(M,AB)$, maximum de $x.y.z$?

Solution en plusieurs étapes

1) Déjà, M est sur un plan ; 2 degrés de liberté ; il y a un lien entre x,y et z. Avec AMB, BMC, CMA et $a=BC$,..., on a $\underline{a.x+b.y+c.z=2S=Cte.}$ Car $c.z=2.Aire(AMB)$!

2) Ensuite $f(x,y)=x.y.\dfrac{2S-a.x-b.y}{c}=\dfrac{1}{c}.[x.y.(2S-a.x-b.y)]$ est continue sur le domaine : $\underline{0\leqslant x;\ 0\leqslant y;\ 2S-ax-by\geqslant 0}$ qui est un fermé-borné. Donc maximum (et minimum) atteint.
Dessin ? (En repère orthonormé Oxy, on a le triangle rectangle : $O(0,0)$ $P(0,\dfrac{2S}{a})$ $Q(0,\dfrac{2S}{b})$.)

3) Le maximum peut-il être atteint sur la frontière ?
Non car alors $x=0$ ou $y=0$ ou $2S=ax+by\Leftrightarrow z=0$: c'est le minimum du produit.
Ainsi le maximum (absolu) est atteint en un point "intérieur" (on dit maximum local) !

4) Pensons aux fonctions d'une variable : un maximum local, si f dérivable, se décèle par $f'(x_0)=0$.
On fait pareil ici (c'est là qu'on anticipe !) : au maximum local, vu les dérivées partielles, forcément

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\end{array}\right.$$

Ce qui donne, comme $y\neq 0,\ x\neq 0$:

$$\left\{\begin{array}{l}2S-ax-by-ax=0\\ 2S-ax-by-by=0\end{array}\right.$$

Soit encore, en faisant jouer des rôles symétrique à x,y,z :

$$ax=by=2S-ax-by=c.z=\frac{ax+by+cz}{3}=\frac{2S}{3}=cte$$

x,y,z connu : un seul point candidat ; comme on sait que le maximum est atteint au moins une fois (sans calcul, par notre continuïté sur un fermé-borné), c'est le bon ! Maximum en ce point.

5) Reste à savoir si on connait ce point géométriquement ! Oui, une question de barycentre :
• Admettons un moment que M (quelconque, intérieur au triangle) est barycentre de $\begin{pmatrix}A & B & C\\ aireMBC\geqslant 0 & aireMCA\geqslant 0 & aireMAB\geqslant 0\end{pmatrix}$. Comme $ax=by=cz$, on déduit que

$$\boxed{\text{Le maximum est atteint ici en un seul point : l' isobarycentre } M=G\,;\ \text{et il vaut } \dfrac{8.S^3}{27.a.b.c}.}$$

• Montrons le résultat utilisé pour finir.
Déjà $\overrightarrow{MA},...,\overrightarrow{MC}$ liés (3 vecteurs en dim 2) ; donc $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$; puis A,B,C non alignés $\Longrightarrow \alpha+\beta+\gamma\neq 0$ (laissé). Alors, en faisant le produit vectoriel avec $\overrightarrow{MA}$ et ayant ici $\alpha;\beta;\gamma\geqslant 0$, on termine sachant que $\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\|=2.Aire(TriangleMCA)$:

$$\frac{\beta}{\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\|}=\frac{\gamma}{\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MA}\|}=...\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MB}\|}\ !$$

(les coefficients barycentriques étant définis à une constante multiplicative non nulle près).

M+ **Exercices: Continuïté des fonctions de plusieurs variables** **PTSI**

---

1. Domaine de définition de
   (a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{1-(x-2)^2-y^2}}$ (point isolé en O !)
   (b) $f(x,y) = ln\ \dfrac{y}{x^2+y^2-1}$ (f C^0 par composition sur le domaine)
   (c) (*) $f(x,y) = Arcsin\ \dfrac{2x+y}{x-y}$? (idem).

2. $\boxed{\text{Peut-on prolonger par continuïté ?}}$
   $f_a(x,y) = \dfrac{|x+y|^3}{x^2+y^2}$ en $O(0,0)$? $g(x,y) = \dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^4}$ (Noter : $2\,|\,x\,|\,y^2 \leqslant x^2+y^4$)

3. Interprétation de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
   (a) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ (isométrie affine : laquelle ?)
   (b) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'=x\\y'=2y+3\end{pmatrix}$ (application affine à décrire)
   (c) $M(z) \mapsto M'$ $(z' = a.z+b)$, $a = r.e^{i.\alpha} \neq 0$, $b = \alpha + i.\beta$? (connue)
   (d) (*) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \dfrac{k}{x^2+y^2}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$: domaine ? fof ? (inversion géométrique $z' = \dfrac{k}{\overline{z}}$)

4. Interprétation géométrique de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
   (a) Soit le paraboloïde de révolution $2pz = x^2+y^2$; et l'affinité : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x'=x\\y'=2y\\z'=z\end{pmatrix}$.
   Equation du paraboloïde elliptique image (PE) ? Dessin ?
   (b) Etudier diverses sections planes du paraboloïde hyperbolique (PH) $2pz = x^2 - y^2$. Dessin ?
   Que dire des familles de droites $\mathcal{D}_a \begin{cases} x-y=a \\ 2pz = a(x+y)\end{cases}$ et $\mathcal{D}'_b \begin{cases} x+y=b \\ 2pz = b(x-y)\end{cases}$ pour (PH) ?
   (c) (*) En sens inverse : équation du cône de révolution d'axe Oz, de demi-angle au sommet $\pi/6$?

5. (*) Dessins et paramétrages.
   (a) Reconnaitre la courbe $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ dans Oxz. Puis la surface (de révolution) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
   Image par l'affinité $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'=x\\y'=b/a.y\\z'=z\end{pmatrix}$ (H_1 comme hyperboloïde à 1 nappe) ?
   Justifier que $x = a.cos(u).ch(v), y = b.sin(u).ch(v), z = c.sh(v)$ est un paramétrage possible.
   (b) Reconnaitre $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ dans Oxz. Puis la surface (de révolution) $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
   Image par l'affinité précédente (H_2 : hyperboloïde à 2 nappes) ? Dessins ? Paramétrage ?

6. (*) Le tore.
   Décrire et dessiner la surface (de révolution/Oz) d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0$.

Chapitre 41

Dérivation des fonctions de plusieurs variables

41.1 Dérivées partielles (d.p.)

41.1.1 En un point

On appelle d.p. de f en $A(a_1, ..., a_p)$, par rapport à la 1ère variable, la dérivée de la 1ère application partielle en a_1 $[\varphi_1'(a_1)]$. On note $f'_{x_1}(A)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A)$. Idem pour les $p-1$ autres d.p. en A.

Exemple

Soit $(x, y) \longmapsto f(x, y) = sin(e^x.y) + g(x.y^2) + 2.Arcsin(x)$, g étant forcément d'une variable [sinon $g(-,-)$], et g supposée dérivable. Calcul de : $f'_x(0,0)$; $f'_y(0,0)$; $f'_x(x_0, y_0)$; $f'_x(y, x)$.

Réponse

- En $O(0,0)$
  $\varphi_1 : x \longmapsto sin(0) + g(0) + 2.Arcsin(x)$; donc $f'_x(0,0) = 2$.
  Et de même $\varphi_2 : y \longmapsto sin(y) + g(0) + 0$; donc $f'_y(0,0) = 1$.
- En (x_0, y_0)
  Pour $f'_x(x_0, y_0)$ y bloqué en y_0 ; x varie, on dérive, puis $x = x_0$
  $f'_x(x_0, y_0) = e^{x_0}y_0.cos(e^{x_0}y_0) + y_0^2.g'(x_0.y_0^2) + \dfrac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}$ g fonction d'une variable, g'_x serait incorrect
- Donc : $f'_x(y, x) = e^y.x.cos(e^y.x) + ...$

Ainsi, à bien voir

- Dans la notation abusive $f'_x(x, y)$ les deux "x" n'ont pas vraiment de rapport ! Jamais on ne verra $f'_0(0, y)$ (absurde) ! L'énoncé doit fixer les notations dès le début du problème.
- On ferait mieux de noter $f'_1(x, y)$, le 1 désignant la première variable qui peut être parfois u, d'ailleurs. (Exemple $(u, v) \longmapsto f(u, v)$!) Maple note, quant à lui : $D[1](f)(x, y)$.

41.1.2 Sur un domaine

On fait de même en chaque point A où c'est possible.
On obtient p dérivées partielles ; et chacune est fonction de p variables !

Exemple Dans le passage $(\rho, \theta) \mapsto (x, y)$ calculer les matrices jacobiennes $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$

Solution [Jacobienne vient de "Jacobi"]

1) On a $x = \rho.cos(\theta), y = \rho.sin(\theta)$ d'où $J = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -\rho.sin(\theta) \\ sin(\theta) & \rho.cos(\theta) \end{pmatrix}$ de déterminant (noté) $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$.

2) Pour la deuxième matrice :

Attention $\dfrac{\partial\rho}{\partial x} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial x}{\partial \rho}}$, comme on va le voir ! (Quand on dérive/x, y est fixé, mais pas θ).

On part de $\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2\,;\quad tan(\theta) = y/x.}$ alors $2.\rho.\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 2x...$ et $[1 + tan^2(\theta)].\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2}...$

D'où la matrice : $K = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ \dfrac{-sin(\theta)}{\rho} & \dfrac{cos(\theta)}{\rho} \end{pmatrix}$: $\underline{K = J^{-1}.\quad \text{dét}(K) = \dfrac{D(\rho,\theta)}{D(x,y)}}$ $= 1/\text{dét}(J)$ (dét. jacobien).

41.1.3 Fonctions C^1 (*)

1. Attention ! **En** $\boxed{\textbf{une}}$ **variable,** on sait que : f dérivable en $x_0 \Longrightarrow f$ continue en x_0.
   $\boxed{\textbf{Faux en 2 variables}}$ **: exemple vu de fonction ayant des** $d.p.$ **en** M_0 **mais non continue**
   Soit $f(x,y) = \dfrac{x.y}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$. f non C^0 en O déjà vu : s'approcher sur $x = y$.
   Mais les applications partielles en O, vues aussi, sont $\underline{\varphi_1(x) = 0,\ \forall x}$: dérivable en $x = 0$, $\varphi_1'(0) = 0$,
   d'où $f_x'(0,0)$ existe et vaut $f_x'(0,0) = 0$. De même $\underline{\varphi_2(y) = 0,\ \forall y}$; donc $f_y'(0,0) = 0$.

2. Théorème

Si f admet des $d.p.$ définies sur un voisinage de M_0 et continues en M_0, comme fonctions de plusieurs variables, alors f est continue en M_0. On dit : fC^1(admet des $d.p.$ définies sur un voisinage de M_0 et continues) $\Rightarrow fC^0$.

   . Ceci est un résultat théorique.
   En effet, si on l'applique à $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$, il faudrait voir la continuité de $(x,y) \longmapsto f_x'(x,y)$ et $(x,y) \longmapsto f_y'(x,y)$ d'une part ; et d'autre part, c'est une condition suffisante !
   . Démonstration
   Cas de fonction de 2 variables à valeur dans $\mathbb{R}$ (Si dans $\mathbb{R}^n$: chaque composante). On écrit
   $$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x_0,y)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0)]!$$
   L'égalité des accroissements finis en une variable pour fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ donne
   $$\exists x_1 \in [x_0,x]; y_1 \in [y_0,y] : f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0).f_x'(x_1,y) + (y-y_0).f_y'(x_0,y_1)$$
   Comme $f_x'(x_1,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} f_x'(x_0,y_0)$ et analogue l'autre, la différence tend donc vers 0. Fini.

41.1.4 Extremum local d'une fonction numérique ; c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Théorème

Si f numérique définie au voisinage de M_0, présente un extremum local en M_0 : $\exists r > 0\ /\{M : M_0M < r\} = \mathcal{B} \subset$ Domaine et $f_{/\mathcal{B}} \geqslant f(M_0)$, pour minimum local, alors on a l'implication : f possède des d.p. en $M_0 \Rightarrow$ Les d.p. sont nulles en M_0.

   Démonstration
   Elle est immédiate en ne faisant varier qu'une variable après l'autre. Mais réciproque fausse
   déjà **en 1 variable :** $f(x) = x^3$ $C^\infty(\mathbb{R})$ **vérifie** $f'(0) = 0$, **sans extremum local.**

2. $\boxed{\text{Exemple.}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, soit $I(3,0,-1)$ et le paraboloïde de révolution (P.R.) $z = x^2 + y^2$. Dessin ?
   Distance de I à $M \in$(PR) : minimum de : $IM^2 = (x-3)^2 + y^2 + [x^2+y^2+1]^2 = f(x,y) \in \mathbb{R}^+$?
   • Le domaine en (x,y) est ici $\mathbb{R}^2$, non fermé$-$borné : bien que f soit C^0, l'existence du minimum n'est donc pas acquise mais supposée ici vu le problème géométrique. Au minimum absolu (atteint en un ou plusieurs points !) on a un minimum local de fC^∞ car polynômiale. En un tel point M_0 :
   $$\begin{cases} 0 = f_x'(x_0,y_0) = 2(x_0-3) + 2.(x_0^2+y_0^2+1).2.x_0 \\ 0 = f_y'(x_0,y_0) = 2y_0 + 2(x_0^2+y_0^2+1).2.y_0\ . \end{cases}$$
   • On a un seul point candidat : $y_0 = 0$; $2x_0^3 + 3x_0 - 3 = 0$ ($x_0 \simeq 0,7; z_0 \simeq 0,5$) : donc c'est le bon !
   Remarque : si $g(x,y) = z - x^2 - y^2$, vérifier : $\overrightarrow{grad}(g)(M_0)$ colinéaire à $\overrightarrow{IM_0}$, comme vu plus loin.
   (Cette condition donne la même équation de degré 3 ...)

41.2 Calcul de d.p. de fonctions composées (*)

41.2.1 Cas de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $h(x_1, ..., x_p) = g[f(x_1, ..., x_p)]$; pour calculer $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, ..., x_p)$, on a une seule variable x_1.

C'est donc **connu :** $\underline{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, ..., x_p) = g'[f(x_1, .., x_p)].\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_p).}$

41.2.2 Cas de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ici $f : (x_1, ..., x_p) \longmapsto \begin{cases} f_1(x_1, ..., x_p) \\ ... \\ f_n(x_1, ..., x_p) \end{cases}$ et : $h(x_1, ..., x_p) = g[f_1(x_1, ..., x_p), f_2(x_1, ..., x_p), ..., f_n(x_1, ..., x_p)]$.

Par choix, les d.p. seront notées : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial g}{\partial y_n}$.

Théorème **[règle de la chaine]**

$$\boxed{\text{On a } f,\, g,\, C^1 \Longrightarrow gofC^1 \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x_1}(M) = \frac{\partial g}{\partial y_1}[f_1(M), ..., f_n(M)].\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_n}[..., ..., ...].\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(M)}$$

C'est-à-dire : On passe successivement en revue les n casiers de g en faisant des $+$. En exercice (*)

Exemples

1) Soit $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^1 et $F(\rho, \theta) = f[\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)]$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta)$.

[Notre "f" est la fonction "g" de ci-dessus]. Vérifier avec $f(x, y) = x^2 + y^2$. (**Donc** $f'_x(x, y) = 2.x$...)

Solution : On note les d.p. $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial \rho}, \dfrac{\partial F}{\partial \theta}$; toute autre notation exclue ; [donc $\dfrac{\partial f}{\partial(\rho.cos(\theta))}$ insensé !]

On a, par théorème, $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}[\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)].\dfrac{\partial(\rho.cos(\theta))}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}[\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)].\dfrac{\partial(\rho.sin(\theta))}{\partial \rho}$

Ou encore : $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}[\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)].cos(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}[\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)].sin(\theta)$.

Vérification : Calcul direct $F(\rho, \theta) = \rho^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = 2.\rho$.

Par notre formule $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = 2.\rho.cos(\theta).cos(\theta) + 2.\rho.sin(\theta).sin(\theta) = 2.\rho$. Idem.

2) Autre exemple (*) [1]

41.2.3 Cas de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Le cas général $gof(M) = h(M) = \begin{cases} h_1(M) \\ ... \\ h_m(M) \end{cases}$ n'est heureusement pas plus compliqué :

Appliquer ce qui précède à chaque h_k.

[1] **Complément.** Trouver f, C^0 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. [déjà vue au ch. Continuïté].

Solution. Montrons déjà que f est dérivable ! Soit $\alpha < \beta$. Une fonction C^0 est intégrable :
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x + y)dy = \int_\alpha^\beta f(x)dy + \int_\alpha^\beta f(y)dy = (\beta - \alpha)f(x) + cte$. Mais $x + y = t \Rightarrow g(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x + y)dy = \int_{x+\alpha}^{x+\beta} f(t)dt$ dérivable ; de dérivée $g'(x) = f(x + \beta) - f(x + \alpha)$! Donc $(\beta - \alpha).f$ et f dérivables.
Alors, en dérivant$/x$: $f'(x + y) = f'(x)$; d'où $f' = Cte$; donc $f(x) = ax + b$. Réciproque : $f(x) = a.x$.

41.3 Différentielle (*) (relire si trois variables)

41.3.1 Objectif

On a vu $\boxed{f\ C^1 \Rightarrow f\ C^0.}$ On va intercaler $\boxed{f\ C^1 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ différentiable} \\ \underline{\text{ou}} \text{ admet un } \mathrm{Dl}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ f\ C^0 \text{ et} \\ 2)\ f \text{ admet des d.p.} \end{cases}}$

Rappels

• Pour les fonction $\boxed{\text{d'une}}$ variable
$f\ C^1$ en $x_0 \Rightarrow f$ admet un $D.l.$ d'ordre 1 [ou différentiable] $\Leftrightarrow$ f dérivable [$f'(x_0)$ existe] $\Longrightarrow f\ C^0$.

• Mais pour les fonctions de $\boxed{\text{plusieurs}}$ variables
Existence des d.p. en M_0 $\not\Longrightarrow$ continuïté en M_0 ! Donc : Existence des d.p. pour $f \not\Longrightarrow f$ différentiable.

41.3.2 Développement limité d'ordre 1 en M_0. Théorème fondamental

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Alors $[f\ C^1$ en $M_0(x_0, y_0)] \Longrightarrow \exists \epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ avec $\epsilon(M) \underset{M \to M_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{0}$ tel que
> $$f(M) = f(x, y) = f(x_0, y_0) + [(x - x_0).f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)] + \|\overrightarrow{M_0M}\|.\epsilon(x, y). \quad (*)$$
> On dit que : $[f\ C^1$ en $M_0] \Longrightarrow [f$ possède un Dl_1 en M_0 ou que f est différentiable en M_0.]

Démonstration en exercice.

Même début que pour $f\ C^1 \Rightarrow f\ C^0$, appliqué à chaque composante ... Note [2]

41.3.3 Différentielle en M_0 (termes de degré 1)

On reprend f fonction de deux variables ; on pose $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$, au choix.

> Alors $df(M_0)$ définie par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \longmapsto h.f'_x(x_0, y_0) + k.f'_y(x_0, y_0) = df(M_0)(\overrightarrow{u}) \in \mathbb{R}^n$ est linéaire
> appelée différentielle de f en M_0 (ou A.L. tangente en M_0) ; sa **matrice** dite "matrice jacobienne".
> $(*)$ devient $f(M) = f(M_0 + \overrightarrow{u}) = f(M_0) + df(M_0)(\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{u}\|.\epsilon(\overrightarrow{u})$, avec $\epsilon(\overrightarrow{u}) \to \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u} \to \overrightarrow{0}$. $(**)$

On écrit : $\underline{df(M_0)(\Delta x, \Delta y) = f'_x(M_0).\Delta x + f'_y(M_0).\Delta y}$ ou, sans que dx, dy soient forcément "petits" :

$$\boxed{df(M_0)(dx, dy) = f'_x(M_0).dx + f'_y(M_0).dy}$$

41.3.4 Deux exemples importants

1. Cas f affine. Préciser $df(M_0)$ si $f : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y + 3 \end{pmatrix}$ [sim. aff. dir. à centre].

   Réponse : $f'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \partial x'/\partial x \\ \partial y'/\partial x \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f'_x(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; idem $f'_y(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

[2] Remarques :

1. Si au lieu de $(*)$ on dit $(*\text{bis})$ $f(M) = f(x, y) = f(x_0, y_0) + [(x - x_0).p + (y - y_0).q] + \|\overrightarrow{M_0M}\|.\epsilon(x, y)$ alors on montre aisément que : $f'_x(x_0, y_0)$ existe et vaut p. Idem pour q. Donc $(*) \Longleftrightarrow (*\text{bis})$.
2. Et même : Dérivée suivant un vecteur.

   > f différentiable en $M_0 \Longrightarrow \dfrac{f(M_0 + t.\overrightarrow{u}) - f(M_0)}{t}$ a une limite finie quand $t \to 0$ réel,
   > valant $df(M_0)(\overrightarrow{u})$, appelée dérivée suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$. En particulier, avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \ldots$
   > On a $[f\ C^1] \Longrightarrow f$ différentiable (ou admet un Dl_1 en M_0) $\Longrightarrow f$ admet des d.p. en M_0.

   Démonstration (facile). Le numérateur vaut $df(M_0)(t.\overrightarrow{u}) + \|t.\overrightarrow{u}\|.\epsilon(t.\overrightarrow{u}) = t.[df(M_0)(\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{u}\|.\epsilon^*(t.\overrightarrow{u})]$ car $df(M_0)$ linéaire ; ce qui termine. En particulier : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \underline{f'_x(x_0, y_0) = f'_x(M_0) = df(M_0)(\overrightarrow{\imath})}$, etc.
3. Enfin $\boxed{f \text{ différentiable en } M_0 \text{ [qui est donc } (*) \text{ ou } (*) \text{ bis]} \Rightarrow f \text{ continue en } M_0}$ est clair ! (Exercice)

Donc $df(M_0)(\overrightarrow{u}) = df(M_0)(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}) = h.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$: $df(M_0)$ ne dépend pas ici de M_0, on reconnait l'application linéaire associée notée $\overrightarrow{f}$ $\boxed{df(M_0) = \overrightarrow{f}}$ constante/M_0. Note [3]

2. Cas fréquent où f est numérique ; soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; donc $f'_x(x_0, y_0); f'_y(x_0, y_0)$ sont sdes nombres. L'introduction du vecteur gradient $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f(M_0) = f'_x(x_0, y_0).\overrightarrow{\imath} + f'_y(x_0, y_0).\overrightarrow{\jmath}}$ conduit, en notant : $\overrightarrow{dM} = dx.\overrightarrow{\imath} + dy.\overrightarrow{\jmath}$ un vecteur quelconque, au produit scalaire : $df(M_0)(\overrightarrow{dM}) = \overrightarrow{grad}\, f(M_0) \,\boldsymbol{.}\, \overrightarrow{dM}$

Retenir : $\boxed{\textbf{Pour } f \textbf{ numérique (à valeurs dans } \mathbb{R}\textbf{), on a } df(M_0)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{grad}\, f(M_0) \,\boldsymbol{.}\, \overrightarrow{u}\,\boldsymbol{.}}$

41.4 Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$ (*)

41.4.1 Définitions

Si on peut dériver $f'_{x_1}(x_1, ..., x_p)$ par rapport à x_2, par exemple, on note $f"_{x_1x_2}(M)$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(M)$. Etc.

Note : Celà fait donc p^2 dérivées secondes.

On dit que f est de classe C^k si les *d.p.* d'ordre k existent et sont continues comme fonctions de plusieurs variables. En appliquant : $g\ C^1 \Longrightarrow g\ C^0$ [connu], on en déduit : $f\ C^k \Longrightarrow f\ C^{k-1}$.

Note : Pour la réciproque **(fausse)** toujours penser, d'abord, au cas **des fonctions d'une** variable.

41.4.2 Théorème de Schwarz

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent dans un voisinage de M_0 et sont continues en M_0, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)$

Généralisation : Si les d.p. qui interviennent sont C^0, alors on peut permuter l'ordre des dérivations.

Admis. **On dit que les dérivées partielles mixtes sont égales.** Note [4]

41.4.3 Formule de Taylor à l'ordre 2 (avec de bonnes hypothèses)

Rappels : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $f(x) = f(x_0) + \dfrac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dfrac{(x - x_0)^2}{2!} f"(x_0) + Reste.$

Si $n = 1$, c'est-à-dire pour $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: l'équation de la tangente est $y = f(x_0) + \dfrac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0)$

et $f"(x_0) \neq 0 \Longrightarrow (y_{coube} - y_{tangente}) \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{(x - x_0)^2}{2!} f"(x_0).$

Le cas $n > 1$: On a une égalité de Taylor-Young ; mais seulement une inégalité de Taylor-Lagrange ; (*) celle-ci démontrée à partir d'une égalité de Taylor avec reste intégral (rappelée ci-après).

$\boxed{\text{Cas de } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n \text{ ?}}$ Méthode : $F(t) = f(x_0 + t.h, y_0 + t.k)$ **ramène au cas** $\boxed{\textbf{d'une}}$ **variable :**

$$(*) \quad F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F"(0) + \int_0^1 \frac{(1 - t)^2}{2!} F^{(3)}(t) dt.$$

On calcule $F'(t)$; on déduit $F'(0)$ et on reconnait les termes de degré 1 (à savoir la différentielle) :

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t.h, y_0 + t.k).h + f'_y(x_0 + t.h, y_0 + t.k).k$$

[3] **Complément.** Pour une application affine en dim. quelconques $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$: $M' = O' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$, $\forall O,\ M$. Avec $O = M_0$, on a $f(M) = f(M_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_0M})$; donc f différentiable en M_0 et même réponse.

[4] **Exemple :** Pour $f(x, y) = x^y$ définie, C^∞ par composition sur $]0, +\infty[$x$\mathbb{R}$, vérifier : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.

$$F'(0) = \underline{f'_x(x_0, y_0).h + f'_y(x_0, y_0).k = df(M_0)(h, k)} \;\; !$$

Puis (à bien voir encore)

$$F"(t) = \underset{x^2}{f"}(x_0 + th, y_0 + tk)h^2 + \underset{xy}{f"}(x_0 + th, y_0 + tk)hk + \underset{yx}{f"}(x_0 + th, y_0 + tk)kh + \underset{y^2}{f"}(x_0 + thy_0 + tk)k^2$$

Alors $(*)$ devient la **relation suivante notée** $(**)$, R désignant le Reste :

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}[h^2 \underset{x^2}{f"}(M_0) + 2hk\underset{xy}{f"}(M_0) + k^2 \underset{y^2}{f"}(M_0)] + R.}$$

Complément. Soit $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$:

- La formule de Taylor à l'ordre 2 , en $O(0, 0)$, revient tout simplement à écrire : $f(x, y) = F + Dx + Ey + Ax^2 + Bxy + Cy^2$ et ici, Reste$=O$.

- Et en (x_0, y_0) ? Ecrire $x = x_0 + h, y = y_0 + k$. On obtient dans ce cas : $f(x, y) = f(x_0, y_0) + h.[2Ax_0 + By_0 + D] + k.[Bx_0 + 2Cy_0 + E] + Ah^2 + Bhk + Ck^2$. $(**)$

- On suppose, de plus, f **numérique** : ou que les coefficients sont des **nombres** avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Alors $f(x, y) = 0$ est une conique ; on a en vue un éventuel centre de symétrie $M_0(x_0, y_0)$.

Ayant $(**)$, la condition d'avoir $0.h + 0.k$ est, par équivalence :

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 2.Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Ce qui re-donne (ch. Coniques) M_0 **solution de** $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) = \vec{0}$**.**

(ou bien, avec notre vocabulaire : $\forall h, k : df(M_0)(h, k) = h.f'_x(x_0, y_0) + k.f'_y(x_0, y_0) = O.$)

Le cas $B^2 - 4AC \neq 0$ (système de Cramer, déterminant principal $\neq 0$, ou solution unique) est le cas : conique à centre $Ah^2 + Bhk + Ck^2 + f(x_0, y_0) = 0$, type "Ellipse" ou "Hyperbole". Cependant, celà peut ne pas donner de centre de symétrie pour la conique réelle ; $x^2 + y^2 + 1 = 0$: cercle imaginaire ! Note [5]

41.5 Théorème des fonctions implicites (*)

41.5.1 Enonce pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Problème. Soit la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ passant par M_0. Supposons ne pas avoir d'expression explicite de y fonction de x ; on aimerait toutefois avoir la tangente en M_0, si elle existe.[6]

[5] Remarque : Dans le cas général où f est quelconque, mais à valeurs dans $\mathbb{R}$: numérique, on dit que $(h, k) \mapsto h^2 \underset{x^2}{f"}(M_0) + 2hk\underset{xy}{f"}(M_0) + k^2 \underset{y^2}{f"}(M_0) = A.k^2 + B.h.k + C.k^2$ est une "forme quadratique".

. Et dans ce cas particulier (des dérivées), cette forme quadratique est appelée la "hessienne".

. C'est elle qui renseigne sur la différence : $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)]$.

[6] Exemple : $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ici, on arrive à expliciter : $y = +\sqrt{1 - x^2} = \varphi_1(x)$; soit $y = -\sqrt{1 - x^2} = \varphi_2(x)$.

. Donc au point $M_0(1, 0)$, on n'a pas une fonction, mais deux fonctions ... Dessin ?

. Par contre vers ce point, on peut dire : $x = +\sqrt{1 - y^2} = \psi(y)$! Ce problème était prévu car tangente verticale !

Nous allons voir, sous de bonnes hypothèses, que : $\overrightarrow{grad}(f)(M_0) \perp$ Tangente en M_0.

Donc à partir de f, avec $\overrightarrow{grad}(f)(M)$, on aurait pu deviner le problème en $M_0(1, 0)$ sans dessin !

2. (*) Théorème difficile en **complément.** [7]

3. Conséquence

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Avec les hypothèses : } f(M_0)=0,\quad f\ C^1 \ \textbf{ et } \ \overrightarrow{grad}\, f(M_0)\neq\overrightarrow{0} :\\ \text{Au voisinage de } M_0(x_0,y_0),\quad f(x,y)=0 \text{ est une courbe (contenant ce point)}\\ \textbf{ayant une tangente, dont un vecteur orthogonal est : } \overrightarrow{grad}\, f(M_0).\end{array}}$$

Démonstration.
Une fois le théorème admis, la tangente en M_0 a pour équation : $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$ soit

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0).[x-x_0]+f'_y(x_0,y_0).[y-y_0]=0}$$

On reconnait la droite passant par M_0 orthogonale au vecteur $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

Exercice. Tangente à la courbe $1+x.e^y-2y=0$ au point $(\frac{1}{e},1)$ $\left(y(\frac{1}{e})=1,\ y'(\frac{1}{e})=e,\ y"(\frac{1}{e})=3.e^2\right)$

41.5.2 Cas $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

1. **Le résultat (admis) est analogue**

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } f \text{ numérique de classe } C^1 \text{ au voisinage de } M_0 \text{ avec } f(x_0,y_0,z_0)=0 \text{ et } \overrightarrow{grad}\, f(M_0)\neq\overrightarrow{0}.\\ \text{Au voisinage de } M_0,\ f(x,y,z)=0 \text{ est une surface de plan affine tangent: } [M_0,\perp \overrightarrow{grad}\, f(M_0)].\end{array}}$$

2. **L'équation du plan tangent en M_0, sur la surface, est donc**

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0,z_0).[x-x_0]+f'_y(x_0,y_0,z_0).[y-y_0]+f'_z(x_0,y_0,z_0).[z-z_0]=0}$$

En physique, cf. la fonction potentiel $M\mapsto V(M)$ et le champ electrique $\overrightarrow{E}=-\overrightarrow{grad}(V)$ $\perp$ aux surfaces équipotentielles d'équation : $V(M)-cte=0$. Complément.[8]

---

[7] [Retenir seulement la conséquence]

. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ avec $f(M_0)=0$ où $M_0=(x_0,y_0)$. Supposons f et f'_y C^0 au voisinage de M_0 et $f'_y(M_0)\neq 0$.
Alors au voisinage de M_0 : $f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$. [d'où $\varphi(x_0)=y_0$]

(φ existe donc en théorie ! mais on ne sait pas l'expliciter ...)

. Si de plus f est C^1 (donc f'_x continue aussi au voisinage de M_0), alors φ est dérivable et :

$$(*)\ \varphi'(x_0)=-\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}.\qquad \text{Généralisation : }\ \varphi'(x)=-\frac{f'_x[x,\varphi(x)]}{f'_y[x,\varphi(x)]}.$$

Admis. Un calcul toutefois à voir : on a donc $\forall x$ proche de x_0 : $f[x,\varphi(x)]=0$; donc dérivée par rapport à x, (par composition !), identiquement nulle ; ce qui donne $(*)$ et sa généralisation :

$$f'_x[x,\varphi(x)].1+f'_y[x,\varphi(x)].\varphi'(x)=0$$

[8] Exercice corrigé : Soit la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. On suppose qu'on peut écrire $z=\varphi(x,y)$ et alors $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\varphi'_x(x,y)$, ... ; idem : $x=\psi(y,z)$ et $\dfrac{\partial x}{\partial z}(y,z)=\psi'_z(y,z)$; etc. Montrer que $\dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial z}=-1$.

Solution. **. On peut déjà voir le cas où** $f(x,y,z)=2x-3y+4z-5$ (surface plane).
. Cas général. (*) Bien voir que dans ces dérivées partielles, ce n'est pas toujours la même fonction !
Puis un calcul analogue au cas de $\mathbb{R}^2$ montre que $\forall(x,y)$ proches de (x_0,y_0) $f[x,y,\varphi(x,y)]=0$; donc, en dérivant par rapport à y, par exemple (à bien voir) :

$$f'_y[x,y,\varphi(x,y)].1+f'_z[x,y,\varphi(x,y)].\varphi'_y(x,y)=0$$

D'où une dérivée partielle de $z=\varphi(x,y)$ (analogue au cas de $\mathbb{R}^2$)

$$\boxed{\varphi'_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}}$$

Analogue pour les deux autres et on reporte.

M+ **Exercices: Dérivabilité des fonctions de plusieurs variables** **PTSI**

---

1. Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$. Etudier sa continuïté [vue au ch. précédent].
   Montrer que f possède des d.p. partout sur $\mathbb{R}^2$. Prouver leur non-continuïté sans calcul.

2. Montrer que $f(x,y) = \dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$ admet des d.p. en O puis est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $f(x,y) = Arctan\dfrac{x+y}{1-x.y} - Arctan(x) - Arctan(y)$. Domaine ? Vérifier : $f'_x(x,y) = 0 = f'_y(x,y)$ sur chacune des 3 parties du domaine. Conclusion ? [formule déjà vue au ch. Fonct. élémentaires]
   En déduire une expression simplifiée de : $Arctan(b) - Arctan(a)$, si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

4. Plan tangent à la surface $-x + 2y + z - ch(x.y.z) + sin(x.z) = 0$ en $M_0(1,1,0)$?
   [Orthogonal au gradient, en ce point, de la fonction $f(x,y,z) = -x+2y+z-ch(x.y.z)+sin(x.z)$]

5. (*) Pour une boite de dimension x, y, z, sans couvercle, de surface S_0 donnée, comment choisir ses dimensions pour avoir un volume maximum ? [Se ramener à un domaine fermé-borné. $x = y = 2.z$].

6. (*) Calcul de la distance de $I(x_1, y_1, z_1)$ au plan $ax + by + cz = d$, comme problème de minimum de $f(x,y) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (\dfrac{d-ax-by}{c} - z_1)^2$ si $c \neq 0$ et retrouver $\delta = \dfrac{\mid ax_1 + by_1 + cz_1 - d \mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

7. (*) Distance de $I(3, 0, -1)$ au paraboloïde hyperbolique (P.H) d'équation $z = x^2 - y^2$ [cf. cours].

8. (*) Vecteur directeur de la tangente en $M_0(2,1,2)$ à la courbe : $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \cap x^2 - y^2 = 3$.

9. (*) La fonction $f(x,y) = 3x.y - x^3 - y^3$ possède-t-elle un extrémum sur $\mathbb{R}^2$?

10. (*) Identité d'Euler pour les fonctions homogènes différentiables ; hypothèse notée ici : diff.
    $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ est dite (positivement) homogène de degré α si $f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda^\alpha.f(x,y)$, $\forall \lambda > 0$.
    Si f diff., montrer : f (positivement) homogène de degré $\alpha \Leftrightarrow x.f'_x(x,y) + y.f'_y(x,y) = \alpha.f(x,y)$.
    [$\Rightarrow$ dériver $/\lambda$. $\Leftarrow$ Si $g(\lambda) = f(\lambda.x, \lambda.y) - \lambda^\alpha.f(x,y)$, voir $g'(\lambda) = \dfrac{\alpha}{\lambda}.g(\lambda)$; $g(\lambda) = k.\lambda^\alpha$ et $g(1) = 0$].

11. (**) Equations aux dérivées partielles du 1er ordre : En posant $u = x + y$; $v = x - y$, résoudre $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = a$; et en passant en polaires $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = k.z$. Puis du 2ème ordre : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$
    (cette dernière étant l'équation des ondes planes ; c la vitesse de la lumière).

12. (**) Traversée d'un prisme constitué de 2 demi-plans d'angle au sommet A, d'indine n, le rayon incident faisant l'angle i (3 variables), puis r après une réfraction, puis arrivant sur le 2ème plan avec l'angle r' puis enfin i' en sortie. Ayant $sin(i) = n.sin(r); sin(i') = n.sin(r'); r + r' = A; D = i + i' - A$ (déviation) vérifier que : $\dfrac{\partial D}{\partial i} = 1 - \dfrac{cos(i).cos(r')}{cos(i').cos(r)}$; $\dfrac{\partial D}{\partial n} = \dfrac{sin(A)}{cos(i').cos(r)}$; $\dfrac{\partial D}{\partial A} = \dfrac{n.cos(r')}{cos(i')} - 1$.

13. (**) Extremum lié. Extrema de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ quand $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
    [Maximum valant 1 sur $\pm(1/\sqrt{3}, ., .)$; minimun valant $-1/2$ sur Sphère$\cap x + y + z = 1$].

Chapitre 42

Intégration des fonctions de plusieurs variables

42.1 Intégrales doubles sur une surface plane

42.1.1 Domaine

Ce sera : l'intérieur d'un triangle, d'un rectangle, d'un cercle ... en général.
Un domaine borné, auquel on peut attribuer une aire ...

Propriétés : Invariance de l'aire par translation.
Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont 2 domaines avec $\mathcal{A}ire(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_1) = 0$, alors $\mathcal{A}ire(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_1) = \mathcal{A}ire(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}ire(\mathcal{D}_2)$.

42.1.2 En cartésiennes

1. Définitions Pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, sur un domaine découpé en petits rectangles : $(x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\,;\, y_{i-1} \leqslant y \leqslant y_i)$ d'aire μ_{ij} autour du point M_{ij}, on considère $\sum f(M_{ij}).\mu_{ij}$.
   La limite de cette somme ($\mu_{ij} \to 0$), si elle existe, est notée : $I = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.
   Propriétés
   1) Par rapport à f : Linéarité $I(f+g) = I(f) + I(g)$; et $I(\lambda.f) = \lambda.I(f)$.
   Croissance $f \leqslant g \Longrightarrow I(f) \leqslant I(g)$.
   2) Par rapport aux domaines : additivité si $\mathcal{A}ire(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_1) = 0$.
   Remarque : Si $f = 1$, on trouve l'aire du domaine $\boxed{\int\int_{\mathcal{D}} 1.dx.dy = \mathcal{A}ire(\mathcal{D}).}$

2. Théorème de Fubini
   On suppose que le domaine s'écrit $[a \leqslant x \leqslant b$ et $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)]$: dessin ? et qu'il s'écrit aussi $[c \leqslant y \leqslant d$ et $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)]$: dessin à compléter. Alors, au choix :
   $$\boxed{I = \int_a^b dx.[\int_{bas(x)}^{haut(x)} f(x,y).dy] = \int_a^b dx.[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy] \text{ ou } I = \int_c^d dy.[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx]}$$

3. $\boxed{\text{Exemples}}$
   1) $I = \int\int x^2.y.dx.dy$ sur $\mathcal{D} : (y \leqslant 1;\ x \leqslant y;\ 0 \leqslant x)$ de deux façons.
   Dessiner le domaine : triangle, non carré ! Trouver $I = 1/15$.
   2) $J = \int\int x.y^3.dx.dy$ sur $\mathcal{D} : (y \leqslant x;\ x^2 \leqslant y)$ de deux façons. $J = 1/60$. Autre [1]

[1] 3) "Masse" de la plaque de densité $\rho(x,y) = 2x$ limitée par le cercle $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.
. Bien dessiner le domaine limité par le cercle : $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$. Trouver $M = 8.\pi$ avec
. $M = 2.\int_{-1}^{3} 2x.dx[\int_0^{+\sqrt{2^2-(x-1)^2}} dy] = ...$ On utilise alors le paramétrage naturel $\left\{ \begin{array}{c} x - 1 = 2.cos(\theta) \\ \sqrt{} = 2.sin(\theta), \theta \in\ ? \end{array} \right.$

42.1.3 En coordonnées polaires

1. D'abord $z = f(x,y) = f(\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta)) = g(\rho,\theta)$.
2. Ensuite, prendre $\underline{\rho \geqslant 0}$: le petit élément de surface est alors $\underline{d\rho.\rho.d\theta}$: dessin ? Admis. D'où :

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} g(\rho,\theta).\rho.d\rho.d\theta; \underline{\rho \geqslant 0.}$$

Δ étant le même domaine, mais exprimé à l'aide de (ρ,θ)

$\boxed{\text{Exemple}}$ Calculer $I = \int\int (x^2+y^2)dx.dy$ sur $\mathcal{D}: \; x^2+y^2-2a.x \leqslant 0.$

Nous verrons que cette intégrale est un "moment d'inertie" (sans importance pour le calcul). Le domaine est l'intérieur d'un cercle passant par O, ce qui va bien en polaires : $0 \leqslant \rho \leqslant 2a.cos(\theta)$; dessin ?

D'où $I = 2.\int_0^{\pi/2} d\theta.[\int_0^{2acos(\theta)} \rho^2.\rho.d\rho]$ car domaine $\boxed{\text{et}}$ la fonction sont symétriques $/Ox$. Donc

$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2^4.a^4.cos^4(\theta)d\theta = 8.a^4.\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3.\pi.a^4}{2}$ avec les intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2} cos^4(\theta)d\theta = \frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}$ (sinon, linéariser, car la puissance est paire).

42.1.4 Formule de Green-Riemann

1. Enoncé. Comme dans le théorème de Fubini supposons, pour commencer que le domaine $\mathcal{D}$ est limité par un contour fermé Γ et s'écrit $[a \leqslant x \leqslant b$ et $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)]$; et qu'il s'écrit aussi $[c \leqslant y \leqslant d$ et $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)]$: on dira "fermé-borné élémentaire" ; dessin ? [2]

   Alors : si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ est C^1 sur un domaine contenant Γ $\boxed{\text{et}}$ son intérieur $\mathcal{D}$,
   $\int\int_{\mathcal{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx.dy = \oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$ $\overset{\frown}{\Gamma}$ orienté trig., ici fermé, entourant $\mathcal{D}$.

   Analogie : En une variable, $\int_a^b f'(x)dx$ ne dépend que du bord, avec une primitive : $f(b)-f(a)$.

   La formule de Stockes (VI) généralise et aide à retenir (G-R) : opérateur Nabla $\overrightarrow{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
   Si $\overrightarrow{V}(M) = (P,Q,R)$ **calculer** $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(M)$ **puis** $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) \,.\, \overrightarrow{n}$, si $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$.

   Démonstration [3]

2. $\boxed{\text{Des exemples}}$

   1) $\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} (x-y^2)dx + 2xydy = I$? de deux manières sur le triangle $OABO$ $A(1,0); B(1,1)$.

   Soit par calcul de $\int = \int_{\overset{\frown}{OA}} + \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BO}} = \frac{1}{2} + 1 + (\frac{-1}{2} + \frac{-1}{3})$ (cf § VI) ; soit par $\int\int$: $I = \frac{2}{3}$.

   2) Calcul de $I = \int\int xy.\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ sur le domaine $[x \geqslant 0;\; y \geqslant 0;\; y \leqslant x;\; x^2+y^2 \leqslant 1]$

   Soit polaires, pour $\int\int$: $I = \frac{1}{20}$; soit : $P(x,y) = O$; $Q(x,y) = \frac{y}{3}.(x^2+y^2)^{3/2}$ et $\oint$: idem.

---

[2] $\boxed{\text{Remarque :}}$ Soit, par exemple $A(1,0)B(1,2)C(0,1)D(-1,2)E(-1,0)$. La formule s'étend au contour (polygonal ici) $ABCDEA$ bien qu'on n'ait pas $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$: il suffit en effet $\boxed{\text{de le décomposer}}$ en $ABCOA$ et en $OCDEO$ et additivité ! Dessin ? On dit que c'est un fermé-borné (ou un "compact") "simple".

[3] $\int\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx[\int_{bas}^{haut} \frac{\partial P}{\partial y}dy] = \int_a^b (P[x,\varphi_2(x)] - P[x,\varphi_1(x)]).dx = \int_{\overset{\frown}{ADB}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{ACB}} P(x,y)dx = -\int_{\overset{\frown}{ACBDA}} P(x,y)dx = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} P(x,y)dx.$ Et l'autre terme est analogue.

42.1.5 Application aux aires planes en cartésiennes

Prenons $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$. Alors : $\displaystyle\int\int dx.dy = \mathcal{A}ire(\mathcal{D}) = \oint_{\widehat{\Gamma}} x.dy$.

Prenons $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$: $\displaystyle\int\int dx.dy = \mathcal{A}ire(\mathcal{D}) = \oint_{\widehat{\Gamma}} -y.dx$. On retient :

$$\boxed{\mathcal{A}ire(\mathcal{D}) = \oint_{\widehat{\Gamma}} -y.dx = \oint_{\widehat{\Gamma}} x.dy = \frac{1}{2}\oint_{\widehat{\Gamma}} x.dy - y.dx}$$

Exemple Ellipse $x = a.cos(t)$; $y = b.sin(t)$. Avec la dernière relation on trouve de suite :
$\mathcal{A}ire(\mathcal{D}) = \pi.a.b$ (**comme vu sans calcul, par affinité**).[4]

42.1.6 Application aux aires planes en polaires

On a : $xdy - ydx = x^2.d(\frac{y}{x}) = \rho^2.cos^2(\theta).d[tan(\theta)] = \rho^2.d(\theta)$. D'où $\boxed{\mathcal{A}ire(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\oint_{\widehat{\Gamma}} \rho^2.d\theta}$

Exemple Aire de la cardioïde $\rho = a(1 + cos(\theta))$? Trouver $\dfrac{3.\pi.a^2}{2}$.

Compléments.[5]

42.2 Utilisation des intégrales doubles pour l'intégrale de Gauss

(*) Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (Intervient en probalilité en particulier).

---

[4] Remarque Dans le cas particulier de courbe $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, vérifier : $\displaystyle\oint_{\widehat{\Gamma}} -y.dx = \int_a^b f(x)dx$.

[5] 1) Calculer $I = \displaystyle\int\int (x^2 + y^2).dx.dy$ sur $\mathcal{D}$: intérieur du triangle $A(-2,0)B(1,-\sqrt{3});C(1,\sqrt{3})$.
Ici le domaine et la fonction sont symétriques $/Ox$. En cartésiennes. Trouver $I = 3.\sqrt{3}$.
(On est amené à écrire l'équation de Droite (AC).)

2) L'intégrale $\displaystyle\int\int \frac{x.y}{x^2+y^2}dx.dy$ sur $\mathcal{D}$: $(x \geqslant 0\ ;\ y \geqslant 0\ ;\ x + y \leqslant a)$ ne pose-t-elle pas problème en O ?

Réponse : f non continue en O, mais bornée : $0 \leqslant x$; $0 \leqslant y$; $2.x.y \leqslant x^2 + y^2$; pas de problème.

En polaires : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} sin(\theta).cos(\theta).d\theta.[\int_0^{\frac{a}{sin(\theta)+cos(\theta)}} \rho.d\rho]$ car la droite : $\rho = \dfrac{a}{sin(\theta) + cos(\theta)}$.

Donc avec la règle de Bioche, qui nous conduit ici à une intégrale "généralisée" $t = tan(\theta)$:

$$I = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{sin(\theta).cos(\theta).d\theta}{[sin(\theta)+cos(\theta)]^2} = \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t.dt}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{a^2}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} - \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{\pi-2}{8}a^2$$

3) Aire en polaires ; calcul direct. Pour θ donné, on suppose : $0 \leqslant \rho_1(\theta) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\theta)$.

. 1er cas : Domaine limité par une courbe fermée entourant le pôle.

A partir de $\mathcal{A} = \displaystyle\int\int \rho.d\rho.d\theta$: $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta[\int_0^{\rho_2(\theta)} \rho.d\rho] = \frac{1}{2}\int_{\widehat{\Gamma}} \rho^2.d\theta$, le symbole $\widehat{\Gamma}$ signifiant qu'on est sur le contour pour ρ.

. 2ème cas : Domaine limité par une courbe fermée n'entourant pas le pôle. Ici $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta.[\rho^2]_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}$ ou encore (dessin !)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}[\int_{P\widehat{R}Q} \rho^2(\theta).d\theta - \int_{P\widehat{S}Q} \rho^2(\theta).d\theta] = \frac{1}{2}\int_{PR\widehat{Q}SP} \rho^2(\theta).d\theta.$$

Donc dans chaque cas on retrouve la formule déjà encadrée.

4) Remarque. **Changements de variables généraux :** Spé.

42.2.1 Existence

Soit $F(\beta)=\displaystyle\int_0^{\beta} e^{-t^2}dt$. F est non calculable ! Mais F dérivable et $F'(\beta)=e^{-\beta^2}$ [bien voir les lettres] : F, croissante (même strictement), a forcément une limite en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone.
De plus, pour $\beta \geqslant 1$, $F(\beta)=\displaystyle\int_0^1 *+\int_1^{\beta} e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^1 *+\int_1^{\beta} e^{-t}dt \leqslant 1+e^{-1}-e^{-\beta}\leqslant 2$. F est majorée.
Donc : F possède une limite finie L en $+\infty$ et c'est cette limite que l'on note $L=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \leqslant 2$.

42.2.2 Un calcul astucieux

D'abord $F(\beta)=\displaystyle\int_0^{\beta} e^{-x^2}dx=\int_0^{\beta} e^{-y^2}dy$. Ensuite $\displaystyle\int\int_{0\leqslant x\leqslant\beta;0\leqslant y\leqslant\beta} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=[F(\beta)]^2$ aisément.
Soit alors $\phi(\beta)=\displaystyle\int\int_{x\geqslant 0;y\geqslant 0;x^2+y^2\leqslant\beta^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. Avec $exp>0$ $\phi(\beta)\leqslant F[\beta)]^2\leqslant\phi(\beta.\sqrt{2})$: dessin !
Or $\phi(\beta)$ calculable en polaires ! $\phi(\beta)=\dfrac{\pi}{4}[1-e^{-\beta^2}]$. Par passage à la limite (...) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

42.3 Intégrale double dans le cas de surface non plane (*)

Pour $\displaystyle\int\int f(M)d\mathcal{A}$ où $d\mathcal{A}$ est la petite aire de surface non plane : Spé.
On va se limiter à deux calculs d'aire, cas $f=1$. (*) Noter que si la surface a pour équation $z=f(x,y)$, avec les notations de Monge et $\|\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial x}\wedge\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial y}\|$, l'aire vaut $\displaystyle\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}.dx.dy$.

42.3.1 Tranche sphérique d'épaisseur h

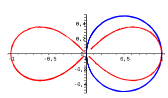
$\boxed{\text{L'aire de la tranche sphérique d'épaisseur } h \text{ a pour aire } 2.\pi.Rh.}$ Résultat dû à Clairaut.

Donc : 1) L'aire ne dépend pas qu'on soit ou non proche du pôle.
2) Projetant$_\perp$ une sphère à partir d'un axe sur le cylindre circonscrit, cette projection conserve la surface (mais déforme les angles) ! [Aire du fuseau sphérique $2.R^2.V_{\varphi\in[0,V]}\Rightarrow Aire$ du triangle sphérique (*)]
3) $\boxed{\text{L'aire totale de la sphère est } 4.\pi.R^2}$ (Archimède) (Faire $h=2R$)

Démonstration. Soit $\theta=(Oz,OM)$ la colatitude, $\varphi=(Ox,Om)$ la longitude. Dessin ?
Le petit élément d'aire vaut ici : $d\mathcal{A}=R.d\theta.Rsin(\theta)d\varphi$ [déplacements orthogonaux] et donc :
$\mathcal{A}=R^2.\displaystyle\int\int sin(\theta)d\theta.d\varphi=2.\pi.R^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin(\theta).d\theta=\mathcal{A}=2\pi.R[Rcos(\theta_1)-Rcos(\theta_2)]=2\pi.R.h.$

42.3.2 Rotation de la lemniscate $\rho=a\sqrt{cos(2.\theta)}$ autour de Ox : aire

Soit ds l'élément d'abscisse curviligne sur la courbe : $ds=\dfrac{a.d\theta}{\sqrt{cos(2.\theta)}}$ (laissé). Puis le petit déplacement en rotation autour de Ox est $\mid y\mid d\varphi=a.\sqrt{cos(2.\theta)}.sin(\theta).d\varphi$ si φ est un angle de rotation :



$d\mathcal{A}=ds.\mid y\mid d\varphi$. $\mathcal{A}=2.a^2.\displaystyle\int_0^{\pi/4} sin(\theta).d\theta.[\int_0^{2\pi} d\varphi]=2.\pi.a^2.(2-\sqrt{2})$ [deux boucles].
Rapport des aires des surfaces de révolution autour de Ox, côté droit : $\dfrac{4.\pi.(\frac{a}{2})^2}{\pi.a^2.(2-\sqrt{2})}\sim 1,7$; plausible !

42.4 Intégrales triples (*)

42.4.1 Domaine

De manière analogue aux $\int\int$, ce sera un domaine volumique borné usuel. Cf. Exemples.

42.4.2 En cartésiennes

1. Intégration par piles : $\int$ puis $\int\int$
$\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int_d dx.dy.[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z).dz]$ où d est le domaine en x, y permettant d'avoir tout $\mathcal{D}$. [$z_1(x,y)$ bas de la pile ; $z_2(x,y)$ haut].

2. Intégration par couches : $\int\int$ puis $\int$
$\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_A}^{z_B} dz.[\int\int_{S(z)} f(x,y,z).dx.dy]$, $S(z)$ étant la section à la "hauteur"z.

3. $\boxed{\text{Exemples}}$ 1) Volume de la sphère par couches. Ici $f(x,y,z) = 1$.
On a $\mathcal{V} = 2.\int_0^R dz.[\int\int_{S(z)} 1.dx.dy]$; mais $S(z)$ est le disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$; donc
$\mathcal{V} = 2.\int_0^R dz.\pi.(R^2 - z^2) = 2.\pi.[R^2 z - \frac{z^3}{3}]_0^R = \frac{4}{3}\pi.R^3$. $\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi.R^3 \text{ pour la sphère.}}$
2) Volume de la sphère par piles
Ici $\mathcal{V} = 2.\int\int_{x^2+y^2 \leqslant R^2} dx.dy.[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1.dz] = 2.\int\int_{0\leqslant\rho\leqslant R;0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \rho.d\rho.d\theta.\sqrt{R^2-\rho^2}$. Fin en polaires : ce sont donc les coordonnées cylindriques ! $\mathcal{V} = 2.2\pi.\frac{-1}{3}[(R^2-\rho^2)^{3/2}]_0^R = \frac{4}{3}\pi.R^3$. $\boxed{\text{Idem.}}$

3) Volume d'un cône **à base plane quelconque** . Pour $z = h$, soit un contour (usuel) limitant une surface plane d'aire S et la portion de cône de centre O s'appuyant sur ce contour. Dessin ?

$\boxed{\text{Le volume de la portion de cône est } \mathcal{V} = \frac{S.h}{3} \quad \text{où} \quad S\text{=Surface de base.}}$ En effet :
$\mathcal{V} = \int_0^h dz.[\int\int_{S(z)} dx.dy]$. Or $\frac{S(z)}{S} = (\frac{z}{h})^2$ par homothétie de centre O donc $\mathcal{V} = \frac{S}{h^2}\int_0^h z^2.dz$!

42.4.3 En cylindriques

Au lieu de prendre (x,y,z), on prend $(\rho \geqslant 0, \theta, z)$. Soit $I = \int\int\int g(\rho,\theta,z)\rho.d\rho.d\theta.dz$.

$\boxed{\text{Exemples}}$ 1) Volume de la sphère par piles ou par couches : relire ; c'était en cylindriques, en fait !

---

2) **Complément**. (*) Dans Oxz, soit $A(a,0)$. Pour $0 \leqslant h \leqslant a$, on considère le triangle $OI(h,h)H(0,h)$ et la petite surface $AK(a,h)JA$ telle que J soit sur le quart de cercle de rayon OA, avec $z_J = h$ et JA = Arc JA. Dessin ? Par rotation autour de Oz, on a deux volumes de révolution à comparer.
Rép. : L'un est un cône $\mathcal{V}_1 = \frac{\pi.h^3}{3}$. L'autre $\mathcal{V}_2 = \pi.\int_0^h dz.[a^2 - (a^2 - z^2)] = \mathcal{V}_1$ car couches = couronnes.

3) (*) Volume limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$ et le cylindre de révolution $x^2 + y^2 - ax = 0$. Dessin ? (La surface découpée sur le cylindre est appelée fenêtre de Viviani.)
On a $\mathcal{V} = \int\int_{x^2+y^2-ax\leqslant 0} dxdy[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz] = \int\int \rho.d\rho.d\theta.\sqrt{a^2-\rho^2} = 2.\int_0^{\pi/2}\int_0^{a.cos(\theta)} \sqrt{a^2-\rho^2}\rho.d\rho$
Soit $\mathcal{V} = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - sin^3(\theta)]d\theta = \frac{3\pi - 4}{9}a^3$ (intégrale de Wallis pour finir si l'on veut).

(*) Remarque sur l'aire (non plane) de la surface de Viviani ($z \geqslant 0$) : trouver $Aire = (\pi - 2).R^2$ donc l'aire du complémentaire dans le 1/4 de sphère s'exprime sans facteur transcendant et vaut $2R^2$.
[Et l'aire de la section droite (toujours avec $z \geqslant 0$) vaut : R^2.]

42.4.4 En sphériques

Les coordonnées sont : $r = OM \geqslant 0, \theta = (Oz, OM)$ colatitude, $\varphi = (Ox, Om)$ longitude ; ici $\theta \in [0, \pi]$

Et $I = \int\int\int h(r,\theta,\varphi)dr.rd\theta.rsin(\theta)d\varphi = \int\int\int h(r,\theta,\varphi)r^2.sin(\theta)dr.d\theta.d\varphi$

Exemple : Volume de la sphère en sphériques !

Finissons par dr. Alors $\mathcal{V} = \int_0^R dr.[\int\int r^2.sin(\theta).d\theta.d\varphi]$.

Mais $\int\int$ représente l'aire (déjà vue) de la sphère de rayon r : $4.\pi.r^2$. On retrouve $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi.R^3$.

42.5 Applications diverses

42.5.1 Calculs de masse

• Pour un fil de masse linéïque $\mu(s)$, sa masse est $M = \int dm = \int \mu(s).ds$.

• Pour une plaque plane de masse surfacique $\mu(x,y)$, sa masse est $M = \int\int \mu(x,y).dxdy$.
(On peut passer en polaires ! Et le cas de surface non plane n'est pas mentionné).

• Pour un volume de masse volumique $\mu(x,y,z)$, sa masse est $M = \int\int\int \mu(x,y,z).dxdydz$.

42.5.2 Centre de gravité

Par définition $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\Sigma\alpha_i.\overrightarrow{OA_i}}{\Sigma\alpha_i}$ est généralisé. Notation : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{\int \overrightarrow{OM}.dm}{\int dm}}$ dans tous les cas.

Remarques • On a ainsi : $\int \overrightarrow{GM}.dm = \overrightarrow{0}$.

• $\overrightarrow{OG} = x_G\overrightarrow{\imath} + y_G\overrightarrow{\jmath} + z_G\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$. Donc $z_G = \dfrac{\int z.dm}{\int dm}$

• Cas particulier : solide homogène. $\mu = cte = \dfrac{M}{\mathcal{V}}$. Aisément ($dm = \dfrac{M}{\mathcal{V}}dxdydz$) : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\int\int\int \overrightarrow{OM}.dxdydz}{\mathcal{V}}$
C'est le centre de gravité géométrique.

Exemples 1) Centre de gravité géométrique de la demi-sphère homogène : $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$; $z \geqslant 0$.
2) Centre de gravité géométrique de la plaque homogène (plane) limitée par $y^2 = x^3$; $x = a$: dessin ?
3) Centre de gravité de la tranche sphérique homogène non plane comprise entre z_1 et z_2 : $z_G = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.
4) De l'hélice $x = a.cos(t), y = a.sin(t), z = h.t,_{0 \leqslant t \leqslant \theta}$? $x_G + iy_G = \rho.e^{i.\theta/2}, z_G = h.\theta/2$, $\rho = a.\dfrac{sin(\theta/2)}{\theta/2}$.

Pour 1) de volume $\mathcal{V} = \dfrac{2}{3}\pi.R^3$

Par symétrie : $x_G = y_G = 0$. Et : $z_G = \dfrac{\int z.dm}{\int dm} = \dfrac{\int z.\mu.dv}{\int \mu.dv} = \dfrac{1}{\mathcal{V}}\int z.dv$, dv étant l'élément de volume.

Donc $\dfrac{2}{3}\pi.R^3.z_G = \int\int \rho.d\rho.d\theta[\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z.dz] = \dfrac{1}{2}\int_0^R (R^2\rho - \rho^3)d\rho.2\pi = \dfrac{\pi.R^4}{4}$. $z_G = \dfrac{3R}{8} < \dfrac{R}{2}$ correct.

Pour 2)

La courbe est très intéressante et appelée parabole "semi-cubique". On trouve $G(\dfrac{5a}{7} > \dfrac{a}{2}, 0)$ [2 calculs].

42.5.3 Théorèmes de Guldin [centres de gravité géométriques] (*)

1. Premier théorème. Dans le demi-plan Oxy $x \geqslant 0$, soit une surface S d'aire $\mathcal{A}$, de centre de gravité géométrique G. Par exemple un disque.
Alors, par rotation autour de Oy, on engendre un solide de volume tel que : $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}.2.\pi.x_G.}$

2. Deuxième théorème. Dans le demi-plan Oxy $x \geqslant 0$, soit une courbe Γ de longueur L, de centre de gravité géométrique G (pas forcément le précédent !) Par exemple un cercle ; un demi-cercle ! ...
Alors par rotation autour de Oy, on obtient une surface non plane d'aire telle que : $\boxed{\mathcal{A} = L.2.\pi.x_G.}$

Démonstrations : En exercice ; mais sans difficulté, sauf la nouveauté. (Guldin, Suisse, 1577-1643.)

Note. Quel est le centre de gravité d'un fil homogène triangulaire ? Vu au chapitre Cercles, Coniques.

42.5.4 Moment d'inertie (*)

1. Définitions

On appelle moment d'inertie par rapport à un axe $\mathcal{D}$ la quantité $\boxed{J/axe = \int \delta^2(M, axe).dm}$ où δ désigne la distance de M à l'axe. Ceci intervient dans le mouvement d'un solide autour d'un axe. [Rappelons que tout solide ayant un point fixe (au temps t) décrit une isométrie de $\mathbb{O}_3^+$ soit possède un axe instantanné de rotation ; le cas plus général étant un mouvement hélicoïdal au temps t (*)].

Ainsi $J/Oz = \int (x^2 + y^2).dm$, l'intégration étant sur le volume du solide.

2. $\boxed{\text{Moment d'inertie de la poulie homogène par rapport à son axe : } J = \frac{1}{2}\, M.R^2.}$

En effet, soit Oz son axe et h son épaisseur. Alors : $J/Oz = \int\int\int (x^2 + y^2)\frac{M}{\mathcal{V}} dxdydz =$
$\frac{M}{\mathcal{V}} \int\int \rho^2.d\rho.\rho.d\theta[\int_0^h dz]$; soit $J/Oz = \frac{Mh}{\pi.R^2 h}\int_0^{2\pi} d\theta.[\int_0^R \rho^3.d\rho] = \frac{M}{\pi R^2}.\frac{R^4}{4}.2\pi = \frac{MR^2}{2}.$

3. $\boxed{\text{Moment d'inertie de la sphère homogène / un de ses axes : } J = \frac{2}{5}\, M.R^2.}$ (*)

En effet : Astuces car (*) Pour faciliter des calculs, sans tenir compte du sens physique, on pose de plus : $\int x^2.dm = J/plan : yOz$, ... , et $\int (x^2 + y^2 + z^2)dm = J/point : O.$

Soit $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ la sphère. $J/Oz = J/yOz + J/xOz = \frac{2}{3}J/O$ avec les notations signalées.
Nous allons calculer J/O avec les coordonnées sphériques : c'est le plus simple !

$$J/O = \int\int\int (x^2+y^2+z^2).\frac{M}{\mathcal{V}}dxdydz = \int\int\int r^2.\frac{M}{\mathcal{V}}.dr.rd\theta.rsin(\theta)d\varphi = \frac{M}{\mathcal{V}}\int\int sin(\theta)d\theta.d\varphi.\frac{R^5}{5}$$

Ou $J/O = \frac{MR^5}{5.\mathcal{V}}.2\pi.[-cos(\theta)]_0^{\pi} = \frac{3}{5}MR^2$. D'où la réponse : $J/Oz = \frac{2}{3}.\frac{3}{5}MR^2 = \frac{2}{5}MR^2.$

42.5.5 Théorème de Huyghens (ou Koenig) : lien entre moments d'inertie (*)

1. Soit $\mathcal{D}$ un axe quelconque et $\mathcal{D}_G$ l'axe parallèle passant par le centre de gravité G à la distance d.
On a : $\boxed{J/\mathcal{D} = J/\mathcal{D}_G + M.d^2.}$ C'est donc en $\mathcal{D}_G$ qu'on a le minimum d'inertie. Dessin ?

2. En effet, soit K la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$ et H sur $\mathcal{D}_G$. Alors :
$J/\mathcal{D} = \int KM^2 dm = \int (KH^2 + 2.\overrightarrow{KH}.\overrightarrow{HM} + HM^2)dm = \int d^2.dm + 2\overrightarrow{KH}.(\int \overrightarrow{HM}.dm) + J/\mathcal{D}_G.$
(Le domaine d'intégration pouvant être un volume). Or $\int \overrightarrow{HM}.dm = \int \overrightarrow{HG}.dm + \int \overrightarrow{GM}.dm.$
La 2ème intégrale est nulle ; la 1ère est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{KH}$ (qui est fixe) ! Fini.

[Note : On parle encore "d'ellipsoïde d'inertie" ... (Poinsot 1777-1859).]

42.6 Champs de vecteurs (*)

42.6.1 Définitions

1. Un champ de vecteurs est la donnée d'une application $M \in \mathcal{D}omaine \subset \mathcal{E}_3 \longmapsto \overrightarrow{V}(M) \in E_3$ (E.v.).
Exemples : Champ des vecteurs forces et accélérations. Champ des vitesses ; dans le cas particulier d'un solide, c'est un champ équiprojectif, soit : $\overrightarrow{P(t)Q(t)}^2 = cte \Longrightarrow \overrightarrow{PQ}\centerdot\dfrac{d\overrightarrow{Q}}{dt} = \overrightarrow{PQ}\centerdot\dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt}$. Torseur !
Ici, surtout en vue : champ électrique avec potentiel scalaire et magnétique avec potentiel vecteur.

2. La circulation d'un champ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \overrightarrow{V}(M) = \begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{pmatrix}$ le long de l'arc $t \in [a,b] \mapsto \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$
est : $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{dM} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z).dx + Q.dy + R.dz = \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t)).x'(t) + ... + ...].dt$

3. $\boxed{\text{Exemple}}$ Soit l'arc d'hélice $t \in [a,b] \longmapsto (r.cos(\omega t), r.sin(\omega t), h.t)$ et $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{OM}$. Circulation ?
On a $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{dM} = \int_{\overset{\frown}{AB}} x.dx + y.dy + z.dz = \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}} d(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}(OB^2 - OA^2)$.
Ici, la circulation ne dépend pas du trajet ; **seulement** des points initial et final ! On va y revenir.

(Note : Ne pas confondre cette intégrale avec $\displaystyle\frac{1}{L}\int (x.\overrightarrow{\imath} + y.\overrightarrow{\jmath} + z.\overrightarrow{k})ds = \overrightarrow{OG}$ si $dm = cte.ds$.)

42.6.2 Champ de gradients, potentiel scalaire et forme différentielle exacte (totale)

1. Rappels (1) $\boxed{[f\ C^1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n] \Longrightarrow f(M) = f(M_0) + df(M_0)(\overrightarrow{M_0M}) + \|\overrightarrow{M_0M}\|.\epsilon(M),\ \epsilon(M) \underset{M\to M_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{0}}$
(2) Et, pour une fonction numérique, soit $f : R^p \to \mathbb{R}$, on a $\boxed{\forall\ \overrightarrow{dM},\ df(M_0)(\overrightarrow{dM}) = \overrightarrow{grad}\,f(M_0)\centerdot\overrightarrow{dM}}$

2. (*) Ceci va permettre de trouver le gradient dans tout système de coordonnées. Déjà les notations :
$f(x,y,z) = f(\rho.cos(\theta), \rho.sin(\theta), z) = g(\rho,\theta,z)$, $\boxed{\text{noté}}$ $U = f(x,y,z) = g(\rho,\theta,z) = h(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}$ (de même). Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sera noté $\dfrac{\partial U}{\partial x}$; ... ; $\dfrac{\partial h}{\partial r}$ noté $\dfrac{\partial U}{\partial r}$: abus d'écriture à bien voir !
Alors : $dU = \dfrac{\partial U}{\partial \rho}.d\rho + \dfrac{\partial U}{\partial \theta}.d\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}.dz = \dfrac{\partial U}{\partial r}.dr + \dfrac{\partial U}{\partial \theta}.d\theta + \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}.d\varphi$ (ch. précédent).
Et : $dU(\overrightarrow{dM}) = \overrightarrow{grad}\,U\centerdot\overrightarrow{dM}$, $\overrightarrow{dM} = d\rho.\overrightarrow{u} + \rho.d\theta.\overrightarrow{u}_1 + dz.\overrightarrow{k} = dr.\overrightarrow{e}_r + r.d\theta.\overrightarrow{e}_\theta + r.sin(\theta).d\varphi.\overrightarrow{e}_\varphi$
donnent les composantes de : $\overrightarrow{grad}\,U(M)$ $\begin{cases} (\dfrac{\partial U}{\partial \rho}, \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}, \dfrac{\partial U}{\partial z}) : (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{k}), \text{ en cylindriques;} \\ (\dfrac{\partial U}{\partial r}, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}, \dfrac{1}{r.sin(\theta)}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}) : (\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\varphi), \text{ en sphériques.} \end{cases}$

3. $\boxed{\text{Trois définitions}}$ • $\overrightarrow{V}(M)$ est un champ de gradients si $\exists U(M) / \overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{grad}\,U(M)$; $U(M)$ est appelé potentiel scalaire [En physique, on prend le signe opposé $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{grad}\,(-U) = -\overrightarrow{grad}\,U(M)$]
• On a ainsi : $dU(\overrightarrow{dM}) = \overrightarrow{grad}\,U(M)\centerdot\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{V}(M)\centerdot\overrightarrow{dM} = P.dx + Q.dy + R.dz$. On dit encore que $P(x,y,z).dx + Q.dy + R.dz$, égal à $dU = P.dx + Q.dy + R.dz$, est une forme différentielle exacte.
• $U(M)$, potentiel ou primitive, se calcule alors par $\boxed{\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z);\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q;\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = R.}$

$\boxed{\text{Propriété}}$ Si $\overrightarrow{V}(M)$ est un champ de gradients, les deux résultats (équivalents) suivants sont vrais
$\begin{cases} \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{dM} = \int_{\overset{\frown}{AB}} dU = U(B) - U(A) \text{ ne dépend que de } A \text{ et } B\text{, pas du chemin suivi } C^1 \\ \displaystyle\oint \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{dM} = 0 \text{ pour tout chemin fermé } C^1 \text{ (dans le domaine où on a le champ de gradients).} \end{cases}$
Reste en suspens : comment reconnaitre si on a un champ de gradients ? Voici :

42.6.3 Forme différentielle fermée ; cas d'un domaine étoilé :

1. Condition nécessaire (C.N.) Si $\omega = P(x,y,z)dx + Q.dy + R.dz$ est une forme différentielle exacte C^1, avec potentiel U, C^2 le Théorème de Schwarz à $U(M) \Rightarrow (*)$ $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}; \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}; \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}.}$

   Définition $\boxed{\text{Forme diff. exacte } C^1 \Rightarrow \text{relations } (*)\text{, cas où l'on dit ici : forme différentielle fermée.}}$

   Ayant vu le rotationnel (rappelé ci-dessous) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(M)$: $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{0}$

2. Théorème (de Poincaré ; admis) : Condition nécessaire et suffisante C.N.S.

   $\boxed{\text{La C.N. est une C.N.S. sur un domaine étoilé : } \mathcal{D} \text{ est étoilé } / \ K \in \mathcal{D} \text{ si } \forall\ M \in \mathcal{D},\ [KM] \subset \mathcal{D}.}$

   Un ensemble convexe est étoilé/chacun de ses points. Dessin d'un domaine étoilé mais non convexe ?

   Si domaine étoilé $\overrightarrow{V}(M)$, C^1 Champ de gradiants [f. d. exacte] $\Longleftrightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{0}$ [f.d. fermée]

3. $\boxed{\text{Exemples}}$

   • On a vu : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint -y.dx + x.dy = \mathcal{A}ire(\mathcal{D}) \neq 0$: non exacte. Non fermée : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{+1}{2}$.

   • Soit la forme différentielle notée ω : $\omega = \dfrac{-y.dx + x.dy}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash O(0,0)$: qui est fermée (calcul) !

   Mais cet exemple classique montre que $\mathbb{R}^2 \backslash O(0,0)$ n'est pas étoilé car elle n'est pas exacte : si Γ désigne le cercle trigonométrique $x = cos(t), y = sin(t)$, $t \in [0, 2.\pi]$, $\displaystyle\oint_\Gamma \omega = 2.\pi \neq 0$.

   $\boxed{\text{Exercice}}$ Soit $\omega = xdy - ydx$. Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x).\omega$ soit fermée ; puis une primitive de $\dfrac{\omega}{x^2}$, soit U telle que $dU = \dfrac{\omega}{x^2}$. Résoudre ainsi l'équation différentielle $xy' - y = Arctan(x)$.

   Solution. Exprimant $\dfrac{\partial}{\partial y}[f(x).y] = \dfrac{\partial}{\partial x}[f(x).x]$ on a $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$; donc $\dfrac{1}{x^2}(xdy - ydx) = dU$, forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^-$, étoilé. $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$ donnent $U = \dfrac{y}{x} + C$. Puis Eq. diff $\Longleftrightarrow dU = Arctan(x)/x^2\ .dx$ ... On sait finir ! (parties et fraction impaire : $t = x^2$)

42.6.4 Formule de Stockes, généralisant Green-Riemann (mémorisation !) :

1. Divergence. Rotationnel. On reprend $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$; la matrice $A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$ dite "jacobienne" est la matrice de $df(M)$, linéaire. Sa trace est : $div(\overrightarrow{V}(M)) = P'_x + Q'_y + R'_z$.

   $\boxed{\text{Moyen mémo-technique :}}$ Opérateur Nabla $\overrightarrow{\nabla}$: $(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z})$. Alors $\boxed{div(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{\nabla} \centerdot \overrightarrow{V}(M).}$

   Et $\boxed{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(M)}$ $\boxed{\text{Composantes ?}}$ (d'où : Forme diff. fermée $\Longleftrightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) = \overrightarrow{0}$).

2. Formule de Stockes. Soit un contour fermé orienté Γ limitant une surface (même non plane) S, de normale $\overrightarrow{n}(M)$ unitaire orientée selon Γ, sur laquelle le champ est C^1. Avec l'élément d'aire $d\mathcal{A}$, plus généralement : $\boxed{\displaystyle\oint \overrightarrow{V}(M) \centerdot \overrightarrow{dM} = \int\int_S \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}(M)) \centerdot \overrightarrow{n}(M).d\mathcal{A}.}$ (On dit "le flux du rotationnel")

42.6.5 Formule d'Ostrogradski et potentiel vecteur : pour champ magnétique

On dit que $\boxed{\overrightarrow{V}(M) \text{ dérive du potentiel vecteur } \overrightarrow{A}(M) \text{ si } \overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M).}$ $\left(\textbf{Comment savoir si c'est le cas ?}\right)$

Comme $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f(M)) = \overrightarrow{0}$, si $\overrightarrow{A}(M)$ est un potentiel vecteur, $\overrightarrow{A}(M) + \overrightarrow{grad} f(M)$ en est un autre.

Et : $div(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M)) = 0$, donne une C.N. qui est une **C.N.S. si domaine étoilé :** $\boxed{div(\overrightarrow{V}(M)) = 0.}$

Plus généralement, $\mathcal{V}$ étant limité par la surface fermée $\otimes$: $\displaystyle\int\int_\otimes \overrightarrow{V} \centerdot \overrightarrow{n} d\mathcal{A} = \int\int\int_\mathcal{V} div(\overrightarrow{V}(M)).dv.$

M+ **Exercices: Intégration des fonctions de plusieurs variables** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Aires planes en cartésiennes.}}$ Cours et <u>Cycloïde</u> $x = a[t - sin(t)]$; $y = a[1 - cos(t)]$ (Arche $3a^2$). <u>Astroïde</u> $x = acos^3(t)$; $y = asin^3(t)$ $(\frac{3\pi a^2}{8})$. <u>Folium de Descartes</u> $x = \frac{3a.t}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$: idem pour boucle et partie limitée par l'asymptote ! $(\frac{3a^2}{2})$. <u>Boucle de strophoïde droite</u> $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $y = a\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$; $(\frac{4-\pi}{2}a^2)$. <u>Aire du bicorne</u> $x = sin(t)$; $y = \frac{cos^2(t)}{2-cos(t)}$; (Trouver $(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9)\pi$ vérifié par Maple). <u>Aire commune aux ellipses</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $(4.a.b.Arcsin\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$!

2. $\boxed{\text{Aires planes en polaires.}}$ Trèfle $\rho = a.cos(2.\theta)$? Lemniscate $\rho = a.\sqrt{cos(2.\theta)}$? [Trouver $\frac{\pi.a^2}{2}$; a^2].

3. $\boxed{\text{Volume de la sphère par plusieurs méthodes.}}$ [Vu en cours, mais à revoir absolument !]

4. Volume de l'onglet cylindrique $-R \leqslant x \leqslant R$; $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}; 0 \leqslant z \leqslant hy/R$. $(\mathcal{V} = 2h.R^2/3)$.

5. Volume intérieur à $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et au cône de révolution $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geqslant 0$. $(\pi(2-\sqrt{2})a^3/3)$

6. <u>Calculer</u> $I = \int\int\int z^2.dxdydz$ sur : $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ par couches et par piles. $(I = 4.\pi.a^5/15)$

7. $\boxed{\text{Forme différentielle exacte.}}$ Vérifier que $\omega = xdy - ydx$ n'est pas "fermée". Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x).\omega$ soit exacte sur un domaine à préciser ; puis trouver une primitive de $\frac{\omega}{x^2}$, soit une fonction U telle que $dU = \frac{\omega}{x^2}$. Résoudre ainsi l'équation différentielle $xy' - y = Arctan(x)$.

8. <u>Idem</u>. Calculer $\int y^2dx - x^2dy$ sur le segment ; puis sur l'arc de cercle : $A(1,0); B(0,1)$. Conclure.

9. $\overrightarrow{V}(M) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(y, -x, 0)$ dérive-t-il du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(M) = (0, 0, \frac{ln(x^2+y^2+z^2)}{2})$?

10. (*) Soit une surface passant par O, de plan tangent $z = 0$. On la coupe par deux plans perpendiculaires, contenant Oz. Soit R_1 et R_2 les 2 rayons de courbure des deux courbes découpées. Montrer que $1/R_1 + 1/R_2 = cte$ quand les plans varient. Déjà voir le cas des paraboloïdes $z = \alpha x^2 + \beta y^2$. Cas général : $\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est indépendant de la base o.n.d. choisie : laplacien.

11. (*) Calculer $div(\overrightarrow{grad}\,U) = \triangle U$; et ensuite $\overrightarrow{grad}\,(div(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V})) = \triangle\overrightarrow{V}$.

12. (*) Si $U = f(x,y) = g(\rho,\theta)$, vérifier que $\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}$. (laplacien en polaires)

13. (*) Trouver $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x,y) = u(x).v(y)$, u, v, C^2, de laplacien nul. (Trouver $u"v + v"u = 0$; donc $u"(x)/u(x) = -v"(y)/v(y)$ donc constant ; puis $u" = C.u$; $v" = -C.v$)

Chapitre 43

Appendice : Groupes, Anneaux, Corps

43.1 Groupes

43.1.1 Définition

Soit $G \neq \emptyset$ muni d'une opération interne notée $*$, c'est-à-dire $x \in G, y \in G \Longrightarrow x * y \in G$:
(on dit "loi de composition interne " : l.c.i. car au départ, c'était la composition), est un groupe si
1) $*$ est associative $(x * y) * z = x * (y * z)$,
2) posssède un neutre e : $e * x = x * e = x$,
3) et un symétrique pour chaque élément $x * x' = x' * x = e$.
Enfin, si de plus $*$ est commutative, on dit groupe commutatif ou abélien.

Remarques
– L'opération "$-$" non interne dans $\mathbb{N}$. "$-$" est interne dans $\mathbb{Z}$ mais non associative.
– $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe. $(\mathbb{R}, .)$ non plus.

43.1.2 Propriétés

1) Pour une loi interne, s'il y a un neutre, il est unique.
2) Si la loi est associative et si x a un symétrique (ou inverse), il est unique.
3) Le symétrique de $x * y$ est $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Enfin dans un groupe tout élément
4) est simplifiable à gauche : $a * x = a * y \Longrightarrow x = y$ [on dit régulier à gauche] ; et à droite.

Démonstration
1) $e * e' = e$ ou e'. (et e indépendant de x)
2) $x' * x * x" = x'$ ou $x"$ en associant. Dorénavant noté x^{-1}
3) Si $u = x * y$, résoudre $u * z = e$, trouver $z = y^{-1} * x^{-1}$ et vérifier que $z * u = e$.
4) "Composer" à gauche par a^{-1}.

Remarques
– Avec une loi notée "+" la propriété 3) devient : $-(x + y) = -y - x$. Mais on réserve cette notation "+" ("0" pour le neutre) pour un groupe abélien, en général.
– On note aussi la loi "." ce que nous ferons : $x . y$, maintenant.

43.1.3 Exemples

1. $\boxed{(\mathbb{Z}, +) \text{ est un groupe abélien.}}$

2. $(\mathbb{U}, .)$ [ensemble des complexes de module 1] est un groupe abélien.

3. $(\mathbb{U}_n, .)$ est un groupe cyclique à n éléments. $[\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2 ... \omega^{n-1}\}.]$
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a au moins un groupe d'ordre } n \text{ [de cardinal } n] \text{ à savoir le groupe cyclique } \mathbb{U}_n.}$

4. $(\mathbb{Q},+)$ $(\mathbb{R},+)$ $(\mathbb{C},+)$ $(\mathbb{R}^*,.)$ $(\mathbb{R}^{+*},.)$ ... sont des groupes abéliens.

5. $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, avec I=[0,1] par exemple, est un groupe abélien pour $+$
Remarque : Et pour o ?
Le neutre serait Id donc aller de E dans E ; et f bijective pour l'inverse ; c'est l'exemple suivant :

6. **L'ensemble des bijections de $E \neq \emptyset$ dans E est un groupe pour o, appelé groupe symétrique, noté S_E. Ses éléments sont appelés permutations. Et on sait : $\mid E \mid = n \Rightarrow \mid S_E \mid = n!$.**
Note
Quand $E = \{1, 2, ..., n\}$, on note $S_E = S_n$. Par exemple les 6 éléments de S_3 sont : Id ; (1 2) qui est la transposition $\left\{\begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}\right.$, (1 3), (2 3) de même ; (1 2 3) qui est le cycle $\left\{\begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{array}\right.$, et le cycle inverse (1 3 2)=$(1\ 2\ 3)^{-1}$. On peut voir géométriquement ce groupe comme le groupe des isométries planes conservant un triangle équilatéral de sommet 1,2,3. (transposition=sym$_\perp$/ droite)

Un groupe non abélien ? Justement (S_3, o) (en fait tout groupe de cardinal $\leqslant 5$ est abélien)
Voir : (1 2)o(1 3)=(1 3 2) $\neq$ (1 3)o(1 2)=(1 2 3).

43.1.4 Intérêt des groupes

1. Théorème **Dans un groupe, l'équation $a \centerdot x = b$ possède une et une seule solution $x = a^{-1} \centerdot b$.**
Démonstration
L'équation $a \centerdot x = b$ entraine $a^{-1} \centerdot a \centerdot x = a^{-1} \centerdot b$ ou $x = a^{-1} \centerdot b$. (associativité, neutre, inverse)
Inversement $x = a^{-1} \centerdot b$ donne $a \centerdot x = a \centerdot a^{-1} \centerdot b = b$. Donc $a \centerdot x = b \Longleftrightarrow x = a^{-1} \centerdot b$.

2. Deux exemples
1) Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a + x = b$ en a une et une seule : $(\mathbb{R},+)$ groupe.
Par contre $a \centerdot x = b$ n'a pas toujours de solution ; $(\mathbb{R},.)$ non groupe à cause de 0.

2) Dans $\mathcal{P}(E)$, l'équation $A \cup X = B$ n'a pas de solution si $A \not\subset B$; donc $(\mathcal{P}(E), \cup)$: non groupe.
Pourtant $\cup$ est interne, associative, (même commutative), $\emptyset$ est neutre : c'est que certains éléments n'ont pas de symétrique ! (seul $\emptyset$, le neutre, possède un symétrique).
Par contre
$(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien, où Δ est la différence symétrique $[A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)]$.
(pour l'associativité, faire un "diagramme de Venn" de $(A\Delta B)\Delta C$ et $A\Delta(B\Delta C)$; neutre $\emptyset$, chaque élément est son symétrique.)
Donc l'équation $A\Delta X = B$ a une et une seule solution : $X = A^{-1}\Delta B$ et même $A^{-1} = A$ ici.

43.1.5 Sous-groupes

1. Définition **On dit que H est un sous-groupe de $(G, \centerdot)$ si $H \subset G$ et si H est un sous-groupe pour la "loi induite" dans H par G, ce qui suppose qu'elle est interne dans H.**
Remarque
Soit e le neutre de G et ϵ le neutre de H. A-t-on $e = \epsilon$?
Oui car $e.\epsilon = \epsilon = \epsilon.\epsilon$ donc (en simplifiant, ce qui est permis dans un groupe) $e = \epsilon$.
En pratique **Si H est un candidat à être un sous-groupe, on vérifie $H \neq \emptyset$ en vérifiant $e \in H$.**

2. Caractérisations pour $H \subset G$ (Equivalences)

$$\boxed{\underline{H \subset G} : \ H \text{ sous-gr. de } G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} H \neq \emptyset \\ \forall x, y \in H, x \centerdot y \in H \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} H \neq \emptyset \quad \text{et:} \\ \forall x, y \in H, x \centerdot y^{-1} (\text{ou } x^{-1} \centerdot y) \in H. \end{array}\right.}$$

Utilisations des caractérisations (Démonstration en exercice. Analogue au ch. E.v.)

1) Montrons que $n.\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Avec (1) : $0 \in n.\mathbb{Z}$; puis $x = n.q,\ y = n.q' \Longrightarrow x + y = n(q + q')$; et enfin $-x = n.(-q)$.

2) Montrons que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est un groupe pour $+$.
On montre que c'est un sous-groupe d'un groupe connu ! par exemple de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.
Avec (2) : La fonction O est continue ; puis si f, g sont continues, $f - g$ est continue. Fini.

43.2 Morphismes de groupes

43.2.1 Définitions

Divers cas

Soit $(G,\centerdot)$ et $(G',*)$ deux groupes ; $f : G \to G'$ est un :
homomorphisme de groupes si $f(x \centerdot y) = f(x) * f(y),\ \ \forall x, y \in G$;
isomorphisme si, de plus, f est bijectif ;
endomorphisme si f est un homomorphisme de $(G,\centerdot)$ dans $(G,\centerdot)$;
automorphisme si f est un endomorphisme bijectif.

43.2.2 Exemples

1) $f : n \in (\mathbb{Z},+) \longmapsto 2^n \in (\mathbb{Q}^*,\centerdot)$ est un homomorphisme injectif, non surjectif ! $(3; 6 \notin Im(f).)$

2) Si $a \in (G,\centerdot)$ groupe. $n \in (\mathbb{Z},+) \longmapsto a^n \in (G,\centerdot)$ homomorphisme. non injectif si G fini !

3) $\boxed{x \in (R,+) \longmapsto e^x \in (\mathbb{R}^{+*},.) \text{ est un isomorphisme de réciproque } ln \text{ (fondamental).}}$

4) $\boxed{\theta \in (R,+) \longmapsto e^{i.\theta} \in (\mathbb{U},\centerdot) \text{ est un homorphisme surjectif, non injectif (fondamental).}}$

5) Les groupes S_4 et le groupe des isométries du carré sont-ils isomorphes (c'est-à-dire les mêmes aux notations près) ? Non : il y a seulement 8 isométries du carré, tandis que $\mid S_4 \mid = 4! = 24$.

6) Les groupes $\mathbb{U}_6$ et S_3 sont-ils isomorphes ? Non : l'un est abélien, pas l'autre.

43.2.3 Propriétés

Soit f un homomorphisme de groupes. Alors 1) $f(e) = e'$; $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$;
2) $f(G)$ encore noté $Im(f)$ est un sous-groupe de G' et f surjective $\Longleftrightarrow f(G) = G'$
3) Et $Ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\}$, appelé noyau de f, est un sous-groupe de G et
$\boxed{f \text{ injective} \Longleftrightarrow Ker(f) = \{e\}.}$

Démonstration
1) $x \centerdot e = x$ entraine $f(x) * f(e) = f(x) = f(x) * e'$ et on peut simplifier dans un groupe.
Puis $x \centerdot x^{-1} = e$ entraine $f(x) * f(x^{-1}) = f(e) = e' = f(x) * [f(x)]^{-1}$ et idem.

2) $Im(f)$ sous-groupe avec une caractérisation : contient $f(e) = e'$; puis si $f(x)$, $f(x')$ sont dans $f(G)$, $f(x) * f(x') = f(x \centerdot x')$ aussi ; et $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ est aussi dans $f(G)$. Equivalence claire.

3) [1] $Ker(f)$ sous groupe de G avec une caractérisation. Equivalence à bien voir : Pour $\Longrightarrow$: évident.
Pour $\Longleftarrow$: Supposons $f(x) = f(x')$. Ceci équivaut à $f(x) * [f(x')]^{-1} = e'$ ou $f(x) * f(x'^{-1}) = e'$ ou $f(x \centerdot x'^{-1}) = e'$ soit à $x \centerdot x'^{-1} \in Ker(f)$. L'hypothèse dit alors que $x \centerdot x'^{-1} = e$ soit : $x = x'$.

Dans l'exemple ci-dessus $\theta \in (R,+) \longmapsto e^{i.\theta} \in (\mathbb{U},\centerdot)$, le noyau est le sous-groupe $2.\pi.\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R},+)$.

[1] **En allemand, "Kern"** veut dire **"noyau"** (coeur ?) Voir aussi **en breton : "Keranna" ...**

43.3 Anneaux et corps

43.3.1 Anneaux : 2 lois internes reliées entre elles

1. Définition $(A,+,\centerdot)$ est un anneau si : 1) $(A,+)$ est un groupe abélien : neutre noté 0 ;
2) $\centerdot$ est associative et possède un neutre noté 1 ; et enfin
3) $\centerdot$ est distributive/$+$ à droite et à gauche $a\centerdot(b+c)=ab+ac$ et $(a+b)\centerdot c=ac+bc$

   Remarques [2]
   – La commutativité de $+$ résulte des autres axiomes [développer $(1+1)\centerdot(x+y)$]
   – Si $\centerdot$ est commutative, on dit anneau commutatif.

2. Exemples
   1) $\boxed{(\mathbb{Z},+,\centerdot) \text{ est un anneau commutatif}}$ 2) De même $\boxed{\mathbb{R}[x],\ \mathbb{C}[x],\ \mathbb{Q}[x] \text{ anneaux de polynômes}}$

   3) $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ où $I=[0,1]$ par exemple est un anneau pour $+$ et $\centerdot$ (des fonctions). Sera revu après.

   4) $\boxed{\text{Un anneau non commutatif ?}}$ Plus tard, pendant plusieurs chapitres.

   5) Bien voir la question suivante : Et si on prenait $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,o)$?
   - On sait que $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$ est un groupe abélien.
   - Aussi : o interne, associative et Id neutre.
   - Lien : $(f+g)oh=foh+goh$ d'après la définition de $+$, car $(f+g)[h(x)]=f[h(x)]+g[h(x)]$.
   Reste $fo(g+h)=fog+goh$? Pas toujours vrai ! $sin(x^2+x^3)\neq sin(x^2)+sin(x^3)$ à cause de sin.

3. Propriétés Dans tout anneau, on a : $0\centerdot x=x\centerdot 0=0$ où 0 est le neutre de $+$
$(-x)\centerdot y=x\centerdot(-y)=-(x\centerdot y)$, où $-x$ désigne le symétrique de x pour $+$
$(-x)\centerdot(-y)=x\centerdot y$; et deux relations essentielles, **si a et b commutent :**
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k;\qquad a^n-b^n=(a-b)(\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k)=(\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k).(a-b)$$

   Démonstration
   1) $(0+a).x=a.x$ d'où $0.x+a.x=0+a.x$ donc en simplifiant pour $+$, $0.x=0$; de même $x.0=0$.
   2) $[x+(-x)].y=0$ d'où $x.y+(-x).y=x.y+[-(x.y)]$ et simplifier pour $+$; de même $x.(-y)=-(x.y)$
   3) $x.y$ et $(-x).(-y)$ sont tous deux symétriques pour $+$ de $(-x).y$, donc égaux. Puis attention !
   4) Egalités. Si $a.b\neq ba$, $(a+b)^2=(a+b).(a+b)=a^2+a.b+b.a+b^2$; $(a+b).(a-b)=a^2-a.b+b.a-b^2$!
   Si $a.b=b.a$ on développe par double distributivité aussi. Rappel : $(a^3-b^3)=(a-b).(a^2+a.b+b^2)$.

   Exemples importants $b=1$, neutre pour la deuxième loi, commute avec tout élément. D'où :
$$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\ ;\quad 1-a^n=(1-a)(\sum_{k=0}^{n-1}a^k)=(\sum_{k=0}^{n-1}a^k).(1-a).\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Et, dans ce contexte,}\\ a^0=1,\text{ même si } a=0.\end{array}\right.$$

43.3.2 Anneau intègre

1. Diviseurs de 0
   Dans tout anneau $(x=0$ ou $y=0)\Rightarrow x\centerdot y=0$. Mais (grave ennui) la réciproque peut être fausse !
   Exemple d'anneau où il existe $a\centerdot b=0$ avec cependant $a\neq 0,\ b\neq 0$, appelés "diviseurs de 0".
   Soit $A=\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$; et a l'application : $\left\{\begin{array}{l}\text{nulle sur } [0,1/2]\text{; affine}\\ \text{sur } [1/2,1]\text{, valant 1 en 1 ;}\end{array}\right.$ $b:\left\{\begin{array}{l}\text{valant 1 en 0, affine sur}\\ [0,1/2]\text{, nulle sur } [1/2,1].\end{array}\right.$
   Le neutre pour $+$ est ici l'application nulle O. On a $a\neq O$, $b\neq O$ mais $a\centerdot b=O$. Dessin ?

[2] C.A.N.S.A.D. et N. (C.A.N.S. pour $+$) A. et N. (pour $\centerdot$) D.(lien $\centerdot/+$). En espagnol, descansarse = se reposer mais ici c'est le contraire et c'est un impératif ! (l' ancienne définition était seulement : CANSAD !)

2. Définition $\boxed{\text{Un anneau est dit "intègre" si on a l'implication } a\,.\,b=0 \Rightarrow a=0 \text{ ou } b=0.}$
Intérêt : $a\,.\,x = a\,.\,y, a\neq 0 \Rightarrow x=y$. Idem : $x\,.\,b = y\,.\,b, b \neq 0 \Rightarrow x = y$ (facile).
Exemples : 1) $(\mathbb{Z},+,.)$ est un anneau intègre. 2) De même $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ anneaux intègres.
3) $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ commutatif non intègre. 4) Nous verrons un anneau ni intègre ni commutatif.

3. Exercice important Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a^n = 0$ avec $a \neq 0$, on dit que a est nilpotent.
Alors : $\boxed{a \text{ nilpotent} \Longrightarrow 1-a \text{ inversible pour } . \quad \text{et d'inverse : } \quad (1+a+a^2+...+a^{n-1}).}$
Voir les formules précédentes. Attention : Si a nilpotent, ce n'est pas a qui est inversible !

43.3.3 Corps

1. Définition $\boxed{\text{Un corps } (\mathbb{K},+,.) \text{ est un anneau avec } (\mathbb{K}^*,.) \text{ groupe ; donc } \forall x \in \mathbb{K}^*, x \text{ inversible pour } .}$
Exemples usuels
$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$; $\mathbb{R}(x)$,$\mathbb{C}(x)$,$\mathbb{K}(x)$: corps de fractions rationnelles $\boxed{\text{On passe de } \mathbb{R}[x] \text{ à } \mathbb{R}(x) \text{ comme de } \mathbb{Z} \text{ à } \mathbb{Q}}$

2. Propriété $\boxed{\text{Un corps est (en particulier) un anneau intègre.}}$
Démonstration
Soit $a\,.\,b = 0$. Si $a \in \mathbb{K}^*$, a est inversible, d'où $a^{-1}\,.\,a\,.\,b = a^{-1}\,.\,0 = 0$; c'est donc que $b = 0$.

Sous-anneaux ; morphismes d'anneaux ; sous corps ? Hors sujet sauf : $\mathbb{R}$ sous-corps de $\mathbb{C}$; $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

Notes en **compléments**. [3]

---

[3]
– **Un thème d'algèbre générale : la preuve par 9.**

Question intéressante qui concerne : $9.\mathbb{Z}$ (les multiples de 9) et une relation d'équivalence ; la compatibilité de celle-ci avec l'addition et la multiplication ; enfin le système décimal. Voici :

1. Congruence modulo 9, dans $\mathbb{Z}$: soit la relation $a\mathcal{R}b$ si $a - b \in 9.\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire multiple de 9).
On lit : "a congru à b modulo 9", et on note $a \equiv b(9)$. Elle est réflexive (clair), symétrique (aussi) et transitive $[a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c$; car $a-b = 9.k_1, b-c = 9k_2 \Longrightarrow a-c = 9(k_1+k_2)]$; donc une relation d'équivalence qui conduit à la partition de $\mathbb{Z}$, en 9 parties :
$\widehat{0}$=classe de 0=nombres congrus à 0 modulo 9= $\{-9,0,9,18,...\}$
$\widehat{1}$=classe de 1=nombres congrus à 1 modulo 9= $\{-8,1,10,19,...\}$
...
$\widehat{8}$=classe de 8=nombres congrus à 8 modulo 9= $\{-1,8,17,...\}$.
2. Compatibilité avec + et . de cette relation !
Aisément, si $a\mathcal{R}b$ et $a'\mathcal{R}b'$, alors $(a+a')\mathcal{R}(b+b')$; et aussi $a.a'\mathcal{R}b.b'$.
En effet $a-b = 9k_1, a'-b' = 9k_2 \Longrightarrow a.a' = bb' + 9k_1b' + 9k_2b + 9k_1.9k_2 = bb' + 9K$.
3. Conséquence : Ici intervient aussi le système décimal.
$10 \equiv 1(9)$ (clair) ; donc $10^2 \equiv 1.1 = 1(9)$; $10^3 \equiv 1(9)$; et ce n'est pas tout :
$1234 = 1.10^3 + 2.10^2 + 3.10 + 4 \equiv 1.1 + 2.1 + 3.1 + 4.1(9)$; et on recommence $10 \equiv 1 + 0 = 1(9)$.

La preuve par 9 : Soit la multiplication : 1234.5678=7006652
On a : $1234 \equiv 10 \equiv 1 + 0 \equiv 1(9)$ et : $5678 \equiv 5+6+7+8 = 11+15 \equiv 1+1+1+5 \equiv 8(9)$. La réponse doit être congrue à 1.8=8 modulo 9. Or : $7+0+0+6+6+5+2 \equiv 13+13 \equiv 1+3+1+3 \equiv 8(9)$. C'est le cas !
Remarque : Dans le système décimal, la preuve "par 11" est assez simple aussi, car $1234 \equiv 4-3+2-1(11) \equiv 2(11)$.

– **Les carrés magiques.**
. A ne pas confondre avec les "carrés latins" de la table d'un groupe (cf. Verso, Exercice).
. Ici, la somme des lignes, colonnes, diagonales est constante. Pas de répétition : Fig. 1 et 2.
La Fig. 2 provient d'un tableau d'Albert Dürer. La Fig. 3 est le célèbre carré de lettres "SATOR"...

6	1	8
7	5	3
2	9	4

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

donnant : "PATER NOSTER"

M+ **Exercices: Groupes, Anneaux, Corps** **PTSI**

---

1. $\boxed{\text{Intersection de sous-groupes. Réunion ?}}$
   (a) D'abord dans $(\mathbb{Z},+)$. Préciser $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$; puis $6\mathbb{Z}\cap 8\mathbb{Z}$. Constat(s) ?
   En général, montrer que : Si H_1, H_2 sont deux sous-groupes de G, $H_1\cap H_2$ aussi.
   [Et idem avec $(\cap H_i)_{i\in I}$ où I est une "famille" quelconque d'indices].
   (b) Que dire, par contre, de $6\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}$? Y a-t-il un plus petit sous groupe de $\mathbb{Z}$ les contenant ?

2. Rappeler la première caractérisation des sous-groupes. Montrer-là. Puis la seconde.

3. Rappeler le cours sur les homomorphismes de groupe (Définitions, Exemples, Propriétés).
   (a) Exemple 1 : Que dire de $f : z\in(\mathbb{C},+)\longmapsto \overline{z}\in(\mathbb{C},+)$? Et avec $\centerdot$? Et $z\longmapsto\mid z\mid$?
   (b) Exemple 2 : Vérifier que $(\mathcal{HT},o)$ (homothéties-translations) est un groupe (non abélien) ; et $f:\varphi\in(\mathcal{HT},o)\longmapsto$rapport$(\varphi)\in(\mathbb{R}^*,\centerdot)$ est un homomorphisme avec $Ker(f)=\mathcal{T}$ (abélien) !

4. (*) On peut trouver un autre groupe à 4 éléments distinct de $\mathbb{U}_4$:
   Soit $(\mathcal{G},o)$ l'ensemble des isométries du plan affine conservant un rectangle non carré.
   Si A,B,C,D est ce rectangle de centre O, I et J milieux de $[A,B]$ et de $[B,C]$, voir que $\mathcal{G}$ comprend : - l'identité, notée Id, - r_0 rotation de centre O d'angle 180 degrés,
   - s_x symétrie par rapport à OI - s_y symétrie par rapport à OJ et ce sont les seules.
   Voir qu'on a un groupe et faire la table des $\boxed{gof}$ (carré latin : pas de répétition en lignes, colonnes)
   [avec $s_x : (A,B,C,D)\longmapsto(B,A,D,C)$; $r_0 : (A,B,C,D)\longmapsto(C,D,A,B)$ par exemple]. Trouver

$g\backslash f$	Id	r_0	s_x	s_y
Id	Id	r_0	s_x	s_y
r_0	r_0	Id	s_y	s_x
s_x	s_x	s_y	Id	r_0
s_y	s_y	s_x	r_0	Id

   (La loi o est interne ici, toujours associative,
   Id est neutre et chaque élément est son symétrique).

   Note : $(\mathcal{G},o)$ est appelé "groupe de Klein".
   Constater que ce groupe $\mathcal{G}$ est aussi abélien ; mais qu'on a une différence de structure avec $\mathbb{U}_4$: dans $\mathcal{G}$ tout élément est son propre inverse $fof=Id$; alors que dans $\mathbb{U}_4$: $i\centerdot i\neq 1$ (le neutre) !

5. (*) Sous groupe engendré par un élément.
   Vérifier que $\{a^n, n\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(G,\centerdot)$; on l'appelle sous-groupe engendré par a et on le note $<a>$. On appelle ordre de $<a>$ son cardinal : $|<a>|$ (comme pour tout sous-groupe).
   On appelle aussi ordre de l'élément $a\in G$ le plus petit $p\in\mathbb{N}^*$, s'il existe, tel que $a^p=e$.
   On veut vérifier que c'est la même chose : ordre (a) et ordre $(<a>)$:
   Cas particuliers : $G=\mathbb{U}$ et $a=i$? Cas $G=\mathbb{U}$ et $a=e^i$ (on admet $\pi\notin\mathbb{Q}$) ?
   En général (G fini ou non), vérifier que : ordre(a)=ordre $(<a>)$. (Donc pas de problème) !

6. $\boxed{\text{Anneaux et corps}}$
   (a) Exemples d'anneaux ? Un anneau non intègre : $A=\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ où $I=[0,1]$; pourquoi ?
   (b) Exemples de corps ? Montrer qu'un corps est (un anneau) intègre.
   (c) Montrer que si a est nilpotent ($a\neq 0$), dans un anneau, $1\pm a$ est inversible. a est-il inversible ?
   (d) (*) Montrer que $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib, a,b\in\mathbb{Z}\}$ est un anneau [appelé anneau des entiers de Gauss ; il possède aussi une division euclidienne et il est très utile en arithmétique].
   (e) (*) $A=\mathcal{P}(E),\Delta,\cap$ est un anneau "de Boole", soit : $\forall x\in A,$ "$x\centerdot x=x$" ("idempotent").

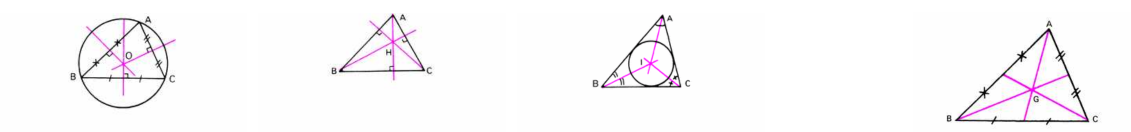
Table des matières

Progression du cours **(1 chapitre / semaine)**

ch.06 : Toussaint **ch.13 : Noël** **ch.23 ... ou 26 : Pâques** **ch.30-33 : fin mai-juin.**

Lecture du cours **Faire des résumés. Refaire les exemples traités. Faire des dessins.**

Exemple : médiatrices, hauteurs, bissectrices (intérieures), et aussi médianes concourantes :



Eviter enfin les divers compléments qui ne sont que des thèmes de problème.

(*) Quelques exercices de Révisions

1. Sur les suites. <u>On admet ici le Théorème de Césaro</u> : Soit (u_n) une suite à terme réels qui tend vers L (finie ou infinie). Alors $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$ tend aussi vers L quand $n \to +\infty$.
   (a) Lemme de l'escalier :
   On suppose que : $a_{n+1} - a_n$ tend vers L. En déduire que : $\dfrac{a_n}{n}$ tend vers L.
   (b) Avec $ln(\alpha_n)$:
   On suppose que $\alpha_n > 0$ et que $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ tend vers $L \geqslant 0$. Montrer que $\sqrt[n]{\alpha_n}$ tend vers L.
   En déduire que : $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$; et que : $\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

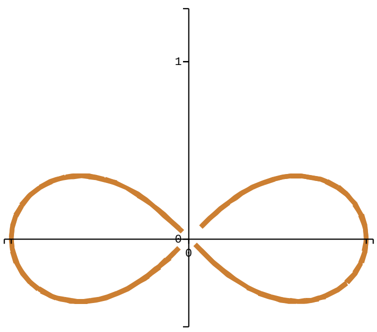
2. Des intégrales avec des changements de variables.
   (a) Soit f définie continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, vérifier que : $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(x.u).du.$
   (b) Soit $I_a = \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{Arctan(x)}{x}.dx$, $a > 0$. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que : $I_a = \dfrac{\pi}{2}.ln(a)$.
   (c) Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} ln(1 + tan(x)).dx$. Avec $t = \dfrac{\pi}{4} - x$, vérifier que $I = \dfrac{\pi}{4}.ln(2) - I$. Valeur de I ?
   Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx$. (On se ramère à l'intégrale I précédente) Montrer que : $I = J$.
   Soit $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(x)}{1+x}.dx$. vérifier que $K = \dfrac{\pi}{4}.ln(2) - J$. Conclure que $I = J = K$.

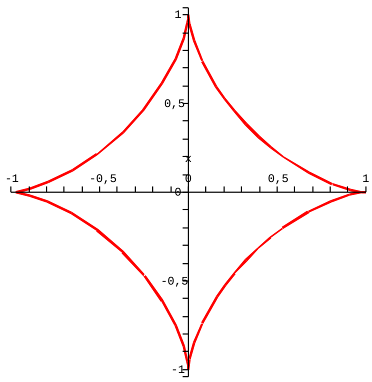
3. Sur les matrices.
   (a) – Vérifier par division euclidienne que : $X^3 + 2.X^2 + 2.X = (X^2 + X + 1)(X + 1) - 1$.
   – On suppose que la matrice carrée A vérifie $A^3 + 2.A^2 + 2.A = O$.
   Déduire que $(A^2 + A + I)(A + I) = I$. Conclusion sur $A^2 + A + I$?
   (b) On cherche les matrices M telles que $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$. Montrer que $M.A = A.M$.
   En déduire que M est forcément diagonale. Prouver qu'il y a une et une seule solution.

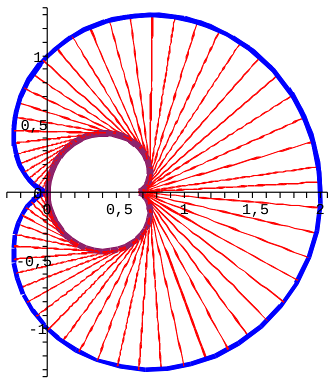
4. Divers développements limités.
   (a) Au point 0, vérifier que : $ln(e^{2x} + 2.e^x + 3) = ln(6) + \dfrac{2}{3}x + x.\epsilon(x)$.
   (b) Au point 0, vérifier que : $ch(ln(ch(x))) = 1 + \dfrac{1}{8}x^4 + x^4.\epsilon(x)$.
   (c) Au point 1, en posant $x = 1 + h$, vérifier que : $ln(1 + x + x^2) = ln(3) + \dfrac{4}{3}h + \dfrac{1}{9}h^2 + h^2.\epsilon(h)$.
   (d) Soit $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - 2x}{3}$. Montrer qu'elle est bijective au voisinage de $x = 0$ et que f^{-1}
   y possède un DL_2 valant : $f^{-1}(y) = y - \dfrac{y^2}{6} + y^2.\epsilon(y)$.
   (e) Montrer que : $x^{n+1} + x^n - 1 = 0$ possède une unique racine positive x_n ; et $1 - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ln(2)}{n}$.
   (f) Pour : $f(x) = \dfrac{ln(x)}{2-x}$, trouver, pour $k \in [[0, 3]]$, $f^{(k)}(1)$. (Réponse : 0 ; 1 ; 1 ; 5 ; par DL !)

5. Quelques problèmes de dénombrements.
   (a) Soit une partie donnée A d'un ensemble E. On suppose que $\mid A \mid = p \leqslant \mid E \mid = n$.
   Nombre de parties X telles que $A \subset X$? (Dire : $\overline{X} \subset \overline{A}$; donc 2^{n-p} cas).
   (b) Nombre de parties X telles que $X \cap A = \emptyset$? (Idem : c'est $X \subset \overline{A}$).
   (c) Nombre de parties X telles que $X \cup A = E$? (2^p car c'est $\overline{X} \subset A$).
   (d) Nombre de coupes (X, Y) avec $X \subset Y$? (3^n avec le Binôme de Newton !)
   (e) Nombre de coupes (X, Y) avec $X \cap Y = \emptyset$? (Idem car c'est : $X \subset \overline{Y}$!)
   (f) Nombre de coupes (X, Y) avec $X \cup Y = E$? (Idem car c'est : $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$.)
   (g) Nombre d'applications strictement croissantes de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$? $p \leqslant n$. ($\binom{n}{p}$.)
   (h) (*) Nombre d'applications croissantes de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$? (Ind. f est une telle appl.
   $\Leftrightarrow$ $g(k) = f(k) + k - 1$ est strictement croisante de $[[1, p]]$ dans $[[1, n + p - 1]]$!)

En note : **une "lemniscate de Bernoulli" (symbole de l'infini), une astroïde (de la trigonométrie) et deux "cardioïdes" (la petite est dite "enveloppe" des normales à la grande) :**







et géométrie projective (cube à 3 points de fuite ; "Annonciation" ; et village du Chazelet, la Meije) :