

Benoît Kloeckner

UN BREF APERÇU DE LA
GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Benoît Kloeckner

UN BREF APERÇU DE LA GÉOMÉTRIE
PROJECTIVE

Benoît Kloeckner

PRÉFACE

De nombreux autres ouvrages contiennent déjà la matière développée dans ce livre ; son objectif est d'en donner une présentation moderne, motivée et adaptée aux étudiants français de niveau licence ou master de mathématiques (ou du moins à ce que j'en perçois) ainsi que fournir une introduction rapide aux enseignants peu familiers avec la géométrie projective.

La géométrie en général, et la géométrie projective en particulier, est assez mal lotie dans les programmes universitaires et assez mal considérée par les étudiants, les deux phénomènes n'étant pas sans liens. Ceci m'est apparu très clairement lorsque j'ai participé à la préparation de l'agrégation de l'université Joseph Fourier à Grenoble entre 2008 et 2010 : les étudiants en savaient peu, et s'empressaient rarement à en apprendre beaucoup plus. L'une des raisons est bien sûr la difficulté du concours qu'ils préparaient, qui les pousse à rechercher l'efficacité.

Ceci se combine avec la très faible présence de la géométrie dans les programmes universitaires. Ce domaine est pour la plupart des licenciés en mathématiques *terra incognita*, et par conséquent considéré comme particulièrement difficile. J'espère que ce livre au format peu intimidant participera à montrer que la géométrie projective est accessible et élégante, et convaincra quelques esprits curieux de mathématique de faire l'effort nécessaire pour découvrir un petit pan de géométrie, qui pourquoi pas leur donnera l'envie d'aller plus loin.

Présentation et motivation. — La géométrie projective peut se définir en quatre mots comme la « géométrie de la vision ». L'espace dans

lequel nous évoluons et la surface de la rétine n'ont pas la même dimension, et le passage de l'un à l'autre se fait par l'intermédiaire d'une projection. La lumière se déplaçant en ligne droite, l'œil identifie schématiquement à un point toute droite passant par le centre de la pupille. La géométrie projective prend pour objet l'ensemble des droites passant par un point donné. En termes plus formels, un espace projectif est l'ensemble des droites d'un espace vectoriel.

Bien sûr, puisque nous parlons de géométrie, cet ensemble doit être muni d'une certaine structure ; par exemple, on définira la notion d'alignement (quand trois points de l'espace sont-ils perçus comme alignés ?). À partir de quelques notions simple de ce type, toute une théorie se construit, qu'on peut relier à de nombreux champs mathématiques : géométrie algébrique, topologie, géométrie différentielle — mais ces considérations dépassent le cadre de ce livre.

Le point de vue adopté ici repose entièrement sur l'algèbre linéaire : le point de vue axiomatique, bien que fondamental, est entièrement ignoré. Il a semblé préférable d'assumer une telle lacune que de sacrifier l'objectif de concision.

Guide de lecture. — Le premier chapitre introduit les principaux concepts de la géométrie projective. On a cherché à l'illustrer autant que possible, mais il reste assez abstrait. Dans les deux chapitres suivant on étudie plus en détail les exemples fondamentaux.

Le chapitre deux concerne la droite projective, essentiellement sur le corps des réels ou celui des complexes. Il a été écrit pour pouvoir être lu presque indépendamment des autres. La principale raison en est que le programme de géométrie projective de l'agrégation s'est réduit au cours de la rédaction de ce livre à la dimension 1 ; ce choix permettra au candidats à ce concours de l'utiliser directement, même s'il est conseillé de lire à partir du début.

Le chapitre trois s'intéresse au plan projectif sur le corps des réels. Il dépend fortement du chapitre précédent, en particulier par l'utilisation du birapport.

Le chapitre quatre est destiné à l'étude des droites d'un plan projectif : homographies entre droites, faisceaux, relation aux coniques.

Cette organisation fait des trois premiers chapitres une présentation un peu cloisonnée de la géométrie projective : on y trouve beaucoup de définitions, quelques résultats purement projectifs mais peu d'applications : il s'agit d'introduire les espaces projectifs, et d'étudier leurs propriétés

les plus immédiates. Ce choix a été fait afin de concentrer l'essentiel en un petit nombre de pages, afin que l'on puisse s'initier ou se rafraîchir la mémoire facilement. Le lecteur curieux est encouragé à consulter d'autres ouvrages plus développés pour satisfaire sa curiosité.

Chaque chapitre se termine sur quelques exercices. Les plus simples sont marqués d'un rond blanc \circ , tandis qu'un rond noir \bullet signale les plus sophistiqués. Les exercices ne sont pas nécessairement indépendants, pour certains quelques indications sont données à la fin du livre.

Citons quelques références incontournables en français, sur lesquelles je me suis d'ailleurs parfois appuyé. La série de Marcel Berger, dont le premier tome [Ber77] aborde entre autres la géométrie projective, est un classique absolu qui couvre un spectre très large. Le livre de Michèle Audin [Aud06], également consacré à la géométrie en général, est un très bon outil pour tout étudiant à l'université. Les bases de géométrie affine nécessaires à la lecture de ce bref aperçu peuvent, par exemple, y être travaillées avec profit. On y délèguera également à l'occasion, et c'est de là que vient, par exemple, la seconde démonstration que nous donnerons du théorème de Pascal.

L'ouvrage de Pierre Samuel [Sam86], purement projectif, prend un point de vue plus algébrique, beaucoup de démonstrations étant basées sur les applications rationnelles de la droite projective. Il est, en cela au moins, complémentaire du présent ouvrage.

Enfin, le livre de Jean-Claude Sidler [Sid93] permettra d'aller assez loin dans l'utilisation de la géométrie projective dans des problèmes de géométrie classique.

Prérequis. — On suppose le lecteur familier avec l'algèbre linéaire classique, ainsi qu'avec la réduction des endomorphismes (qu'on n'utilisera qu'occasionnellement). On suppose également connue la géométrie affine élémentaire (espaces et sous-espaces affines, applications affines et leur partie linéaire, repères affines, barycentre, etc.) et le vocabulaire des actions de groupes (transitivité en particulier).

Pour les coniques, on utilisera aussi l'algèbre bilinéaire (formes quadratiques, signature, etc.) Enfin, on parlera très ponctuellement de topologie dans le second chapitre.

Remerciements. — Ce livre a largement bénéficié des conseils avisés de ses relecteurs et relectrice : Maxime Bourrigan, Tiphaine Dupas Patrick Massot et Frédéric Mazoit, étant entendu que toute erreur ou choix de style malheureux m'est entièrement imputable.

CHAPITRE 1

PREMIÈRES DÉFINITIONS

Dans ce chapitre on introduit les définitions qui fondent la géométrie projective : ses espaces et sous-espaces, ses « transformations naturelles », ses repères et les coordonnées associées, etc.

On considère dans toute la suite un corps commutatif⁽¹⁾ \mathbb{K} et un espace vectoriel E sur \mathbb{K} . On supposera E de dimension finie. Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels sont basés sur \mathbb{K} , les applications linéaires sont \mathbb{K} -linéaires et les combinaisons linéaires sont à coefficients dans \mathbb{K} . On peut, ne serait-ce que pour visualiser les objets, considérer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1. Espaces et sous-espaces projectifs

1.1.1. Espaces projectifs. — Notre première définition ne devrait pas surprendre, puisqu'on l'a annoncée plus haut : un espace projectif est l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel.

Définition 1.1. — On appelle *projectivé* de l'espace vectoriel E l'ensemble $P(E)$ de ses droites vectorielles. Tout projectivé d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est un *espace projectif* (sur \mathbb{K}).

La *dimension* de $P(E)$ est par définition

$$\dim P(E) = \dim E - 1.$$

1. Il est possible de faire de la géométrie projective basée sur des nombres plus généraux (par exemple les quaternions, et même dans une certaine mesure les octonions) mais des difficultés apparaissent.

Si $P(E)$ est de dimension 1, on dit que c'est une droite projective ; s'il est de dimension 2 que c'est un plan projectif.

Souvent, on notera $\mathbb{K}P^n$ pour $P(\mathbb{K}^{n+1})$ et on l'appellera « l'espace projectif de dimension n sur \mathbb{K} ». Par exemple $\mathbb{R}P^1$ désigne la droite projective réelle et $\mathbb{R}P^2$ le plan projectif réel.

Considérons tout de suite des exemples réels. Commençons par le cas trivial $E = \{0\}$: comme E ne contient aucune droite vectorielle, $P(E) = \emptyset$. D'après la définition, il est de dimension -1 . Considérer ce cas dégénéré est un exercice de zérologie ; comme souvent, cela permet toutefois d'énoncer certains résultats sans écarter de cas particulier (voir la démonstration du corollaire 1.5).

Considérons maintenant $E = \mathbb{R}$. Dans ce cas, E est de dimension 1 et ne contient qu'une seule droite : lui-même. Par conséquent $P(E) = \{E\}$ est réduit à un point, ce qui est cohérent avec la définition de sa dimension, égale à 0.

Le premier cas vraiment intéressant est $E = \mathbb{R}^2$:

$$P(E) = \{ \langle v \rangle \mid v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \}$$

où on a noté $\langle v \rangle = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ la droite vectorielle engendrée par un vecteur v .

Dans ce cas $P(E)$ est de dimension 1 et en bijection avec un arc de cercle (figure 1), ce qui à nouveau ne manque pas de cohérence. En fait, on peut même identifier $\mathbb{R}P^1$ avec un cercle en « recollant » les deux extrémités de cet arc ; toutefois on ne s'occupera que plus tard de munir les espaces projectifs d'une topologie.

1.1.2. La projection canonique. — On dispose d'une application dite *projection canonique* :

$$P : \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \rightarrow & P(E) \\ v & \mapsto & \langle v \rangle \end{array}$$

où $\langle v \rangle$ désigne toujours la droite $\{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$ engendrée par le vecteur v . Elle est surjective par définition ; l'image réciproque d'un point $x \in P(E)$ par cette application est une droite vectorielle de E , privée de 0. Plus précisément, l'image réciproque de la droite vectorielle x est $x \setminus \{0\}$. On

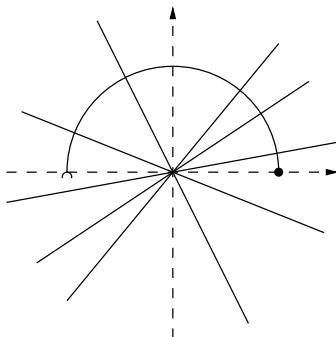


FIGURE 1. Chaque droite rencontre l'arc de cercle (fermé à droite, ouvert à gauche) en un unique point.

s'habituer à considérer $x = \langle v \rangle = P(v)$ avant tout comme un point de $P(E)$.

La projection canonique est invariante sous l'action de \mathbb{K}^* par homothéties :

$$P(\lambda v) = P(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

On peut voir $P(E)$ comme le quotient de $E \setminus \{0\}$ par cette action, on note donc parfois

$$P(E) = (E \setminus \{0\}) / \mathbb{K}^*$$

c'est-à-dire qu'on identifie une droite de E (et donc un point de $P(E)$) et la même droite privée de l'origine, qui est exactement une orbite de l'action de \mathbb{K}^* sur $E \setminus \{0\}$.

Remarquons qu'on a déjà utilisé la lettre P pour représenter le projectif d'un espace linéaire et la projection canonique. Il n'y a en pratique pas de risque de confusion, et on continuera à l'utiliser de façon semblable sur les applications (voir plus loin).

1.1.3. Sous-espaces. — Pour l'instant notre définition d'un espace projectif en fait un simple ensemble ; le fait d'appeler « points » ses éléments ne suffit pas à en faire un objet géométrique. Il lui manque une structure géométrique, c'est à dire un ensemble de propriétés sur ses points qui soient de nature géométrique. La plus simple est sans doute la notion d'alignement : quand peut-on dire que des points de $P(E)$ sont

alignés? Quand ils appartiennent à une même droite, évidemment. La prochaine notion à définir est donc celle de sous-espace projectif.

Comme un espace projectif est défini à partir d'un espace vectoriel, on va se servir de la notion de sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel E , alors son projectivé $P(F)$ est une partie de $P(E)$: toute droite de F est également une droite de E . Ceci permet d'introduire la définition suivante.

Définition 1.2. — Une partie A de $P(E)$ est un *sous-espace projectif* (ou simplement *sous-espace*) si elle s'écrit $A = P(F)$ pour un certain sous-espace vectoriel F de E .

En particulier, une *droite projective* (ou simplement *droite*) de $P(E)$ est un sous-espace projectif de dimension 1, c'est-à-dire le projectivé d'un plan vectoriel de E .

On dit que des points x_1, \dots, x_k de $P(E)$ sont *alignés* s'il existe une droite qui les contient tous.

Ainsi, trois points de $P(E)$ sont alignés si et seulement si, en tant que droites de E , ils sont coplanaires (figure 2).

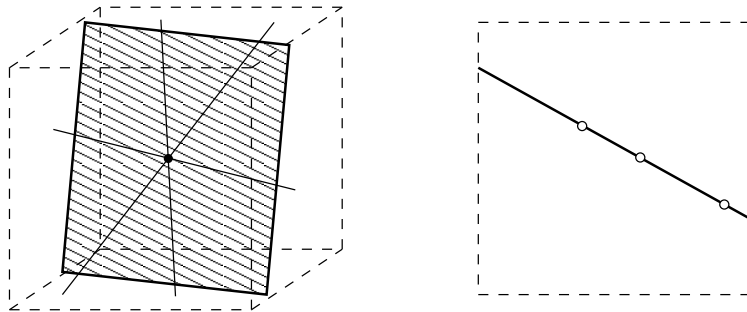


FIGURE 2. À gauche : dans un espace vectoriel de dimension 3, trois droites vectorielles coplanaires. À droite : une représentation (pour l'instant schématique) des objets projectifs associés aux objets vectoriels de gauche, à savoir trois points alignés.

Remarquons que si A est un sous-espace projectif de $P(E)$, il existe un *unique* sous-espace vectoriel F tel que $P(F) = A$.

Notons également que la dimension d'un sous-espace est au plus égale à la dimension de l'espace considéré.

1.1.4. Intersection de sous-espaces. — Considérer l'intersection de deux sous-espaces projectifs, en plus de donner une première occasion de les manipuler un peu, va nous fournir un résultat fondamental dans l'étude des plans projectifs. Dans un plan affine, on sait que deux droites distinctes peuvent être sécantes ou parallèles. Cette distinction est à l'origine de quantité de disjonctions de cas dans les théorèmes de géométrie plane. Comme on va le voir, cette distinction n'a plus lieu d'être dans les plans projectifs ; on verra plus loin une interprétation en termes de « points à l'infini ».

Proposition 1.3. — *Une intersection de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif. De plus, si A et B sont deux sous-espaces d'un espace projectif P(E), on a :*

$$\dim(A \cap B) \geq \dim A + \dim B - \dim P(E).$$

Démonstration. — Soit (A_i) une famille de sous-espaces projectifs de P(E). Pour tout indice i , soit F_i le sous-espace vectoriel de E tel que $A_i = P(F_i)$. Un point de P(E) appartient à l'intersection $\bigcap A_i$ si et seulement s'il s'écrit $\langle v \rangle$ avec $v \in \bigcap F_i$, autrement dit $\bigcap A_i = P(\bigcap F_i)$. Comme une intersection de sous-espace vectoriels est un sous-espace vectoriel, $\bigcap A_i$ est bien un sous-espace projectif de P(E).

Démontrons la seconde partie. Par définition, il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $A = P(F)$ et $B = P(G)$. On sait que

$$\dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim(F + G) \leq \dim E$$

ce qui entraîne par définition de la dimension d'un sous-espace projectif :

$$\dim A + 1 + \dim B + 1 - \dim(A \cap B) - 1 \leq \dim P(E) + 1$$

qui s'écrit encore :

$$\dim(A \cap B) \geq \dim A + \dim B - \dim P(E).$$

□

Proposition 1.4. — *On considère dans un espace projectif P(E) deux sous-espaces A, B. Si $A \subset B$ et si A et B ont même dimension, alors $A = B$.*

Démonstration. — Cette propriété découle directement de son analogue vectoriel. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E tels que $A = P(F)$

et $B = P(G)$. Toute droite de F est incluse dans G par hypothèse, donc $F \subset G$. Mais $\dim A = \dim B$ entraîne $\dim F = \dim G$, donc $F = G$. \square

Donnons maintenant la propriété plane annoncée (figure 3).

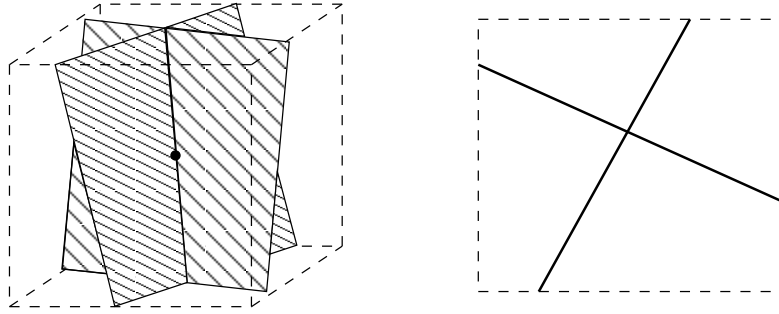


FIGURE 3. Deux plans vectoriels de \mathbb{K}^3 se croisent le long d'une droite, donc deux droites de $\mathbb{K}P^2$ se coupent en un point.

Corollaire 1.5. — Soient $A, B \subset P(E)$ deux droites distinctes d'un plan projectif. Alors A et B s'intersectent en exactement un point.

Démonstration. — D'après la proposition 1.3, $A \cap B$ est un sous-espace de $P(E)$ et on a $\dim(A \cap B) \geq 1 + 1 - 2 = 0$. En particulier $A \cap B$ n'est pas vide (sinon il serait de dimension -1).

De plus comme $A \cap B \subset A$, si $\dim(A \cap B)$ valait 1 on aurait en vertu de la proposition 1.4 : $A \cap B = A$. Il s'en suivrait $A \subset B$ et donc $A = B$, cas exclu par hypothèse.

On en déduit que $A \cap B$ est de dimension 0, donc est réduit à un point de $P(E)$. \square

Le fait que l'intersection de sous-espaces soit encore un sous-espace permet, comme en géométrie affine ou en algèbre linéaire, de définir la notion de sous-espace engendré par une partie.

Définition 1.6. — Soit $P(E)$ un espace projectif et $S \subset P(E)$. On appelle sous-espace (projectif) *engendré* par S le plus petit sous-espace de $P(E)$ qui contient S , c'est-à-dire

$$\text{proj}(S) = \bigcap \{A \mid A \text{ sous-espace de } P(E) \text{ tel que } A \supset S\}$$

Cette notion est directement reliée à celle de sous-espace vectoriel engendré par une partie : on a en effet $\text{proj}(S) = P(\text{vect}(P^{-1}(S)))$, c'est-à-dire que $\text{proj}(S)$ est l'ensemble des droites contenues dans le sous-espace vectoriel engendré par l'image réciproque $P^{-1}(S)$. Le lecteur est invité à vérifier cette assertion, ainsi que les exemples suivants : pour tous $x \neq y \in P(E)$, on a

- $\text{proj}\{x\} = \{x\}$ et
- $\text{proj}\{x, y\}$ est une droite projective (figure 4).

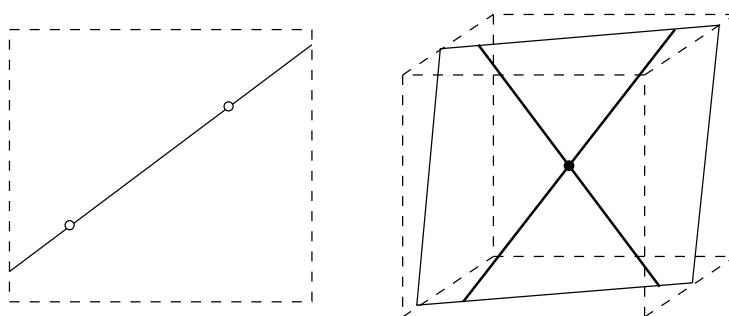


FIGURE 4. Deux points d'un espace projectif et la droite qu'ils engendrent, et les objets linéaires associés.

1.2. Transformations projectives

Maintenant que l'on a défini un peu de structure sur nos espaces projectifs, il nous faut en définir les « transformations naturelles ». L'algèbre linéaire a ses applications linéaires, la géométrie affine ses applications affines, la géométrie euclidienne ses isométries, la géométrie projective, comme on va le voir, ses transformations projectives.

1.2.1. Définition. — On a défini un espace projectif à partir d'un espace vectoriel, c'est donc sans surprise qu'on définit une transformation projective à partir d'une application linéaire.

Soient E et F des espaces vectoriels et $P(E)$, $P(F)$ leurs projectivés. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On cherche à construire à partir de f une application $P(E) \rightarrow P(F)$: considérons donc l'image d'une droite de E par f . Si cette droite est incluse dans le noyau de f , alors son image

est réduite à zéro. Sinon, c'est une droite de F , donc un point de $P(F)$. Si f a son noyau réduit à zéro, c'est-à-dire si elle est injective, on peut donc définir l'application :

$$P(f) : \begin{array}{ccc} P(E) & \rightarrow & P(F) \\ \Delta = \langle v \rangle & \mapsto & f(\Delta) = \langle f(v) \rangle \end{array}$$

Une autre façon de le dire est la suivante : si on note P les deux projections canoniques $E \rightarrow P(E)$ et $F \rightarrow P(F)$ alors $P(f)$ est l'unique application qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & F \setminus \{0\} \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ P(E) & \xrightarrow{P(f)} & P(F) \end{array}$$

Si f n'est pas injective, on ne peut définir $P(f)$ ainsi ; on ne la définit en fait pas du tout. La géométrie projective n'a d'applications naturelles qu'injectives ; c'est une grande différence avec la géométrie affine, qui possède par exemple des projections sur ses sous-espaces. Toutefois cette situation n'est pas si exotique, puisque dans un espace métrique par exemple une application qui préserve les distances est nécessairement injective.

Définition 1.7. — Soient $P(E)$ et $P(F)$ des espaces projectifs. Une application $\varphi : P(E) \rightarrow P(F)$ est *projective* (on parle également de *plongement projectif*) s'il existe une application linéaire injective $f : E \rightarrow F$ telle que $\varphi = P(f)$, c'est-à-dire φ est l'application qui à une droite Δ de E associe la droite $f(\Delta)$ de F .

Comme d'habitude il y a un vocabulaire spécifique au cas $E = F$. Une application $\varphi : P(E) \rightarrow P(E)$ est une *transformation projective*, également appelée *homographie* ou *automorphisme projectif*, s'il existe une application linéaire inversible $f : E \rightarrow E$ telle que $\varphi = P(f)$.

Nous réserverons en pratique le terme « homographie » à la dimension 1, mais ce n'est pas une convention universelle.

Notons qu'un plongement projectif de $P(E)$ dans lui-même est, par le théorème du rang, une transformation projective.

On voit également très simplement (en repassant à l'algèbre linéaire) qu'un plongement projectif envoie tout sous-espace projectif sur un sous-espace de même dimension.

Un plongement projectif $P(E) \rightarrow P(F)$ inversible est appelé un *isomorphisme*. Le théorème du rang montre qu'un plongement projectif est un isomorphisme si et seulement si les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Sur un corps donné, il n'existe donc à isomorphisme près qu'un seul espace projectif de chaque dimension (tout comme en géométrie vectorielle et affine). C'est pourquoi il est légitime de parler de *la droite projective* ou *du plan projectif* réels, ou complexes.

Les transformations projectives possèdent beaucoup de propriétés qui découlent directement des propriétés analogues vérifiées par les automorphismes. Par exemple, elles envoient un sous-espace projectif sur un sous-espace de même dimension, et si on les restreint à un sous-espace et à son image on obtient un isomorphisme projectif.

1.2.2. Le groupe projectif. — On vérifie immédiatement que si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications linéaires injectives,

$$(1) \quad P(f \circ g) = P(f) \circ P(g)$$

Il s'ensuit que la composée de deux plongements projectifs est un plongement projectif. En particulier une transformation projective $\varphi = P(f)$ de $P(E)$ est toujours inversible, et son inverse est $P(f^{-1})$, donc projectif lui aussi. L'ensemble des transformations projectives de $P(E)$ forme donc un groupe, son *groupe projectif*, que l'on notera $PGL(E)$ ou, si l'on préfère faire référence à l'espace projectif plutôt qu'à l'espace vectoriel sous-jacent, $Aut(P(E))$. On notera $PGL(n+1; \mathbb{K}) = PGL(\mathbb{K}^{n+1}) = Aut(\mathbb{K}P^n)$.

L'application $P : GL(E) \rightarrow PGL(E)$ (où $GL(E)$ désigne le groupe des endomorphismes inversibles de E) est encore appelée la projection canonique; c'est un morphisme de groupes comme le montre (1).

Proposition 1.8. — *Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme inversible et (b_0, b_1, \dots, b_n) une base de E . Si f préserve les droites $\langle b_i \rangle$ et $\langle \sum_{i=0}^n b_i \rangle$, alors f est une homothétie.*

En particulier, le noyau de l'application $P : GL(E) \rightarrow PGL(E)$ est le sous-groupe des homothéties (vectorielles) non nulles.

Démonstration. — Comme f préserve chacune des droites $\langle b_i \rangle$, pour tout i il existe un $\lambda_i \in \mathbb{K}$ non nul tel que $f(b_i) = \lambda_i b_i$. On a donc

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n f(b_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$$

Notons $b = \sum_{i=0}^n b_i$; f préserve la droite $\langle b \rangle$ donc il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul tel que $f(b) = \lambda b$. Cette dernière égalité s'écrit encore $f(\sum_i b_i) = \lambda \sum_i b_i$ soit, en utilisant la linéarité de f ,

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n f(b_i) = \sum_{i=0}^n \lambda b_i$$

Mais comme (b_0, b_1, \dots, b_n) est une base, les équations (2) et (3) montrent que $\lambda_i = \lambda$ pour tout i . On en conclut que f est l'homothétie de rapport λ .

En particulier, si $P(f)$ est l'identité alors f est une homothétie. Réciproquement, une homothétie non nulle h est inversible et préserve chaque droite de E , donc $P(h)$ est l'identité. \square

Un homothétie non nulle de E s'écrit $v \mapsto \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on peut donc écrire

$$\mathrm{PGL}(E) \simeq \mathrm{GL}(E)/\mathbb{K}^*$$

On détaillera dans la suite quelques propriétés dynamiques du groupe projectif, c'est-à-dire certaines propriétés de son action sur $P(E)$. Nous avons déjà les moyens de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.9. — *L'action du groupe projectif $\mathrm{PGL}(E)$ sur $P(E)$ est transitive, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in P(E)$ il existe $\varphi \in \mathrm{PGL}(E)$ tel que $\varphi(x) = y$.*

Démonstration. — Soient $x, y \in P(E)$. Il existe v_1, w_1 des vecteurs non nuls de E tels que $x = \langle v_1 \rangle$ et $y = \langle w_1 \rangle$. Complétons ces vecteurs en des bases (v_1, \dots, v_n) et (w_1, \dots, w_n) de E . Il existe un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ tel que pour tout i on ait $f(v_i) = w_i$; il est inversible puisqu'il envoie une base sur une base. La transformation affine $\varphi = P(f)$ envoie alors x sur y . \square

Cette démonstration permet d'obtenir des résultats de transitivité bien plus forts : par exemple, étant donnés deux couples de points distincts $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_2$, il existe une transformation projective qui envoie

x_1 sur y_1 et x_2 sur y_2 . Ces résultats admettront une présentation plus synthétique une fois qu'on aura introduit la notion de repère projectif.

1.3. Repères projectifs

Les espaces projectifs sont pour l'instant des objets assez abstraits ; pour les rendre plus concrets et permettre, par exemple, d'y définir des parties par des équations, il leur faut un système de coordonnées. Les coordonnées d'un espace vectoriel dépendent du choix d'une base et les coordonnées d'un espace affine dépendent du choix d'un repère ; il nous faut donc en définir l'analogue projectif.

1.3.1. Première approche. — Commençons par le cas $E = \mathbb{K}^{n+1}$. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ on note

$$\begin{aligned} [x_0 : x_1 : \dots : x_n] &= P(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &= \{\lambda(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^* \end{aligned}$$

l'image de (x_0, x_1, \dots, x_n) par la projection canonique. Avec cette définition, on a $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$. La réciproque a lieu : $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$ si et seulement si les vecteurs (x_0, x_1, \dots, x_n) et (y_0, y_1, \dots, y_n) sont colinéaires. Cette écriture (on parle de *coordonnées homogènes*) des éléments de $\mathbb{K}P^n$ n'est donc unique qu'à multiplication par un scalaire près. Elle s'avère néanmoins très pratique.

Il s'agit maintenant d'utiliser cet exemple pour traiter le cas d'un espace vectoriel E quelconque, supposé de dimension $n+1$. Il suffit bien sûr de choisir une base (b_0, b_1, \dots, b_n) de E et d'associer à un point $x \in P(E)$, qui s'écrit $\langle \sum x_i b_i \rangle$, les coordonnées homogènes $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Toutefois, notre question n'est pas réglée : il serait plus satisfaisant que les coordonnées homogènes dépendent d'objets de $P(E)$ plutôt que d'une base de E . Un premier réflexe pourrait être d'associer à la base (b_0, b_1, \dots, b_n) son projeté sur $P(E)$, c'est-à-dire la famille des points $(\langle b_0 \rangle, \langle b_1 \rangle, \dots, \langle b_n \rangle)$. Cette idée ne fonctionne pas telle quelle : en effet, connaître ces points ne permet pas de distinguer la base d'origine d'une autre base de la forme $(\lambda_0 b_0, \lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n)$. Ceci apparaît très clairement sur un exemple.

Supposons $P(E)$ de dimension 1, soient (e_0, e_1) une base de E et $p_0 = \langle e_0 \rangle$, $p_1 = \langle e_1 \rangle$ les points de $P(E)$ associés. Soit $p = \langle x_0 e_0 + x_1 e_1 \rangle$ un point de $P(E)$; on voudrait lui associer les coordonnées homogènes $[x_0 : x_1]$. Mais, par exemple, la base $(e'_0, e'_1) = (e_0, 2e_1)$ de E se projette sur la même famille (p_0, p_1) que la base originale. Dans cette nouvelle base, on peut écrire $p = \langle x_0 e'_0 + \frac{1}{2} x_1 e'_1 \rangle$ donc on voudrait associer à p les coordonnées homogènes $[x_0 : \frac{1}{2} x_1]$, qui sont différentes des coordonnées précédente *même à multiplication par un scalaire près*. Autrement dit, spécifier p_0 et p_1 ne suffit pas pour retrouver des coordonnées homogènes cohérentes sur $P(E)$. Il va falloir spécifier un peu plus, c'est l'objet du paragraphe suivant.

1.3.2. Repères et coordonnées projectives. — Le résultat suivant est fondamental : il va justifier la définition qui suit et permettre d'obtenir les propriétés dynamiques annoncées plus haut. Il peut paraître un peu curieux au premier abord, mais la proposition 1.8 le contenait déjà en germe.

On utilise la notation suivante : $\{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_{n+1}\}$ représente l'ensemble des p_k pour k allant de 0 à $n+1$ différent de i et de j .

Théorème 1.10. — Soit $P(E)$ un espace projectif de dimension n et p_0, p_1, \dots, p_{n+1} des points de $P(E)$ tels que :

$$(4) \quad p_i \notin \text{proj}\{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_{n+1}\} \text{ pour tout } (i, j).$$

Alors il existe une base (b_0, \dots, b_n) de E telle que

$$(5) \quad \begin{cases} p_i = \langle b_i \rangle \text{ si } 0 \leq i \leq n \\ p_{n+1} = \langle \sum_{k=0}^n b_k \rangle \end{cases}$$

De plus si une base (b'_0, \dots, b'_n) vérifie (5), alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $b'_i = \lambda b_i$ pour tout i .

Démonstration. — En se rappelant qu'un point p_i de $P(E)$ est une droite vectorielle de E , on traduit (4) en :

$$(6) \quad p_i \cap \text{vect}\{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_{n+1}\} = \{0\}.$$

Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, soit \tilde{b}_i un élément non nul de la droite p_i . La condition (6) appliquée aux indices $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $j = n+1$ assure que $(\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ est une base de E , car aucun des \tilde{b}_i n'est combinaison linéaire des autres.

Soit b_{n+1} un élément non nul de la droite p_{n+1} , et écrivons-le dans cette base :

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \mu_k \tilde{b}_k.$$

La condition (6) appliquée aux indices $i = n + 1$ et $j = k$ montre que $\mu_k \neq 0$ quel que soit k . Notons alors $b_i = \mu_i \tilde{b}_i$. La famille (b_0, b_1, \dots, b_n) est une base, et vérifie (5).

Supposons maintenant qu'une seconde base $(b'_0, b'_1, \dots, b'_n)$ vérifie (5). D'après la proposition 1.8, l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ qui envoie cette base sur (b_0, b_1, \dots, b_n) est une homothétie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $b'_i = \lambda b_i$ pour tout i . \square

Définition 1.11. — On appelle *repère projectif* d'un espace projectif $P(E)$ de dimension n tout $(n + 2)$ -uplet de points $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ vérifiant (4), c'est-à-dire tel qu'aucun des p_i n'est contenu dans le sous-espace projectif engendré par n autres des p_j . On appelle *coordonnées homogènes* de $x \in P(E)$ dans ce repère la classe

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \{\lambda(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où (x_0, x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de n'importe quel antécédent de x par la projection canonique, dans n'importe quelle base vérifiant (5). Une telle base est dite *adaptée* au repère $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$.

Le théorème 1.10 assure que les coordonnées homogènes sont bien définies : choisir un autre antécédent de x ou une autre base vérifiant (5) ne change les x_i qu'en les multipliant par une même constante, donc ne change pas la classe $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Bien sûr, comme dans les cas vectoriel et affine, les coordonnées d'un point dépendent du repère considéré.

Exemple 1.12. — Si $P(E)$ est de dimension 2, un repère projectif est donné par quatre points tels que que trois ne sont jamais alignés. Donnons un exemple concret. Dans \mathbb{RP}^2 on considère la famille suivante :

$$\langle(1, 0, 0)\rangle, \langle(1, 1, 0)\rangle, \langle(1, 1, 1)\rangle, \langle(3, 2, 1)\rangle.$$

C'est un repère projectif directement construit à partir de la base

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$$

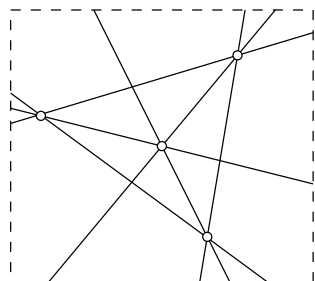


FIGURE 5. Quatre points du plan projectif qui en forment un repère et les six droites qu'ils engendrent deux à deux.

de \mathbb{R}^3 . Un vecteur (x, y, z) s'écrit dans cette base

$$(x - y)(1, 0, 0) + (y - z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1)$$

donc le point $\langle(x, y, z)\rangle$ a pour coordonnées homogènes dans le repère considéré : $[x - y : y - z : z]$.

Remarquons que, contrairement à ce qui se passe dans les cas vectoriel et affine, si $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ est un repère de $P(E)$, alors pour tout i la famille $(p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1})$ engendre $P(E)$ tout entier.

Comme tout espace vectoriel admet une base, tout espace projectif admet un repère. On a même un équivalent du théorème de la base incomplète.

Proposition 1.13. — *Toute famille de points (p_0, \dots, p_k) d'un espace projectif $P(E)$ vérifiant*

$$(7) \quad p_{i+1} \notin \text{proj}\{p_0, \dots, p_i\} \quad \forall i < k$$

peut être complétée en un repère projectif.

Avant de démontrer ce résultat, signalons une distinction entre la géométrie projective et, par exemple, la géométrie affine : un repère d'un sous-espace (strict) de $P(E)$ ne vérifie pas (7), mais seulement la relation plus faible (4). Par contre si l'on enlève un point quelconque à ce repère, alors (7) est vérifiée.

Démonstration. — Pour chaque $0 \leq i \leq k$ choisissons un élément non nul b_i de la droite p_i de E . La condition (7) assure que la famille (b_0, \dots, b_k) est libre (en particulier $k \leq n$, la dimension de $P(E)$). On peut la compléter

en une base (b_0, \dots, b_n) de E et définir $b_{n+1} = \sum_0^n b_i$. Alors la famille des $\langle b_i \rangle$ est un repère projectif qui complète (p_0, \dots, p_k) . \square

Le tableau suivant est à garder en tête pour ne pas faire de confusion sur le nombre d'éléments d'un repère projectif.

Dans un espace de dimension n ,	nombre d'éléments nécessaires pour	
	engendrer l'espace	former une base/un repère
vectorel	n	n
affine	$n + 1$	$n + 1$
projectif	$n + 1$	$n + 2$

1.3.3. Conséquences dynamiques. — La notion de repère projectif permet de bien comprendre à quel point précisément l'action du groupe projectif est transitive.

Proposition 1.14. — *L'action projective de $\text{PGL}(E)$ est simplement transitive sur les repères, c'est-à-dire que pour tout couple de repères projectifs $(p_0, \dots, p_{n+1}), (q_0, \dots, q_{n+1})$ il existe une unique transformation projective φ telle que $\varphi(p_i) = q_i$ pour tout i .*

Démonstration. — Soient (b_0, \dots, b_n) et (c_0, \dots, c_n) des bases respectivement associées à ces deux repères par la relation (5). Soit $f \in \text{GL}(E)$ l'unique automorphisme linéaire de E tel que $f(b_i) = c_i$ pour tout i . Alors en notant $\varphi = P(f)$ on a

$$\varphi(p_i) = P(f)(\langle b_i \rangle) = \langle f(b_i) \rangle = \langle c_i \rangle = q_i$$

pour tout i , ce qui montre la transitivité de l'action.

Supposons que $\varphi' = P(f')$ soit une autre transformation projective envoyant (p_0, \dots, p_{n+1}) sur (q_0, \dots, q_{n+1}) , et notons $c'_i = f'(b_i)$. Comme f est une application linéaire inversible, les c'_i forment une base de E . De plus on a pour tout $i \leq n$:

$$q_i = \varphi'(p_i) = \langle f'(b_i) \rangle = \langle c'_i \rangle$$

et

$$q_{n+1} = \varphi'(p_{n+1}) = \left\langle f' \left(\sum_{i=0}^n b_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n c'_i \right\rangle.$$

La base c'_i et le repère (q_0, \dots, q_{n+1}) vérifient la relation (5), donc le théorème 1.10 assure qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $c'_i = \lambda c_i$ pour tout i .

Vu la définition des c'_i , cela signifie que $f' = \lambda f$ et donc $\varphi' = \varphi$, ce qui montre l'unicité attendue. \square

Corollaire 1.15. — *L'action projective de $\text{PGL}(E)$ est transitive sur les droites de $P(E)$, ainsi que sur ses sous-espaces de dimension k pour tout k .*

Démonstration. — Le résultat se déduit des deux propositions précédentes. Étant donnés deux sous espaces A, B de même dimension k , ils possèdent des repères (p_0, \dots, p_{k+1}) et (q_0, \dots, q_{k+1}) . On ne peut pas les compléter en des repères de $P(E)$, mais on peut le faire des familles (p_0, \dots, p_k) et (q_0, \dots, q_k) , qui engendrent A et B respectivement. La transformation projective qui envoie ces deux complétés l'un sur l'autre envoie donc A sur B . \square

1.4. Cartes affines

Les cartes affines que l'on va définir plus bas établissent un lien fort entre la géométrie projective et la géométrie affine. Elles permettent de mieux comprendre la première en la ramenant (dans une certaine mesure) à la seconde, mais surtout de démontrer des résultats affines par des méthodes projectives

L'idée qui va donner naissance à ces « cartes » est très simple : plutôt que de représenter un élément par une classe d'équivalence $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, on pourrait choisir dans chaque classe un élément, déterminé par une certaine règle. Par exemple, en divisant tout par x_n , on peut écrire $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [x_0/x_n : \dots : x_{n-1}/x_n : 1]$ et donc représenter notre élément par les n nombres $(x_0/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n)$. Évidemment, ceci n'est possible que pour x_n non nul, et cette méthode permet seulement de représenter une partie de $P(E)$.

Plus géométriquement, on fait (très grossièrement) la même chose qu'un appareil photo : on projette une partie des droites passant par l'origine (le centre optique de l'appareil) sur un hyperplan affine (la pellicule).

Formalisons un peu ce raisonnement. Soient (p_0, \dots, p_{n+1}) un repère projectif de $P(E)$ et (b_0, \dots, b_n) une base de E qui lui est adaptée. Soit F l'hyperplan de E formé des vecteurs dont les coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n)

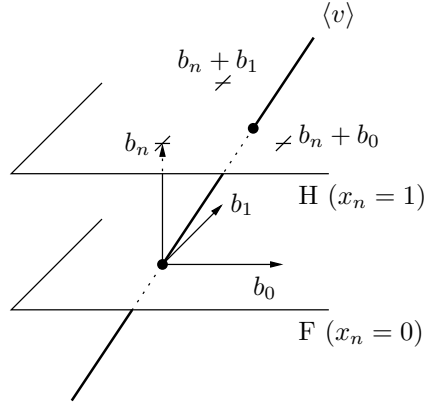


FIGURE 6. Chaque droite de E qui n'est pas dans F coupe l'hyperplan affine d'équation $(x_n = 1)$ en exactement un point.

dans cette base vérifient $x_n = 0$. On a ainsi $P(F) = \text{proj}\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$. Soit H l'hyperplan affine de E d'équation $x_n = 1$.

Considérons l'ensemble

$$U = P(E) \setminus P(F)$$

et définissons l'application

$$(8) \quad \Psi : \begin{array}{l} U \rightarrow H \\ \langle v \rangle \mapsto \langle v \rangle \cap H \end{array}$$

Si on utilise les coordonnées homogènes fournies par (p_0, \dots, p_{n+1}) sur $P(E)$ et les coordonnées affines fournies par le repère affine $(b_n, b_n + b_0, b_n + b_1, \dots, b_n + b_{n-1})$ (figure 6) sur H , on peut encore écrire :

$$\Psi : [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

Cette application est bijective, et c'est ce que l'on appelle une carte affine.

Définition 1.16. — Une *carte affine* d'un espace projectif $P(E)$ associée à un repère (p_0, \dots, p_{n+1}) est une application $\Psi : P(E) \setminus P(F) \rightarrow H$ qui à $\langle v \rangle$ associe son intersection avec H , où :

- H est l'hyperplan affine de E d'équation $x_n = 1$ dans les coordonnées définies par une base de E adaptées au repère ;
- F est l'hyperplan vectoriel de E d'équation $x_n = 0$ dans mêmes coordonnées.

La partie $U = P(E) \setminus P(F)$ est appelée *domaine* de Ψ . Par abus de langage, on dit parfois que U est lui-même une carte affine.

Remarquons que si l'on change de base adaptée au repère, c'est-à-dire si on remplace les b_i par des $b'_i = \lambda b_i$, on change H mais pas l'expression de Ψ en coordonnées :

$$\begin{aligned} [\lambda^{-1}x_0 : \lambda^{-1}x_1 : \cdots : \lambda^{-1}x_n] &\mapsto \left(\frac{\lambda^{-1}x_0}{\lambda^{-1}x_n}, \dots, \frac{\lambda^{-1}x_{n-1}}{\lambda^{-1}x_n} \right) \\ &= \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right). \end{aligned}$$

Les résultats suivants montrent à quel point la notion de carte affine est pertinente, et crée un vrai lien entre l'espace projectif et le domaine de la carte considérés.

Proposition 1.17. — *Considérons une carte affine $\Psi : U \rightarrow H$ d'un espace projectif $P(E)$ et soit A un sous-espace projectif de dimension k . Si A rencontre U , alors $\Psi(A \cap U)$ est un sous-espace affine de H de dimension k .*

Inversement, soit B un sous-espace affine de dimension k de H . Il existe un unique sous-espace projectif A de $P(E)$ tel que $\Psi^{-1}(B) = A \cap U$.

On appelle $\Psi(A \cap U)$ la *trace* de A sur H , et A le *complété* (projectif) de B .

Démonstration. — Soit F l'hyperplan de E vérifiant $U = P(E) \setminus P(F)$ et G celui pour lequel on a $A = P(G)$. Si $G \subset F$, alors $A \cap U = \emptyset$ donc son image par Ψ est vide. Sinon G n'est pas parallèle à H , et ce sous-espace affine étant de codimension 1 dans E , $G \cap H$ est un sous-espace affine de E de dimension $\dim G - 1 = k$. Ceci démontre la première partie de la proposition car par définition on a $\Psi(A \cap U) = G \cap H$.

Pour démontrer la deuxième partie, il suffit de considérer le sous-espace vectoriel $\text{vect}(B)$ de E . Il est de dimension $k + 1$ car B , inclus dans H , ne contient pas 0. Alors $A = P(\text{vect}(B))$ convient. \square

Proposition 1.18. — *Considérons une carte affine*

$$\Psi : U = P(E) \setminus P(F) \rightarrow H$$

et soit φ une transformation projective de $P(E)$ qui préserve $P(F)$. Alors $\Psi\varphi\Psi^{-1} : H \rightarrow H$ est une transformation affine.

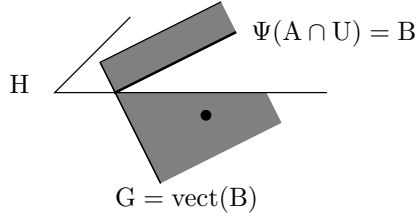


FIGURE 7. Correspondance entre sous-espaces projectifs et affines.

Inversement, si $h : H \rightarrow H$ est une transformation affine alors l'application $\Psi^{-1}h\Psi : U \rightarrow U$ se prolonge en une transformation projective de $P(E)$.

Notons qu'on appelle *transformation affine* toute application affine inversible d'un espace dans lui-même.

Démonstration. — Soit $f \in GL(E)$ telle que $\varphi = P(f)$. Comme φ préserve $P(F)$, f préserve F et envoie H sur un hyperplan affine qui lui est parallèle. La composée de f et de l'homothétie α qui envoie $f(H)$ sur H est une application affine $H \rightarrow H$. C'est aussi $\Psi\varphi\Psi^{-1}$, ce qui montre la première partie de la proposition.

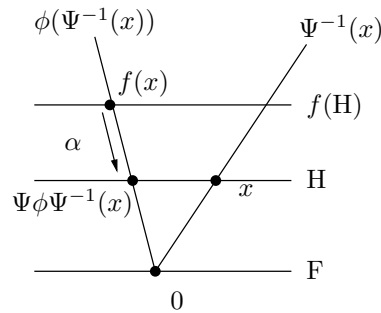


FIGURE 8. Correspondance entre transformations projectives et affines.

Pour la réciproque écrivons en coordonnées; on va montrer que toute transformation affine peut s'obtenir par le procédé précédent.

Comme f préserve F , sa matrice dans la base (b_0, \dots, b_n) (où, comme précédemment, on suppose que (b_0, \dots, b_{n-1}) est une base de F) est de

la forme

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ & * & & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est non nul car f est inversible. Quitte à diviser par λ , ce qui change f mais pas φ , on peut supposer que la matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} & & & t_0 \\ & & & \vdots \\ & M & & t_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où (t_0, \dots, t_{n-1}) peut être n'importe quel élément de \mathbb{K}^n et M n'importe quelle matrice $n \times n$ inversible.

Alors en coordonnées sur H , $\Psi\varphi\Psi^{-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} & & & t_0 \\ & & & \vdots \\ & M & & t_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(M \left| \begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{array} \right. \right) + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où on reconnaît l'écriture générale d'une transformation affine en sa partie linéaire et une translation. Toute transformation affine de H peut donc s'écrire $\Psi\varphi\Psi^{-1}$ pour une certaine transformation projective φ qui préserve $P(F)$. \square

Exercices

1. \circ — Soient x_1, \dots, x_k des points d'un espace projectifs. Montrer que la dimension de $\text{proj}(x_1, \dots, x_k)$ est au plus $k - 1$.

2. \circ — Démontrer l'assertion suivante, affirmée à la fin de la section 1.2.1 : une application projective envoie tout sous-espace projectif sur un sous-espace projectif de même dimension.

3. — Soient $P(E)$ un espace projectif de dimension n et H_1, \dots, H_k des hyperplans projectifs. Montrer que si $k \leq n$, alors

$$\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$$

4. \circ — Soit $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ un repère d'un espace vectoriel $P(E)$. Montrer que pour tout i , on a $\text{proj}(p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}) = P(E)$.

5. \circ — Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs suivants :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\langle v_i \rangle)_{0 \leq i \leq 3}$ est un repère de $\mathbb{R}P^2$ et en donner une base adaptée.

6. \bullet — On note \mathbb{F}_q le corps à q éléments (où q est donc une puissance d'un nombre premier). Déterminer de deux façons le nombre d'éléments de $\mathbb{F}_q P^n$.

Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{F}_q P^n$. Quand $n = 2$, comparer avec le nombre de points.

Déterminer le nombre de repères projectifs de $\mathbb{F}_q P^n$.

7. — Soit $P(E)$ un espace projectif, $P(F)$ un hyperplan et $\varphi \in \text{PGL}(E)$. On note $U = P(E) \setminus P(F)$ et on considère une carte affine Ψ de domaine U .

On suppose que φ préserve $P(F)$. Montrer qu'elle en fixe chaque point si et seulement si $\Psi\varphi\Psi^{-1}$ est une homothétie ou une translation.

8. \bullet — On appelle *courbe algébrique* de degré d sur un corps \mathbb{K} une partie de \mathbb{K}^2 qui est l'ensemble des racines d'un polynôme de degré d . Par exemple dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, un cercle admet une équation de la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ donc est une courbe algébrique de degré 2 (autrement dit, une conique, mais nous y reviendrons).

En constatant que deux équations proportionnelles définissent la même courbe, construire une application surjective \mathcal{E} de $\mathbb{K}P^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1}$ dans

l'ensemble des courbes algébriques de degré au plus d , telle que pour tout point $x \in \mathbb{K}^2$, l'image réciproque par \mathcal{E} de l'ensemble des courbes passant par x est un hyperplan projectif.

En déduire qu'étant donnés $(d+1)(d+2)/2 - 1$ points de \mathbb{K}^2 , il existe toujours une courbe algébrique de degré au plus d passant par tous ces points.

CHAPITRE 2

LA DROITE PROJECTIVE

Dans ce chapitre on étudie la dimension 1, c'est-à-dire la droite projective sur \mathbb{K} . On considèrera plus particulièrement les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La lecture du chapitre précédent est recommandée mais pas indispensable pour celui-ci.

2.1. Présentation

Dans cette section on reprend les différentes constructions du premier chapitre dans le cas de la droite. On va prendre un point de vue plus directement concret en commençant par le cas de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$, avant de considérer une droite quelconque.

2.1.1. Coordonnées homogènes. — La ⁽¹⁾ droite projective sur \mathbb{K} est l'ensemble $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ des droites vectorielles de \mathbb{K}^2 . On appellera souvent un élément de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ un point, pour bien insister sur le fait que ce sont les constituants de l'espace qui nous intéresse.

On dispose sur \mathbb{K}^2 de coordonnées canoniques : un vecteur s'écrit (x_0, x_1) où $x_0, x_1 \in \mathbb{K}$. On construit les *coordonnées homogènes* sur $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ de la façon suivante. À un élément $(x_0, x_1) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ on associe le point de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ correspondant à la droite qu'il engendre : $\{\lambda(x_0, x_1) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, que l'on note $[x_0 : x_1]$. Évidemment un vecteur colinéaire à celui choisi engendre la même droite, de sorte que $[\lambda x_0 : \lambda x_1] = [x_0 : x_1]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Inversement, si $[x_0 : x_1] = [y_0 : y_1]$, alors les vecteurs (x_0, x_1) et

1. voir la section 1.2.1

(y_0, y_1) sont proportionnels. Autrement dit, la notation $[x_0 : x_1]$ signifie que l'on considère le couple (x_0, x_1) à multiplication par un scalaire non nul près.

Ceci peut se résumer par la formule

$$\mathbb{K}P^1 = (\mathbb{K}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où \mathbb{K}^* agit par multiplication par un scalaire. Notons que formellement, les orbites de cette action sont les droites vectorielles *privées de l'origine*, mais il suffit de les identifier aux droites vectorielles complètes pour obtenir l'égalité ci-dessus.

2.1.2. Carte affine. — Notons $\widehat{\mathbb{K}}$ l'union de \mathbb{K} et d'un point noté ∞ . À l'aide de ces coordonnées homogènes, on peut identifier $\mathbb{K}P^1$ à $\widehat{\mathbb{K}}$:

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}P^1 & \rightarrow & \widehat{\mathbb{K}} \\ [x_0 : x_1] & \mapsto & \begin{cases} \frac{x_0}{x_1} & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \infty & \text{si } x_1 = 0 \end{cases} \end{array}$$

On peut comprendre cette construction ainsi : plutôt que de considérer les deux nombres x_0, x_1 à multiplication près, il est plus économique de ne garder que leur rapport x_0/x_1 . Toutefois, dans le cas où x_1 est nul, ce rapport n'est pas défini. On ajoute alors le symbole ∞ pour représenter le point $[x_0 : 0] = [x_0 \cdot x_0^{-1} : 0 \cdot x_0^{-1}] = [1 : 0]$.

On peut également en donner une explication plus géométrique : on cherche à représenter les droites vectorielles de \mathbb{K}^2 en considérant leur point d'intersection avec la droite affine H d'équation $(x_1 = 1)$. Le seul point de $\mathbb{K}P^1$ qui ne peut pas être représenté ainsi est la droite d'équation $(x_1 = 0)$, mais on le récupère en considérant qu'elle intersecte en fait H « à l'infini » (figure 1).

Suite à cette identification, on peut vouloir visualiser la droite projective réelle comme un cercle S^1 (une droite collée des deux côtés à un point) et la droite projective complexe à une sphère S^2 (un plan collé à l'infini sur un point). C'est une très bonne idée, car si l'on munit $\mathbb{R}P^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ de la topologie quotient, ces espaces sont bien homéomorphes à S^1 et S^2 respectivement. Nous y reviendrons.

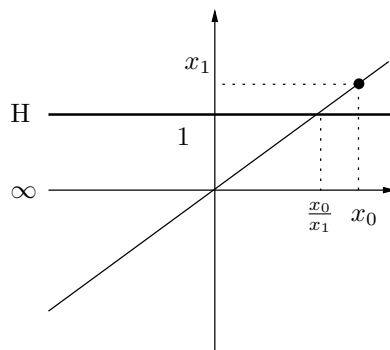


FIGURE 1. Chaque droite vectorielle est associée à son point d'intersection avec H.

On peut bien sûr effectuer la même construction à partir d'une autre base que la base canonique. L'identification (9) est alors appelée une *carte affine*, et les points qui ne sont pas identifiés à ∞ forment le *domaine* de cette carte.

2.2. Homographies

2.2.1. Définition. — L'espace vectoriel \mathbb{K}^2 dispose d'un « groupe de transformations », c'est-à-dire d'un groupe qui agit en préservant la structure d'espace vectoriel : le groupe linéaire $GL(2; \mathbb{K})$.⁽²⁾ Ce groupe agit également sur les droites de \mathbb{K}^2 , donc sur la droite projective $\mathbb{K}P^1$. En coordonnées homogènes,⁽³⁾ cette action s'écrit simplement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Cette action n'est pas libre. En effet une homothétie λId (où Id désignera indifféremment l'application identité ou sa matrice) préserve toutes les droites, donc fixe tous les points de $\mathbb{K}P^1$. Inversement, supposons

2. On identifiera couramment, dans le cas de \mathbb{K}^n , une application linéaire et sa matrice dans la base canonique. Une telle pratique n'est pas possible dans un espace vectoriel quelconque si l'on n'a pas fixé une base précise.

3. On note ici $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x : y]$

qu'un élément de $\mathrm{GL}(2; \mathbb{K})$ agisse trivialement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Alors en particulier

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela implique $a = \alpha \neq 0$ et $c = 0$. De même, en considérant le deuxième vecteur de la base canonique, on trouve $d = \beta \neq 0$ et $b = 0$. Enfin, il existe un $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = \beta = \lambda$ et l'application considérée est une homothétie.

On a montré que le noyau de l'action de $\mathrm{GL}(2; \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ est l'ensemble des homothéties. Cet ensemble est bien sûr un sous-groupe distingué, ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 2.1. — On appelle *groupe projectif* de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ le groupe quotient $\mathrm{PGL}(2; \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(2; \mathbb{K}) / \{\lambda \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. Un élément de ce groupe est décrit par une matrice inversible 2×2 , considérée à multiplication par un scalaire non nul près, ce qui est dénoté par des crochets :

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{K}^* \right\}$$

On appelle *homographie* toute bijection de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ obtenue en faisant agir un élément de $\mathrm{PGL}(2; \mathbb{K})$ par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

On note $P : \mathrm{GL}(2; \mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2; \mathbb{K})$ l'application qui à un automorphisme linéaire de \mathbb{K}^2 associe l'homographie correspondante.

L'inverse d'une homographie s'obtient simplement en calculant l'inverse d'une matrice 2×2 ; en fait c'est même plus simple puisqu'on peut sans dommage multiplier par un scalaire, par exemple le déterminant. Ainsi on a :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Une remarque importante : l'écriture matricielle est intéressante dans l'étude « dynamique » des homographies, puisque si $\varphi = [M]$ où M est une matrice 2×2 , un point fixe de φ est une droite vectorielle envoyée sur elle-même, c'est-à-dire une droite propre de M . La réduction des endomorphismes va donc jouer un grand rôle dans l'étude des points fixes des homographies; cette remarque est d'ailleurs valable en toute dimension.

2.2.2. Interprétation en carte affine. — On a identifié $\mathbb{K}P^1$ à $\widehat{\mathbb{K}}$ en décrétant que $z \in \mathbb{K}$ représente le point $[z : 1]$ et ∞ le point $[1 : 0]$. Cette identification donne une écriture particulièrement agréable à l'action de $\text{PGL}(2; \mathbb{K})$.

On a en effet :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ cz + d \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } cz + d \neq 0 \\ \begin{bmatrix} az + b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a \\ c \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } c \neq 0 \\ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que les alternatives sont bien cohérentes. Par exemple si $cz + d = 0$, alors $az + b \neq 0$. Dans le cas contraire, le vecteur $(z, 1)$ serait en effet envoyé sur 0 par une application linéaire inversible.

Pour éviter les disjonctions de cas, on introduit les conventions suivantes de calcul dans $\widehat{\mathbb{K}}$:

$$\frac{w}{0} = \infty \text{ pour } w \in \mathbb{K}^*, \quad \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c} \text{ pour tout } c \in \mathbb{K}$$

ce qui donne l'expression suivante pour l'action de $\mathrm{PGL}(2; \mathbb{K})$:

$$(10) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

pour tout $z \in \widehat{\mathbb{K}}$. Remarquons d'une part que l'on n'a jamais à traiter des expressions de la forme $0/0$, d'autre part que les conventions choisies donnent bien, pour tout a non nul et tous b, d finis :

$$\frac{a\infty + b}{0\infty + d} = \frac{a}{0} = \infty$$

Notons également que si les éléments de $\widehat{\mathbb{K}}$ peuvent prendre la valeur ∞ , les coefficients des matrices que l'on manipule sont eux toujours dans \mathbb{K} . Pour certaines expressions impliquant des éléments de $\widehat{\mathbb{K}}$, on introduit les conventions supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \infty \times x &= \infty & \forall x \in \mathbb{K}^* \\ \infty + x &= \infty & \forall x \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

2.2.3. Transitivité et repères. — Reprenons maintenant les idées de 1.3.3 dans le cas de la droite.

Proposition 2.2. — *L'action projective de $\mathrm{PGL}(2; \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ est triplement transitive, c'est-à-dire que si (x, y, z) est un triplet de points deux à deux distincts de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ et (x', y', z') également, alors il existe une homographie φ telle que $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ et $\varphi(z) = z'$. De plus cette homographie est unique.*

Avant de démontrer ce résultat, il paraît important de signaler que cette propriété de « stricte » transitivité triple est loin d'être anodine. Il existe en effet très peu de telles actions sur les ensembles finis. En particulier, d'après un théorème de Camille Jordan [Jor72], s'il existe une action strictement triplement transitive sur un ensemble fini de cardinal n , alors $n - 1$ est nécessairement une puissance d'un nombre premier. Le groupe projectif de $\mathbb{F}_q\mathbb{P}^1 = \widehat{\mathbb{F}}_q$ fournit l'exemple type d'une telle action.

Démonstration. — On peut démontrer ce résultat de deux manières (au moins). La première consiste à reprendre dans ce cas simple la méthode du premier chapitre. On montre qu'il existe deux bases (b_0, b_1) et (b'_0, b'_1) vérifiant $\langle b_0 \rangle = x$ et $\langle b'_0 \rangle = x'$, $\langle b_1 \rangle = y$ et $\langle b'_1 \rangle = y'$ ainsi que $\langle b_0 + b_1 \rangle = z$ et $\langle b'_0 + b'_1 \rangle = z'$. Ces bases sont uniquement déterminées à multiplication

par un scalaire près, et il existe un élément de $GL(2; \mathbb{K})$ qui envoie l'une sur l'autre (bien défini et unique à multiplication par un scalaire près). La proposition suit. Le lecteur intéressé pourra se reporter au premier chapitre pour les détails ou, mieux, les écrire lui-même.

On peut aussi montrer le résultat « à la main » en s'aidant de l'expression (10). On se place donc sur $\widehat{\mathbb{K}}$. On va montrer par étapes qu'il existe une homographie envoyant (x, y, z) sur $(\infty, 0, 1)$, ce qui permettra de conclure facilement.

Si x est un point de $\widehat{\mathbb{K}}$ différent de ∞ , alors

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -cx \end{bmatrix}$$

envoie x sur ∞ pour tout a , tout $b \neq -ax$ et tout $c \neq 0$; donc il existe toujours une homographie φ envoyant x sur ∞ . Ceci montre que l'orbite de ∞ est $\widehat{\mathbb{K}}$ tout entier, donc que l'action de $PGL(2; \mathbb{K})$ est transitive. De plus le stabilisateur de ∞ est exactement l'ensemble des

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

pour $a, d \neq 0$ et b quelconque.

Soient maintenant x et y des points distincts de $\mathbb{K}P^1$ et montrons qu'il existe une homographie envoyant x sur ∞ et y sur 0 . Quitte à composer par une homographie, on peut supposer $x = \infty$. On cherche donc une homographie fixant ∞ qui envoie $y \neq \infty$ sur 0 . Les homographies

$$\begin{bmatrix} a & -ay \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

conviennent et ce sont les seules.

Soient enfin (x, y, z) trois points deux à deux distincts de $\mathbb{K}P^1$ et montrons qu'il existe une homographie envoyant ce triplet sur $(\infty, 0, 1)$. En utilisant le paragraphe précédent, on peut supposer $x = \infty$ et $y = 0$, et il reste à trouver une homographie

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

envoyant z sur 1 . Il suffit (et il est nécessaire) de prendre $d = az$, pour n'importe quel a non nul.

On a bien la triple transitivité ainsi : pour tous (x, y, z) et (x', y', z') triplets de nombres deux à deux distincts, il existe deux homographies φ, φ' envoyant respectivement (x, y, z) et (x', y', z') sur $(\infty, 0, 1)$. Alors $\varphi'^{-1}\varphi$ est une homographie envoyant (x, y, z) sur (x', y', z') .

Pour l'unicité, elle découle de notre démonstration. On peut simplement remarquer qu'une homographie

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

fixant $(\infty, 0, 1)$ doit vérifier : $c = 0, b = 0$ et $d = a$, donc être l'identité. Alors si φ est une homographie fixant trois points distincts (x, y, z) , en notant ψ une homographie les envoyant sur $(\infty, 0, 1)$ on voit que $\psi\varphi\psi^{-1}$ fixe $(\infty, 0, 1)$. Ainsi $\psi\varphi\psi^{-1} = \text{Id}$, d'où l'on tire $\varphi = \text{Id}$. Enfin, si φ et φ' sont des homographies qui coïncident en trois points, alors $\varphi^{-1}\varphi'$ fixe ces trois points, donc $\varphi = \varphi'$. \square

L'image de trois points distincts détermine donc entièrement une homographie, ce qui nous amène à la définition d'un repère.

Définition 2.3. — On appelle *repère projectif* de $\mathbb{K}P^1$ tout triplet de points deux à deux distincts.

Le *repère canonique* de $\mathbb{K}P^1$ est celui formé des points

$$[1 : 0], \quad [0 : 1], \quad [1 : 1]$$

dans cet ordre. Le repère canonique de $\widehat{\mathbb{K}}$ est par conséquent $(\infty, 0, 1)$.

Il est instructif de vérifier que cette définition est bien cohérente avec la définition générale donnée en 1.3.2.

2.2.4. Droites projectives générales. — On a travaillé pour l'instant à partir de \mathbb{K}^2 , muni de sa base canonique.

On appelle plus généralement *droite projective* (sur \mathbb{K}) l'ensemble $P(E)$ des droites vectorielles de n'importe quel \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension 2. On notera alors $\langle v \rangle$ la droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul v .

Exemple 2.4. — Soit \mathcal{E} un plan affine et a un point quelconque de ce plan. Alors l'ensemble des droites affines passant par a est une droite projective : c'est $P(\mathcal{E}_a)$ où \mathcal{E}_a désigne le vectorialisé de \mathcal{E} en a . On étudiera

ce type de droite projective, appelé un *faisceau de droites*, dans le chapitre 4.

Si F est également un plan vectoriel, une application $\varphi : P(E) \rightarrow P(F)$ est un *isomorphisme projectif* s'il existe une application linéaire inversible $f : E \rightarrow F$ telle que pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, on ait $\varphi(\langle v \rangle) = \langle f(v) \rangle$. On note $\varphi = P(f)$.

Si $D = P(E) = P(F)$, on parle de *transformation projective* ou d'*homographie*. L'ensemble des homographies de D forme un groupe, qu'on note $\text{Aut}(D)$ ou $\text{PGL}(E)$.

On appelle *repère projectif* d'une droite $D = P(E)$ tout triplet de points distincts (p_0, p_1, p_2) . Étant donné un repère projectif, on peut identifier D à $\mathbb{K}P^1$. En effet, il existe une base (b_0, b_1) de E telle que $p_0 = \langle b_0 \rangle$, $p_1 = \langle b_1 \rangle$ et $p_2 = \langle b_0 + b_1 \rangle$ et cette base est unique à multiplication par un scalaire près (voir le théorème 1.10). Alors, si on note $f : E \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'unique application linéaire envoyant (b_0, b_1) sur la base canonique, on obtient un isomorphisme $\varphi = P(f)$ entre $P(E)$ et $\mathbb{K}P^1$. Une autre façon de le dire est que φ est l'unique isomorphisme projectif envoyant (p_0, p_1, p_2) sur le repère canonique de $\mathbb{K}P^1$. Notons que celui-ci est, avec notre vocabulaire, le repère projectif associé à la base canonique de \mathbb{K}^2 .

Pour chaque repère projectif, on dispose ainsi de coordonnées homogènes (les coordonnées de $p \in P(E)$ étant par définition celles de $\varphi(p) \in \mathbb{K}P^1$), d'une identification avec $\widehat{\mathbb{K}}$, d'une carte affine (composée de φ et de la carte affine définie par la base canonique de $\mathbb{K}P^1$), etc.

Exemple 2.5. — Comme n'importe quelle droite affine L s'identifie (par le choix d'un isomorphisme affine Φ) à \mathbb{K} , en ajoutant un élément à L on construit $\widehat{L} = L \cup \{\infty_L\}$ et en prolongeant Φ par $\Phi(\infty_L) = \infty$ on identifie \widehat{L} à $\widehat{\mathbb{K}}$. On vérifie facilement que si $\Phi' : L \rightarrow \mathbb{K}$ est un autre isomorphisme affine étendu à \widehat{L} de la même façon, alors $\Phi'\Phi^{-1}$ est un automorphisme projectif. Ainsi, le choix initial de Φ n'a d'incidence sur aucune des grandeurs projectivement invariantes comme le birapport défini ci-dessous. On dit que \widehat{L} est le *complété projectif* de L .

2.3. Birapport

Il y a plusieurs façons d'introduire le birapport. L'une d'elles consiste à donner une formule qui éclaire directement le nom de cet objet. Celle que l'on suivra ici consiste à le construire par analogie avec la droite euclidienne et la droite affine.

2.3.1. Invariants de familles de points. — Pour motiver le birapport, rapprochons-le de ses équivalents en géométrie euclidienne et affine.

Commençons par considérer la droite euclidienne, c'est-à-dire \mathbb{R} muni de la distance usuelle. Ses transformations naturelles sont les isométries, qui sont de la forme $z \rightarrow \varepsilon z + b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Le groupe des isométries agit transitivement sur \mathbb{R} (on peut envoyer x sur x' grâce à la translation de vecteur $b = x' - x$) mais pas doublement transitivement, puisqu'il préserve les distances : deux points à distance 1 ne peuvent, par exemple, être envoyés sur deux points à distance 2. C'est la seule obstruction à la double transitivité : si $|y - x| = |y' - x'|$, alors il existe une isométrie φ telle que $\varphi(x) = x'$ et $\varphi(y) = y'$. Comparer les distances permet donc de déterminer si deux couples de points peuvent être envoyés l'un sur l'autre par une isométrie.

Sur la droite affine \mathbb{R} , les transformations affines $z \rightarrow az + b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ agissent doublement transitivement. Toutefois, leur action sur les triplets (x, y, z) de points distincts⁽⁴⁾ préserve le rapport suivant :

$$(11) \quad R(x, y, z) = \frac{z - x}{y - x}$$

ce qui revient à dire qu'elles préservent les rapports de distances algébriques. En particulier, le groupe affine n'agit pas triplement transitivement sur \mathbb{R} puisque si $R(x, y, z) \neq R(x', y', z')$ il ne peut exister de transformation affine φ telle que $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ et $\varphi(z) = z'$. Montrons que ce rapport est la seule obstruction à la triple transitivité,

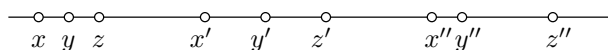


FIGURE 2. Le triplet (x, y, z) peut être envoyé sur (x', y', z') mais pas sur (x'', y'', z'') par une application affine.

4. Il n'est en fait nécessaire que de supposer $x \neq y$.

c'est-à-dire que si $R(x, y, z) = R(x', y', z')$ alors il existe une transformation affine φ telle que $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ et $\varphi(z) = z'$. Par double transitivité, il existe une transformation affine φ telle que $\varphi(x) = x'$ et $\varphi(y) = y'$. D'ailleurs on sait qu'elle est unique (puisque (x, y) forme une repère affine), il faut et il suffit donc de montrer qu'on a $\varphi(z) = z'$. Mais par hypothèse $R(x, y, z) = R(x', y', z')$ et on sait que φ préserve R , donc $R(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) = R(x', y', z')$. Cette équation s'écrit

$$\frac{\varphi(z) - x'}{y' - x'} = \frac{z' - x'}{y' - x'}$$

ce qui donne bien $\varphi(z) = z'$.

En fait, on aurait pu (dû ?) commencer par là et n'en déduire qu'ensuite l'expression de R . En effet, étant donnés $x \neq y$ et z des points de \mathbb{R} il existe une unique transformation affine φ telle que $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(y) = 1$. Déterminons-la explicitement en écrivant $\varphi(\cdot) = a \cdot + b$. On a $ax + b = 0$ donc $b = -ax$, et $ay + b = 1$ donc $b = 1 - ay$. On en déduit $a = (y - x)^{-1}$ et donc $b = -x(y - x)^{-1}$. L'image de z est donc

$$\varphi(z) = \frac{1}{y - x}z - \frac{x}{y - x} = R(x, y, z)$$

Notons qu'on peut définir ce rapport et obtenir la même conclusion quel que soit le corps \mathbb{K} .

2.3.2. Définition et propriétés. — Appliquons maintenant les idées précédentes au cadre projectif : on définit un invariant de quatre points en utilisant la triple transitivité.

Définition 2.6. — Soient x, y, z, w quatre points d'une droite projective D , les trois premiers étant distincts. Soit $\varphi : D \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ l'unique isomorphisme projectif tel que

$$\varphi(x) = \infty, \quad \varphi(y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(z) = 1$$

On appelle *birapport* du quadruplet (x, y, z, w) l'élément $\varphi(w)$ de $\widehat{\mathbb{K}}$ et on le note $[x, y, z, w]$.

Il est important de ne pas confondre le birapport (toujours écrit en ligne et avec des virgules) avec des coordonnées homogènes. On a écrit $\widehat{\mathbb{K}}$ plutôt que $\mathbb{K}P^1$ car on pense au birapport comme à un nombre plutôt qu'à un point.

La définition et la proposition 2.2 permettent d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 2.7. — Soient $x, y, z, w \in D$ et $x', y', z', w' \in D'$ des quadruplets de points de deux droites projectives tels que x, y, z soient deux à deux distincts et x', y', z' également. Il existe un isomorphisme projectif $\varphi : D \rightarrow D'$ tel que $\varphi(x) = x', \varphi(y) = y', \varphi(z) = z'$ et $\varphi(w) = w'$ si et seulement si $[x, y, z, w] = [x', y', z', w']$.

Démonstration. — Soient $\psi : D \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ et $\psi' : D' \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ les isomorphismes vérifiant

$$\psi(x) = \psi'(x') = \infty, \quad \psi(y) = \psi'(y') = 0, \quad \text{et} \quad \psi(z) = \psi'(z') = 1$$

Si $[x, y, z, w] = [x', y', z', w']$ on a par définition $\psi(w) = \psi'(w')$ donc $\varphi = \psi'^{-1}\psi$ convient.

Réciproquement s'il existe φ envoyant (x, y, z, w) sur (x', y', z', w') , alors $\psi'\varphi : D \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ est un isomorphisme envoyant (x, y, z) sur $(\infty, 0, 1)$ donc $\psi'\varphi = \psi$. On en déduit $\psi(w) = \psi'(w')$ et donc $[x, y, z, w] = [x', y', z', w']$. \square

En particulier, la proposition 2.7 nous dit que le birapport est un invariant projectif, c'est-à-dire

$$[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z), \varphi(w)] = [x, y, z, w]$$

pour tous $x, y, z, w \in D$ (les trois premiers distincts) et tout isomorphisme $\varphi : D \rightarrow D'$. En fait, préserver le birapport est équivalent pour une bijection à être projective, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.8. — Soient D et D' des droites projectives et $\psi : D \rightarrow D'$ une bijection. Si ψ préserve les birapports, alors ψ est un isomorphisme projectif.

Démonstration. — Commençons par traiter le cas $D = D' = \widehat{\mathbb{K}}$. Soient $x = \psi^{-1}(\infty)$, $y = \psi^{-1}(0)$ et $z = \psi^{-1}(1)$. Soit $\varphi \in \text{PGL}(2; \mathbb{R})$ l'unique homographie envoyant (x, y, z) sur $(\infty, 0, 1)$. Pour tout $w \in \widehat{\mathbb{K}}$, on a

$$\begin{aligned} \psi(w) &= [\infty, 0, 1, \psi(w)] \\ &= [\psi(x), \psi(y), \psi(z), \psi(w)] \\ &= [x, y, z, w] \\ &= \varphi(w) \end{aligned}$$

(la première égalité est vraie car l'identité envoie $(\infty, 0, 1)$ sur lui-même, la troisième traduit que ψ préserve les birapports.) Ainsi ψ et φ coïncident, donc ψ est une homographie.

Dans le cas général, il existe des isomorphismes projectifs $\eta : D \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ et $\eta' : D' \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$. La bijection $\tilde{\psi} = \eta' \psi \eta^{-1} : \widehat{\mathbb{K}} \rightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ préserve les birapports, donc est une homographie. Comme $\psi = \eta'^{-1} \tilde{\psi} \eta$, c'est un isomorphisme projectif. \square

2.3.3. Expression algébrique. — Donnons maintenant une expression algébrique du birapport, du type de (11).

Proposition 2.9. — *Soient $x, y, z, w \in \widehat{\mathbb{K}}$ quatre points dont les trois premiers sont distincts. Alors on a*

$$[x, y, z, w] = \frac{w - y}{w - x} \Big/ \frac{z - y}{z - x}$$

Démonstration. — Considérons l'homographie suivante :

$$\varphi : \alpha \rightarrow \frac{\alpha - y}{\alpha - x} \Big/ \frac{z - y}{z - x}$$

Alors par construction on a $\varphi(x) = \infty$, $\varphi(y) = 0$ et $\varphi(z) = 1$, donc par définition du birapport $[x, y, z, w] = \varphi(w)$ et on obtient l'expression voulue. \square

Cette expression, en plus d'expliquer le nom du birapport, en met en évidence les symétries.

Proposition 2.10. — *Soient $x, y, z, w \in \mathbb{K}P^1$ des points tels que x, y, z soient distincts. Alors on a*

$$\begin{aligned} [x, y, z, w] &= [y, x, z, w]^{-1} \\ &= [x, y, w, z]^{-1} \\ &= 1 - [x, z, y, w] \end{aligned}$$

La démonstration est un simple calcul que l'on omet. Ces trois symétries permettent de retrouver les birapports de toute permutation de x, y, z, w . Il est maintenant possible d'étendre le birapport à tout quadruplet de points tel que trois quelconques d'entre eux soient distincts. Par exemple, on définit :

$$[a, b, a, c] = [a, b, c, a]^{-1} = \infty^{-1} = 0$$

ou encore

$$[a, b, b, c] = [a, b, c, b]^{-1} = 0^{-1} = \infty$$

2.3.4. Division harmonique. — Introduisons maintenant une « propriété projective », qui est un peu l’analogue de la propriété affine « être le milieu de ».

Définition 2.11. — Supposons que \mathbb{K} soit de caractéristique différente de 2. On dit que quatre points $x, y, z, w \in \mathbb{K}P^1$ sont en *division harmonique* s’ils sont distincts et $[x, y, z, w] = -1$. On dit également que w est le *quatrième harmonique* du triplet (x, y, z) .

Si \mathbb{K} est de caractéristique 2, on a $-1 = 1$ donc $[x, y, z, w] = -1$ si et seulement si $w = z$, ce qui manque un peu de charme.

Méditons sur cet exemple la notion de « propriété projective ». Être en division harmonique est une propriété que quatre points de notre espace $\mathbb{K}P^1$ peuvent vérifier ou pas ; on la dit projective car elle est invariante sous l’action du groupe projectif : si quatre points sont en division harmonique, alors leurs images par une homographie quelconque le sont également (et réciproquement, bien sûr). Notons que dans cette propriété, l’ordre est important.

La proposition suivante explicite le rapport avec la notion affine de milieu.

Proposition 2.12. — Soient $x, y, z \in \mathbb{K}P^1$ des points distincts. Alors x, y, z, ∞ sont en division harmonique si et seulement si, dans la carte affine canonique, z est le milieu du segment $[x, y]$.

Démonstration. — D’après la proposition 2.10, on a $[x, y, z, \infty] = -1$ si et seulement si $[\infty, x, y, z] = 1/2$. Il existe une unique homographie fixant ∞ et envoyant (x, y) sur $(0, 1)$, et elle se retrace à la carte affine canonique en une transformation affine donc y préserve les barycentres. Par définition du birapport, elle envoie z sur le milieu $1/2$ de $[0, 1]$, donc z était bien le milieu de $[x, y]$. \square

On verra au chapitre 4 (proposition 4.1) comment utiliser cette propriété pour construire dans un plan projectif le quatrième harmonique d’un triplet de points alignés.

2.4. Involutions

Nous allons étudier dans cette section un type particulier d'homographies : les involutions. Elles ont l'avantage d'être assez facile à décrire, et d'engendrer le groupe des homographies (théorème 2.18). La proposition 2.14 sera utilisée pour démontrer le théorème de Pascal un peu plus loin.

2.4.1. Définition et caractérisation. —

Définition 2.13. — Une *involution* d'une droite projective est une homographie φ différente de l'identité qui, composée avec elle-même, donne l'identité : $\varphi^2 = \text{Id}$. On dit encore que l'homographie est *involutive*.

Commençons par en donner une caractérisation.

Proposition 2.14. — Soit φ une homographie de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ différente de l'identité. Alors il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i. φ est involutive ;
- ii. la trace de φ est nulle ;
- iii. il existe un point $p \in \mathbb{K}\mathbb{P}^1$ tel que $\varphi(p) \neq p$ et $\varphi^2(p) = p$.

La deuxième propriété mérite une explication : on dit que la trace de $\varphi = P(f)$ est nulle si la trace de f est nulle. Cela ne dépend pas du choix de f .

Démonstration. — Écrivons $\varphi = [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On a alors

$$(12) \quad \varphi^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

et φ est involutive si et seulement si M^2 est un multiple de l'identité.

Si b et c sont tous deux nuls, a et d sont nécessairement non nuls et φ est involutive si et seulement si $a^2 = d^2$. Ceci implique $a = \pm d$. L'égalité $a = d$ est impossible car alors φ serait l'identité. On a donc $a = -d$ et la trace de M est nulle.

Si b et c ne sont pas tous deux nuls, (12) montre que φ est involutive si et seulement si $a + d = 0$, c'est-à-dire quand M est de trace nulle.

Comme φ est différente de l'identité, il existe p tel que $\varphi(p) \neq p$. Si φ est involutive, pour tout p on a $\varphi^2(p) = p$. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que *iii* implique *i*.

Supposons *iii*. On a déjà $\varphi^2(p) = p$ et $\varphi^2(\varphi(p)) = \varphi(\varphi^2(p)) = \varphi(p)$. Étant donné un point q différent de p et $\varphi(p)$, considérons le birapport $[\varphi(q), p, \varphi(p), q]$. On a :

$$[\varphi(q), p, \varphi(p), q] = [\varphi^2(q), \varphi(p), p, \varphi(q)] = [\varphi(q), p, \varphi(p), \varphi^2(q)]$$

La première égalité vient de ce que ψ est une homographie, la seconde des symétries du birapport. Mais étant donnés trois points distincts x, y, z , l'égalité $[x, y, z, q] = [x, y, z, q']$ entraîne $q = q'$, ce qui nous donne en l'occurrence $q = \varphi^2(q)$. On vient de montrer que ψ est une involution. \square

2.4.2. Description et engendrement. — Nous allons maintenant donner une description des involutions.

On suppose jusqu'à la fin de cette section que le corps de base \mathbb{K} est de caractéristique différente de 2.

Commençons par étudier les involutions à deux points fixes : on va voir qu'elles s'expriment de façon particulière.

Proposition 2.15. — *Soit φ une involution d'une droite projective D fixant deux points a, b . Alors pour tout point $p \in D$, les points $a, b, p, \varphi(p)$ sont en division harmonique. En particulier, deux involutions qui fixent la même paire de points sont égales.*

Inversement, l'application qui à un point p associe le quatrième harmonique de (a, b, p) (et fixe a et b) est une homographie involutive.

Démonstration. — En identifiant D à $\widehat{\mathbb{K}}$ par une homographie qui envoie a sur ∞ et b sur 0 , on a $[a, b, p, \varphi(p)] = \varphi(p)/p$. De plus, comme φ fixe 0 et ∞ elle s'écrit dans cette carte $\varphi(z) = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Comme c'est une involution, on a $\lambda^2 = 1$ et $\lambda \neq 1$, donc $\lambda = -1$. On en déduit $[a, b, p, \varphi(p)] = -1$. Comme cette égalité détermine $\varphi(p)$ pour tout p , on en déduit l'unicité.

Inversement, on voit que l'application qui à p associe le quatrième harmonique de (a, b, p) et fixe a et b s'écrit dans une telle carte $z \mapsto -z$ et est donc une homographie involutive. Remarquons que si \mathbb{K} était de caractéristique 2, cette application serait l'identité. \square

En particulier, on constate qu'il y a une seule classe de conjugaison d'involutions avec deux points fixes, puisque les homographies sont doublement transitives. Nous allons voir qu'il y a au plus une autre classe de conjugaison d'involutions.

On commence par montrer qu'il est toujours possible de trouver une involution qui échange deux paires de points données.

Lemme 2.16. — *Soient a, a', b, b' des points d'une droite projective tels que $\{a, a'\} \cap \{b, b'\} = \emptyset$. Alors il existe une unique involution qui échange a et a' et b et b' .*

Dans le cas où par exemple $a = a'$, par « l'involution échange a et a' » il faut comprendre que $a = a'$ est un point fixe.

Démonstration. — Dans le cas où $a \neq a'$, considérons l'unique homographie φ échangeant a et a' et envoyant b sur b' . D'après la proposition 2.14, comme φ échange deux points distincts c'est une involution, ce qui implique $\varphi(b') = \varphi^2(b) = b$. On traite de la même façon le cas où $b \neq b'$.

Si $a = a'$ et $b = b'$, on doit montrer qu'il existe une unique involution fixant a et b , ce qui est l'objet de la proposition 2.15. \square

Ceci nous amène à la description suivante des involutions dans les cas réels et complexes.

Proposition 2.17. — *Une involution a zéro ou deux points fixes.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors toute involution a exactement deux points fixes.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il existe des involutions n'ayant aucun point fixe et elles sont toutes conjuguées.

Démonstration. — On a défini les involutions comme étant différentes de l'identité, elles ont donc au plus deux points fixes. Soit $\varphi = [M]$ une involution de $\mathbb{K}P^1$: d'après la proposition 2.14, M doit être de trace nulle. Si φ avait un seul point fixe, M aurait une valeur propre double⁽⁵⁾, qui devrait alors être nulle. Mais M est inversible, donc c'est impossible et φ a zéro ou deux points fixes.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut supposer que M est de déterminant 1 quitte à la multiplier par un complexe non nul. Ses valeurs propres doivent vérifier $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\mu = 1$, ce qui implique $\{\lambda, \mu\} = \{i, -i\}$. En particulier

5. À se stade il est important d'avoir en tête la discussion de la fin de la section 2.2.1

elles sont distinctes et les deux directions propres donnent deux points fixes de φ .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut supposer que M est de déterminant 1 ou -1 . Dans le deuxième cas, les valeurs propres de M sont 1 et -1 et φ a deux points fixes.

Dans le premier cas, les valeurs propres de M sont complexes (i et $-i$), donc φ n'a aucun point fixe. L'homographie de $\widehat{\mathbb{R}}$ définie par $\phi_0(z) = -1/z$ donne un exemple d'une telle involution. De plus, en considérant la base (u, Mu) où u est n'importe quel vecteur non nul, on voit que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc φ est conjugué à φ_0 . □

Nous en arrivons enfin à la conclusion de ce passage sur les involutions.

Théorème 2.18. — *Toute homographie d'une droite projective est le produit d'au plus deux involutions.*

Démonstration. — Le résultat est évident si l'homographie φ est l'identité ou une involution. Supposons que ce n'est pas le cas et soit a un point qui n'est pas fixé par φ . Soient $b = \varphi(a)$ et $c = \varphi(b)$. On a $b \neq a$, $c \neq a$ (sinon φ serait une involution d'après la proposition 2.14) et $b \neq c$ (sinon on aurait $\varphi^{-1}(b) = b$ or $\varphi^{-1}(b) = a$). Notons enfin $d = \varphi(c)$ (qui lui peut être confondu avec a).

Soit maintenant ψ_1 l'involution qui échange a avec d et b avec c et ψ_2 l'involution qui échange d avec b et fixe c .

Alors on a :

$$\psi_2\psi_1(a) = \psi_2(d) = b, \quad \psi_2\psi_1(b) = \psi_2(c) = c, \quad \psi_2\psi_1(c) = \psi_2(b) = d$$

donc $\psi_2\psi_1 = \varphi$. □

2.5. La droite réelle

Considérons la droite projective réelle, c'est-à-dire le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il y aurait beaucoup de choses à en dire, en relation par exemple avec le plan hyperbolique ou les homéomorphismes du cercle. Cela nous emmènerait

bien au-delà de nos objectifs, et nous nous contenterons d'étudier en détail l'action des homographies d'un point de vue dynamique.

2.5.1. Topologie. — Comme on l'a évoqué plus haut, on peut penser à la droite projective réelle comme à un cercle, compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R} par le point ∞ . Cela signifie que l'on munit $\mathbb{R}P^1$ identifié avec $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont :

- les ouverts de \mathbb{R} et
- les complémentaires dans $\widehat{\mathbb{R}}$ des compacts de \mathbb{R} .

On peut vérifier qu'elle est égale à la topologie quotient obtenue en considérant $\mathbb{R}P^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ où \mathbb{R}^2 est muni de sa topologie habituelle.

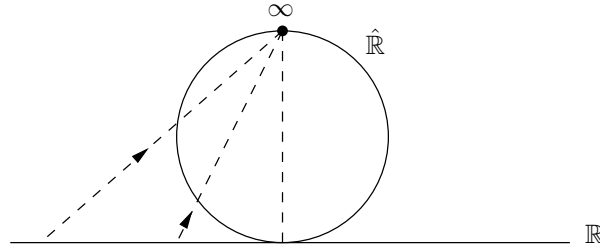


FIGURE 3. La droite réelle $\widehat{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à un cercle : un point de la droite est identifié au point du cercle aligné avec le sommet. Un point du cercle proche de ∞ est identifié à un point de grande valeur absolue, ce qui permet de montrer que l'identification est un homéomorphisme.

Cette topologie se manipule facilement. Une suite $(u_n) \in \widehat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ tend vers $u \in \mathbb{R}$ si et seulement si à partir d'un certain rang, $u_n \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow u$ pour la topologie habituelle de \mathbb{R} . De même, (u_n) tend vers ∞ si et seulement si elle sort de tout compact de \mathbb{R} , c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \geq A \text{ ou } u_n = \infty$$

C'est également équivalent à $u_n^{-1} \rightarrow 0$.

Ainsi, une suite $([x_k : y_k])$ de $\mathbb{R}P^1$ tend vers $\infty = [1 : 0]$ si $|x_k/y_k| \rightarrow \infty$ quand on ignore les k pour lesquels y_k s'annule.

Les homographies sont continues pour cette topologie. Comme ce sont des fractions rationnelles, la continuité en tout point de \mathbb{R} qui n'est pas un pôle de la fraction est claire. La continuité au pôle ne pose pas de

problème : quand z tend vers $-d/c$, alors $az + b$ ne tend pas vers 0 et $(az + b)/(cz + d)$ tend bien vers ∞ . La continuité en ∞ s'obtient aussi directement.

2.5.2. Dynamique des homographies. — On va en fait étudier les homographies « directes », c'est-à-dire les éléments de $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$, ou encore les

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}(2; \mathbb{R})$$

tels que $ad - bc > 0$. Remarquons que, puisque les matrices ne sont importantes qu'à multiplication par un réel non nul près, demander $ad - bc > 0$ ou $ad - bc = 1$ revient au même. Toute homographie est soit dans $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$, soit de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \varphi$$

où $\varphi \in \mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ donc on ne perd pas beaucoup d'information en faisant cette restriction.

Commençons par considérer quelques cas (pas si) particuliers (voir la figure 4).

Exemple 2.19. — Commençons avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $P^t(z) = z + t$, donc cette homographie fixe le point ∞ , et translate les points de la carte affine canonique de t . Remarquons que $(P^t)^2 = P^{2t}$, et plus généralement $(P^t)^k = P^{kt}$, ce qui justifie que l'on note le paramètre en exposant. Si $t \neq 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{kt}(z) = \infty$$

Exemple 2.20. — Continuons avec, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$E^\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si θ est congru à 0 modulo π , E^θ est l'identité. Un point fixe z doit vérifier

$$z \cos \theta + \sin \theta = -z^2 \sin \theta + z \cos \theta$$

et donc

$$(z^2 + 1) \sin \theta = 0$$

ce qui est impossible si $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Pour le cas $z = \infty$, on peut calculer directement $E^\theta(\infty) = -\cos \theta / \sin \theta$ qui n'est égal à ∞ que si $\theta \equiv 0[\pi]$. On peut penser à E^θ comme à une rotation, mais on fait un tour complet en un angle π plutôt que 2π .

En particulier, soit θ est un multiple rationnel de π , et tous les points sont périodiques, soit θ/π est irrationnel et E^θ n'a aucun point périodique.

Exemple 2.21. — Enfin considérons pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$H^\lambda = \begin{bmatrix} e^{\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\lambda}{2}} \end{bmatrix}$$

On a $H^\lambda(z) = e^\lambda z$ donc H^λ a exactement deux points fixes, ∞ et 0 , si $\lambda \neq 0$. Bien sûr, H^0 est l'identité.

Si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} H^{k\lambda}(z) &= \infty \quad \forall z \neq 0 \\ \lim_{k \rightarrow -\infty} H^{k\lambda}(z) &= 0 \quad \forall z \neq \infty \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ∞ est un point fixe attractif, et 0 un point fixe répulsif. Si $\lambda < 0$, c'est l'inverse.

Définition 2.22. — Une homographie $\varphi \in \text{PSL}(2; \mathbb{R})$, supposée différente de l'identité, est dite :

- *parabolique* si elle est conjuguée à P^t pour un certain t (elle alors conjuguée à P^1 ou à P^{-1});
- *elliptique* si elle est conjuguée à E^θ pour un certain θ ;
- *hyperbolique* si elle est conjuguée à H^λ pour un certain λ .

Rappelons que $\varphi, \psi \in \text{PSL}(2; \mathbb{R})$ sont dites conjuguées s'il existe un élément ρ du groupe $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ tel que $\varphi = \rho\psi\rho^{-1}$. Expliquons pourquoi P^t est conjugué à $P^{\pm 1}$ pour tout $t \neq 0$: il suffit de voir que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |t|^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t|t|^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir, en multipliant la conjuguante par $|t|^{1/2}$, une conjugaison dans $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ entre P^t et $P^{\pm 1}$. La conjugaison dans $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ s'obtient par passage au quotient.

La conjugaison est une relation d'équivalence, et quand le groupe agit sur un espace, les propriétés dynamiques (nombre de points fixes, attractivités de ceux-ci, etc.) sont les mêmes pour tous les éléments d'une classe de conjugaison. Par exemple, toute homographie hyperbolique a exactement deux points fixes, l'un attractif et l'autre répulsif.

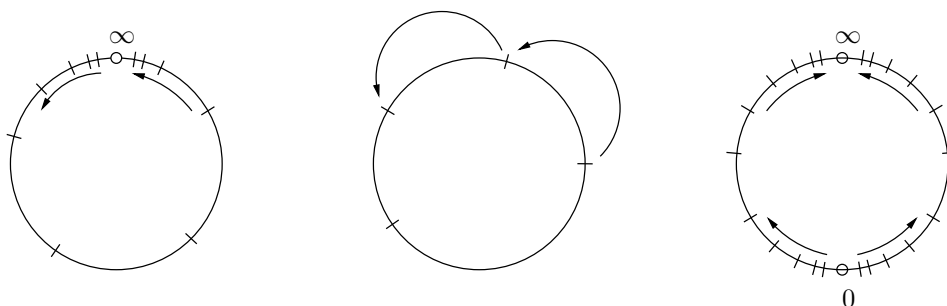


FIGURE 4. Dynamiques des homographies paraboliques, elliptiques et hyperboliques

Le résultat suivant montre que les trois exemples décrits plus haut suffisent à comprendre la dynamique de toutes les homographies de \mathbb{RP}^1 .

Théorème 2.23. — *Tout élément de $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ différent de l'identité est soit parabolique, soit elliptique, soit hyperbolique.*

Démonstration. — On va utiliser la réduction des endomorphismes. Soit $\varphi = P(f) \in \mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ où la matrice f est supposée de déterminant 1 quitte à multiplier par un scalaire, ce qui ne change pas φ . On distingue trois cas, en détaillant le premier.

Si les deux valeurs propres de f sont confondues, elles sont réelles et leur produit vaut 1. Dans ce cas f a donc une valeur propre double, -1 ou 1 . On peut se placer dans le second cas en considérant $-f$ à la place de f . Comme toutes les valeurs propres de f sont réelles, elle est trigonalisable, donc conjuguée dans $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$ à

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et comme $\varphi \neq \mathrm{Id}$ on a $t \neq 0$.

Si la conjuguante obtenue est à déterminant négatif, il suffit de conjuguer encore, par la matrice diagonale de coefficients $(1, -1)$ pour écrire

$$\varphi = [f] = [g] \begin{bmatrix} 1 & \pm t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [g]^{-1}$$

où g est une matrice inversible *de déterminant positif*. Ceci montre que φ est parabolique.

Si les deux valeurs propres de f sont distinctes et imaginaires, elles sont conjuguées et de module 1. Alors f est semblable à une matrice de rotation, et comme précédemment on trouve que φ est elliptique.

Enfin si les valeurs propres de f sont distinctes et réelles, elles sont inverses l'une de l'autre et on peut les écrire sous la forme $e^{\frac{\lambda}{2}}, e^{-\frac{\lambda}{2}}$. Dans ce cas, f est diagonalisable et on en déduit que φ est hyperbolique. \square

2.6. La droite complexe

La droite projective complexe peut, comme évoqué plus tôt, être munie de la topologie de compactifié d'Alexandrov dont les ouverts sont :

- les ouverts de la carte affine canonique \mathbb{C} ;
- les complémentaires dans $\widehat{\mathbb{C}}$ des compacts de cette carte affine.

Munie de cette topologie, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à la sphère unité S^2 de \mathbb{R}^3 , et les homographies sont des homéomorphismes. Nous n'entrons pas dans plus de détails, mais il n'y a pas plus de difficulté que dans le cas réel.

Souvent, $\widehat{\mathbb{C}}$ est appelée la *sphère de Riemann*.

2.6.1. Droites et cercle de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. — Comme $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, on peut considérer $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ comme une partie de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathbb{P}^1 &= \{[x_0 : x_1] \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \\ &\subset \{[x_0 : x_1] \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Remarque 2.24. — Cette inclusion n'est pas aussi évidente qu'il peut paraître au premier abord, elle est même légèrement abusive. En effet dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ on a défini

$$[x_0 : x_1] = \{(\lambda x_0, \lambda x_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$$

alors que dans $\mathbb{C}P^1$, λ parcourt \mathbb{C}^* . Toutefois, si $[x_0 : x_1] = [y_0 : y_1]$ dans $\mathbb{C}P^1$ avec $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, alors l'égalité est vraie également dans $\mathbb{R}P^1$.

De plus, comme \mathbb{C} s'identifie naturellement à \mathbb{R}^2 , on dispose dans \mathbb{C} de la notion d'alignement réel : trois points de \mathbb{C} seront dits alignés s'il sont sur une même droite affine réelle. Cette notion ne doit pas être confondue avec la notion d'alignement habituel dans un espace affine complexe ; celle-ci n'est de toute façon pas très intéressante ici, car \mathbb{C} étant une droite complexe, tous ses points seraient alignés.

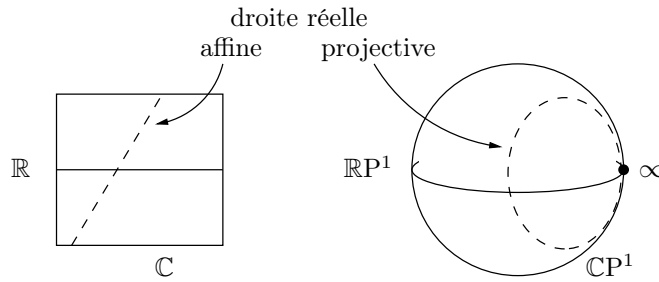


FIGURE 5. Droite réelle dans \mathbb{C} et $\mathbb{C}P^1$.

De façon analogue, on peut définir la notion de droite projective réelle de $\mathbb{C}P^1$ et d'alignement. Toutefois la définition repose sur la carte affine canonique, et n'est donc pas invariante sous l'action du groupe projectif. Pour y remédier, nous allons considérer une classe d'objets plus large dont on montrera ensuite qu'elle est projectivement invariante.

Définition 2.25. — On appelle *cercle* de $\mathbb{C}P^1$:

- les cercles euclidiens, c'est-à-dire les parties de la carte affine canonique \mathbb{C} qui admettent une équation de la forme $|z - z_0| = r$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, \infty[$;
- les droites projectives réelles, c'est-à-dire les parties

$$A \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}P^1$$

où A est une droite affine réelle de la carte affine canonique \mathbb{C} .

On dit que des points de $\mathbb{C}P^1$ sont *cocycliques* s'il existe un cercle qui les contient tous.

Par exemple, trois points $x, y, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ sont toujours cocycliques.

Inclure les droites réelles peut paraître arbitraire, mais rappelons qu'elles sont homéomorphes à des cercles. Certains auteurs utilisent le terme

de « cercle-droite », qui a le défaut de laisser entendre que les deux objets sont de nature différente. L'exemple ci-dessous montre qu'une homographie peut envoyer un cercle de \mathbb{C} sur une droite réelle, et inversement : on ne peut donc pas les distinguer l'un de l'autre par des propriétés projectives. En fait, les droites sont les cercles qui passent par ∞ , donc l'ensemble des droites n'est préservé que par les homographies qui fixent ce point.

Exemple 2.26. — Considérons l'homographie définie par

$$\varphi(z) = \frac{z+1}{iz-i}$$

Pour tout z sur le cercle unité, on a $z\bar{z} = 1$ donc $\bar{z} = z^{-1}$. On a alors

$$\overline{\varphi(z)} = \frac{z^{-1}+1}{-iz^{-1}+i} = \frac{1+z}{-i+iz} = \varphi(z)$$

donc φ envoie le cercle unité sur la droite $\widehat{\mathbb{R}}$. Son inverse envoie donc cette droite sur le cercle unité.

De plus, cette définition a l'avantage que trois points distincts sont toujours sur un unique cercle : le formalisme projectif, comme d'habitude, permet d'unifier des situations complémentaires (ici : « être alignés » et « être cocyclique » au sens affine habituel).

Le résultat qui suit montre l'intérêt que peut avoir le birapport en géométrie affine, mais va aussi nous servir pour montrer que les homographies envoient cercle sur cercle.

Proposition 2.27 (critère de cocyclicité). — Soient x, y, z et w des points de $\mathbb{C}P^1$ tels que x, y, z soient distincts. Ils sont cocycliques si et seulement si leur birapport est réel ou infini.

Démonstration. — Si deux des quatre points sont confondus, ils sont nécessairement cocycliques et leur birapport vaut $\infty, 0, 1$ suivant que $w = x, y$ ou z . On suppose maintenant les quatre points distincts, et donc leur birapport fini.

Commençons par le cas où les quatre points sont tous dans la carte affine canonique, qu'on munit de son produit scalaire canonique. L'argument de $(w-y)/(w-x)$ est une mesure de l'angle \widehat{xyw} . S'il est non plat, x, y, w sont sur un unique cercle de \mathbb{C} , dont les points sont les $t \in \mathbb{C}$ vérifiant $\widehat{xtw} \equiv \widehat{xyw}[\pi]$. Alors, comme l'argument de $(z-y)/(z-x)$ est une

mesure de l'angle \widehat{xzy} , nos quatre points sont cocycliques si et seulement si $(w - y)/(w - x)$ et $(z - y)/(z - x)$ ont même argument modulo π (voir la figure 6), ce qui revient à dire que $\frac{w-y}{w-x} / \frac{z-y}{z-x} = [x, y, z, w]$ est réel. De plus, x, y, w n'étant pas alignés les quatre points ne le sont pas non plus.

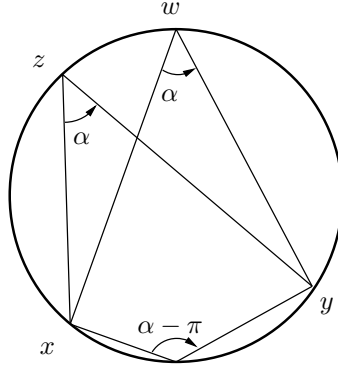


FIGURE 6. Un critère classique de cocyclicité

Si l'angle \widehat{xwy} est plat, c'est-à-dire si x, y, w sont alignés, alors on a $(w - y)/(w - x) \in \mathbb{R}$ et les quatre points sont alignés si et seulement si $(z - y)/(z - x) \in \mathbb{R}$, ce qui revient à demander $[x, y, z, w] \in \mathbb{R}$.

Il reste à considérer le cas où l'un des points est ∞ . D'après la proposition 2.10, permuter les points change le birapport mais pas le fait qu'il soit réel ou non. On peut donc supposer $w = \infty$, par exemple. Alors le seul cercle de \mathbb{CP}^1 passant par x, y et w est la droite affine réelle (xy) à laquelle on ajoute $\infty = w$. De plus, on a

$$\begin{aligned} [x, y, z, w] &= \frac{\infty - y}{\infty - x} / \frac{z - y}{z - x} \\ &= 1 / \frac{z - y}{z - x} \\ &= \frac{z - x}{z - y} \end{aligned}$$

donc $[x, y, z, w]$ est réel si et seulement si x, y, z sont alignés, c'est-à-dire exactement quand x, y, z, w sont cocycliques dans \mathbb{CP}^1 . \square

Corollaire 2.28. — Une homographie de \mathbb{CP}^1 envoie tout cercle sur un cercle.

Démonstration. — Soit C un cercle de \mathbb{CP}^1 et φ une homographie. Soient x, y, z trois points distincts de C et C' le cercle passant par $\varphi(x), \varphi(y)$ et $\varphi(z)$. Tout point $w \in C$ vérifie

$$[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z), \varphi(w)] = [x, y, z, w] \in \mathbb{R}$$

donc est envoyé sur un point de C' .

On a montré $\varphi(C) \subset C'$, et comme φ^{-1} est également une homographie, on a $\varphi^{-1}(C') \subset C$ et donc $\varphi(C) = C'$. \square

On peut naturellement se demander si d'autres transformations de \mathbb{CP}^1 préservent les cercles. La réponse est oui, puisque la conjugaison (qui à z associe \bar{z} si $z \in \mathbb{C}$, et fixe ∞) en est un exemple. Toutefois, on peut montrer que toute bijection continue de \mathbb{CP}^1 qui envoie cercle sur cercle est une homographie ou une anti-homographie (c'est-à-dire la composée d'une homographie et de la conjugaison). Ce résultat a une jolie démonstration géométrique, que l'on trouvera par exemple dans [Aud06]; on appelle *groupe circulaire* l'ensemble de ces transformations.

Pour clore cette section, donnons une jolie application du birapport à un problème de géométrie plane.

Théorème 2.29 (Les quatre cercles de Miquel)

On considère quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 du plan euclidien \mathbb{R}^2 tels que C_1 et C_2 s'intersectent en deux points a et a' , C_2 et C_3 s'intersectent en b et b' , C_3 et C_4 s'intersectent en c et c' , C_4 et C_1 s'intersectent en d et d' . On suppose ces huit points distincts.

Alors les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points a', b', c', d' le sont.

Démonstration. — On identifie \mathbb{R}^2 avec la carte affine canonique de $\widehat{\mathbb{C}}$ où l'on travaille désormais. On souhaite appliquer le critère de cocyclicité, donc il nous faut étudier la valeur du birapport

$$[a, c, b, d] = \frac{d-c}{d-a} \Big/ \frac{b-c}{b-a} = \frac{(d-c)(b-a)}{(d-a)(b-c)}$$

Le choix de l'ordre a, c, b, d n'est pas gratuit : il permet que dans le membre de droite, les différences impliquent des points appartenant à un même cercle. Les hypothèses nous permettent en effet d'affirmer que les birapports suivants sont réels (il sont finis car tous les points considérés

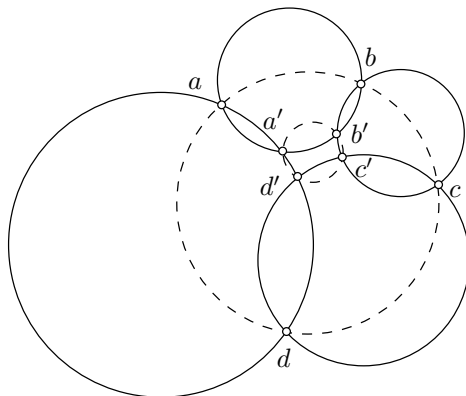


FIGURE 7. Le théorème des quatre cercles de Miquel.

sont distincts et dans la carte affine canonique) :

$$\begin{aligned}
 [d, c', c, d'] &= \frac{(d' - c')(d - c)}{(d' - d)(c' - c)} \\
 [b, a', a, b'] &= \frac{(b' - a')(b - a)}{(b' - b)(a' - a)} \\
 [d, a', a, d'] &= \frac{(d' - a')(d - a)}{(d' - d)(a' - a)} \\
 [b, c', c, b'] &= \frac{(b' - c')(b - c)}{(b' - b)(c' - c)}
 \end{aligned}$$

Le nombre suivant est donc réel :

$$\frac{[d, c', c, d'] [b, a', a, b']}{[d, a', a, d'] [b, c', c, b']} = [a, c, b, d] [a', c', b', d']$$

Ainsi, le birapport $[a, c, b, d]$ est réel si et seulement si $[a', c', b', d']$ l'est, ce qui donne le résultat. \square

Remarquons que, pour la formulation dans le plan euclidien, il faut bien préciser « cocycliques ou alignés » comme l'illustre la figure 8.

2.6.2. Classification dynamique des homographies. — Pour finir cette section, on va donner une classification des homographies tout à fait semblable à celle obtenue dans le cas réel.

Théorème 2.30. — *Une homographie $\varphi \in \text{PGL}(2; \mathbb{C})$ est conjuguée à l'un des exemples suivants :*

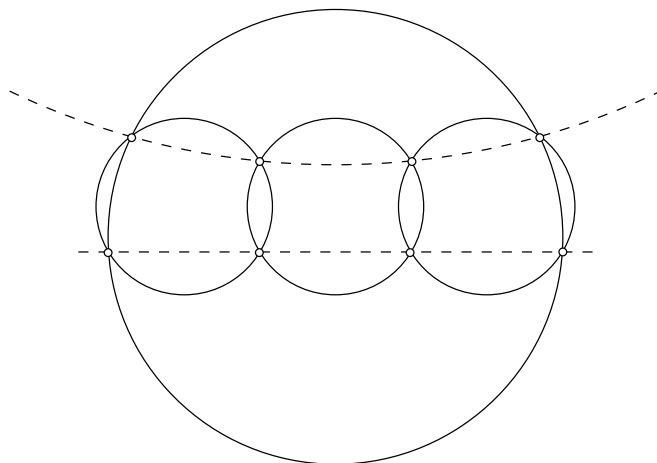


FIGURE 8. Une configuration particulière des quatre cercles.

- (elliptique) $E^\mu = z \mapsto \mu z$ où μ est un nombre complexe de module 1 ;
- (parabolique) $P^t = z \mapsto z + t$ où t est un nombre complexe (elle est alors conjuguée à P^1) ;
- (hyperbolique) $H^\lambda = z \mapsto \lambda z$ où λ est un nombre complexe de module > 1 .

Parfois, le terme « loxodromique » est utilisé plutôt que « hyperbolique », qui est alors réservé au cas $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. — La démonstration se déroule comme dans le cas réel : on écrit $\varphi = [f]$ où f est un endomorphisme de \mathbb{C}^2 identifié avec sa matrice dans la base canonique, qu'on peut supposer de déterminant 1 en la multipliant par un scalaire. Si f est diagonalisable, on a $\varphi = [g][d][g]^{-1}$ où $g \in \text{GL}(2; \mathbb{C})$ et d est diagonale, de déterminant 1. Les valeurs propres de d sont inverses l'une de l'autre, on les note α et α^{-1} . Soit elles sont toutes les deux de module 1, soit l'une est de module strictement supérieur et l'autre strictement inférieur à 1. Dans le deuxième cas, quitte à changer de base, on peut supposer $|\alpha| > 1$. Dans tous les cas, on a $[d] \cdot z = \alpha^2 z$ donc φ est conjuguée à E^{α^2} ou à H^{α^2} .

Si f n'est pas diagonalisable, alors elle a une seule valeur propre α et est trigonalisable. On peut supposer $\alpha = 1$ quitte à multiplier par un

scalaire, et on obtient

$$\varphi = [g] \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [g]^{-1}$$

qui est donc conjuguée à P^t . □

On peut comme dans le cas réel distinguer les homographies elliptiques, paraboliques et hyperboliques par leurs propriétés dynamiques. On dit ici qu'un point fixe $x \in \mathbb{CP}^1$ de l'application φ est *attractif* si pour tout y dans un voisinage de x , on a $\varphi^n(y) \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$. Le point x est *répulsif* si pour tout y dans un voisinage de x , on a $\varphi^{-n}(y) \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Les homographies elliptiques ont ainsi deux points fixes ni attractifs ni répulsifs, les paraboliques ont un seul point fixe à la fois attractif et répulsif, et les hyperboliques ont deux points fixes, l'un attractif et l'autre répulsif.

2.6.3. Le théorème de Pascal. — Démontrons maintenant un joli théorème de Blaise Pascal qui concerne son « hexagramme mystique ».

Théorème 2.31 (Pascal). — *Soit $(abcdef)$ un hexagone inscrit dans un cercle du plan euclidien \mathbb{R}^2 . S'ils existent, les points $(ab) \cap (de)$, $(bc) \cap (ef)$ et $(cd) \cap (fa)$ sont alignés.*

Précisons : un hexagone est une famille ordonnée de six points dont trois ne sont jamais alignés, et il est inscrit dans un cercle C si chacun de ses points est sur C .

Cette version du théorème de Pascal est artificiellement restrictive : par une transformation affine réelle on obtient l'énoncé pour les ellipses, et si on se place dans le plan projectif on peut éviter de supposer que les intersections des paires de côtés existent. Nous en donnerons donc une version plus satisfaisante dans le chapitre suivant.

La démonstration qui suit m'a été communiquée par Hélène Davaux. Elle utilise la caractérisation des homographies involutives (proposition 2.14).

Démonstration du théorème de Pascal. — Quitte à faire agir une similitude, on peut supposer que le cercle C est le cercle unité centré en l'origine de \mathbb{R}^2 . À partir de maintenant, on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} qu'on complète en $\hat{\mathbb{C}}$.

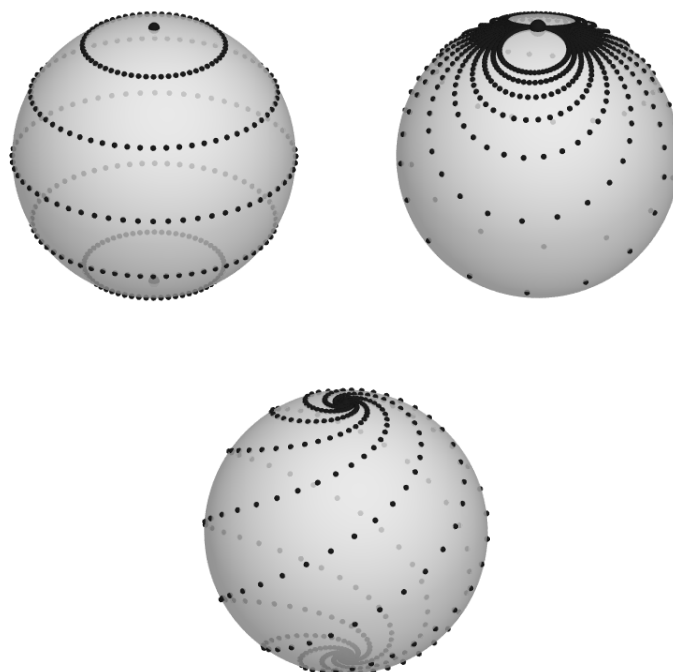


FIGURE 9. Quelques orbites d'homographies (respectivement elliptique, parabolique et hyperbolique) de la sphère de Riemann.

Étant donnés deux points x, y du cercle unité, cherchons l'équation de la droite réelle (xy) qu'ils engendrent. On a $z \in (xy)$ si et seulement si $z = y$ ou $(z - x)/(z - y) \in \mathbb{R}$, or :

$$\begin{aligned}
 \frac{z - x}{z - y} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{\overline{z - x}}{z - y} = \frac{z - x}{z - y} \\
 &\Leftrightarrow (z - y)(\bar{z} - \bar{x}) = (z - x)(\bar{z} - \bar{y}) \\
 &\Leftrightarrow z(\bar{y} - \bar{x}) + (\bar{x}y - x\bar{y}) + \bar{z}(x - y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z + \frac{\bar{x}y - x\bar{y}}{\bar{y} - \bar{x}} + \bar{z} \frac{x - y}{\bar{y} - \bar{x}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow z - (x + y) + xy\bar{z} = 0
 \end{aligned}$$

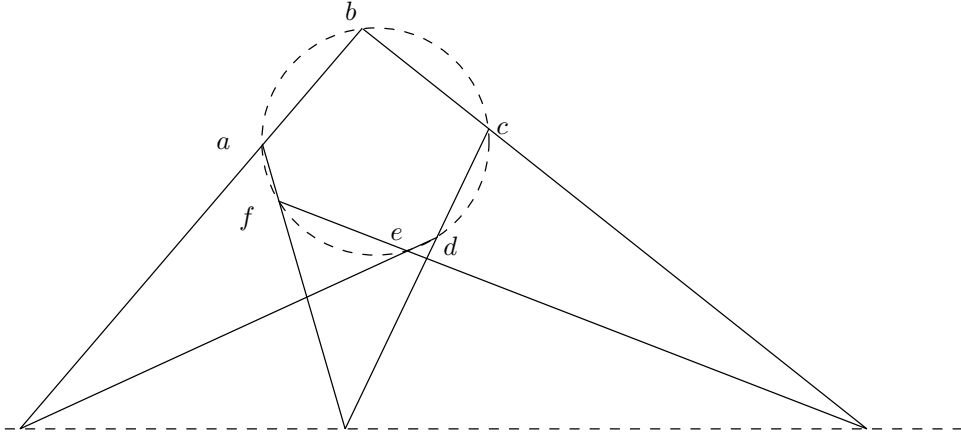


FIGURE 10. Théorème de Pascal : les intersections de paires de côtés opposés sont alignées.

la dernière équivalence tenant à ce que x et y sont supposés de module 1.

Ceci se réécrit encore ainsi : pour chaque point z de (xy) , on a $y = (z - x)/(1 - x\bar{z})$. Considérons plus généralement pour n'importe quel $z \in \mathbb{C}$ l'homographie

$$(13) \quad s_z = \begin{bmatrix} -1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z \\ \bar{z} & -1 \end{bmatrix}$$

On a alors $y = s_z(x)$ dès que $z \in (xy)$ où $x, y \in \mathbb{C}$. En particulier, s_p échange a avec b et d avec e , s_q échange b avec c et e avec f et s_r échange c avec d et a avec f .

Soit $\psi = s_q s_r s_p \in \text{PGL}(2; \mathbb{C})$. D'après ce qui précède on a $\psi(e) = b$ et $\psi(b) = e$, donc $\psi^2(e) = e$. D'après le lemme, ψ est donc une involution donc de trace nulle.

En utilisant l'expression (13), on en déduit

$$1 - q\bar{r} + \bar{p}(q - r) - p(\bar{q} - \bar{r}) - (1 - \bar{q}r) = 0$$

soit encore

$$(\bar{p} - \bar{q})(q - r) = (p - r)(\bar{q} - \bar{r})$$

et donc $(q - p)/(q - r) \in \mathbb{R}$, ce qui montre que p, q et r sont alignés. \square

Exercices

1. ◦ — Démontrer la proposition 2.10 et donner l'expression du birapport $[z, w, x, y]$ en fonction de $[x, y, z, w]$.

2. ◦ — Dans $\widehat{\mathbb{R}}$, Montrer que le birapport d'une progression arithmétique de longueur 4 et de raison non nulle est toujours $4/3$ (une *progression arithmétique* de longueur ℓ est une suite de la forme $(x + jr)_{0 \leq j \leq \ell-1}$, et r est sa *raison*).

Soit $(x_j)_{0 \leq j \leq \ell-1}$ une suite réelle finie de longueur au moins 4. Supposons que x_0, x_1, x_2 sont en progression arithmétique. Montrer alors que x_0, x_1, x_2, x_3 sont en progression arithmétique si et seulement si

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = 4/3$$

En déduire qu'une suite $(y_j)_j$ est l'image par une homographie d'une progression arithmétique si et seulement si $[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}, y_{j+3}] = 4/3$ pour tout j entre 0 et $\ell - 4$.

Calculer le birapport de quatre termes successifs d'une progression géométrique (c'est-à-dire de la forme $(xr^j)_j$) en fonction de la raison r .

Si une progression géométrique de longueur au moins 4 est envoyée par une homographie sur une autre progression géométrique, que peut-on dire de leurs raisons ?

Quelles progressions géométriques sont également image par une homographie d'une progression arithmétique ?

3. ◦ — Dans $\mathbb{C}P^1$ munie de son repère canonique (p_0, p_1, p_2) , on considère les cartes affines $\Psi_a : \mathbb{C}P^1 \setminus \text{proj}(p_0) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\Psi_b : \mathbb{C}P^1 \setminus \text{proj}(p_1) \rightarrow \mathbb{C}$ respectivement associées aux repères (p_0, p_1, p_2) et (p_1, p_0, p_2) . Déterminer l'expression de $\Psi_b \circ \Psi_a^{-1}$ là où elle est définie.

4. — On note \mathbb{F}_q le corps à q éléments. Soit σ une permutation de \mathbb{F}_2P^1 (c'est-à-dire une application bijective $\mathbb{F}_2P^1 \rightarrow \mathbb{F}_2P^1$). Montrer que σ est une homographie. En déduire le cardinal du groupe $\text{PGL}(2; \mathbb{F}_2)$. Que peut-on dire de $\text{GL}(2; \mathbb{F}_2)$?

Montrer que toute permutation de \mathbb{F}_3P^1 est une homographie. En déduire le cardinal des groupes $\text{PGL}(2; \mathbb{F}_3)$ et $\text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$

5. — Dans le plan affine \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un point a quelconque et le faisceau \mathcal{D}_a des droites passant par a . Rappelons que c'est une droite projective réelle. Soient A, A' des droites de ce faisceau et B, B' leurs bissectrices. Montrer que B, B', A, A' sont en division harmonique.

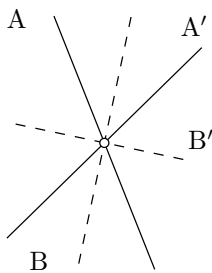


FIGURE 11. Ces quatre droites sont en division harmoniques.

6. ◦ — Soit $\varphi = [M]$ un élément de $\text{PGL}(2; \mathbb{C})$ différent de l'identité tel que $\varphi^3 = \text{Id}$. Montrer que $\text{tr}(M)^2 = \det(M)$.

7. — Montrer que le groupe des homographies de $\text{PGL}(2; \mathbb{R})$ qui commutent avec une involution sans point fixe donnée est isomorphe à $O(2)$.

8. — Déterminer toutes les classes de conjugaison de $\text{PGL}(2; \mathbb{R})$.

9. — On considère quatre points x, y, z, w de $\mathbb{C}P^1$ tels que les trois premiers soient distincts. On considère $B = [x, y, z, w]$ et pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$ des quatre points, on note

$$B^\sigma = [\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y), \sigma^{-1}(z), \sigma^{-1}(w)]$$

Montrer que B^σ ne dépend que de B et de σ , et pas du choix de x, y, z, w .

Déterminer le nombre maximal de valeurs différentes prises par B^σ quand σ parcourt \mathcal{S}_4 . Déterminer toutes les valeurs de B pour lesquelles B^σ prend strictement moins de valeurs que ce maximum.

CHAPITRE 3

LE PLAN PROJECTIF RÉEL

Le plan projectif réel a un statut privilégié parmi les espaces projectifs pour plusieurs raisons, l'une d'elle étant ses liens avec la géométrie « classique » du plan affine. Il intervient également de façon capitale dans la théorie des surfaces, mais cet aspect relève de la topologie plus que de la géométrie et nous ne l'aborderons pas. Enfin, à de nombreux endroits le choix du corps de base est indifférent. Toutefois, il joue un rôle important pour les coniques, nous nous limiterons donc à \mathbb{R} dans ce chapitre pour plus de simplicité.

On considère donc un plan projectif réel $\mathcal{P} = P(E)$ quelconque. Parfois on se placera plus précisément sur $\mathbb{R}P^2$, qui sera alors muni de son repère canonique (p_0, p_1, p_2, p_3) , c'est-à-dire que $p_0 = [1 : 0 : 0]$, $p_1 = [0 : 1 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 1]$ et $p_3 = [1 : 1 : 1]$ dans les coordonnées homogènes définies par la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère également dans $\mathbb{R}P^2$ la carte affine suivante, que l'on dira canonique, $[x : y : z] \mapsto (x/z, y/z)$ définie sur le domaine $\{[x : y : z] \mid z \neq 0\}$.

Lorsqu'on se fixe une carte affine, le complémentaire de son domaine est appelé *droite à l'infini*. On dira alors d'un point qu'il est à l'infini s'il appartient à la droite à l'infini, et de deux droites qu'elles sont parallèles si leur intersection est à l'infini. Rappelons que toute droite projective est la droite à l'infini d'une certaine carte affine.

On notera en minuscule les points et en majuscule les droites; (ab) désigne la droite engendrée par les points distincts a et b , c'est-à-dire $\text{proj}(a, b)$. On désignera logiquement par $A \cap B$ le point d'intersection de

droites distinctes A et B . Le terme de triangle désignera trois points non alignés.

Rappelons enfin que la notion d'alignement ne souffre pas de l'ambiguïté qu'elle pouvait avoir dans la droite complexe : des points de \mathbb{RP}^2 sont alignés s'il existe une droite projective les contenant tous.

3.1. Théorèmes projectifs classiques

Notre étude du plan commence par des énoncés que l'on trouve dans tous les ouvrages de géométrie projective, entre autres parce qu'ils illustrent bien les procédés projectifs en géométrie classique. Plus précisément, on va simplifier la situation en utilisant la grande transitivité du groupe projectif pour envoyer certains points à l'infini.

Théorème 3.1 (Pappus). — Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan projectif \mathcal{P} , a, b, c des points distincts de D et a', b', c' des points distincts de D' . On suppose qu'aucun de ces six points ne soit l'intersection de D et D' .

Alors les points $\alpha = (bc') \cap (b'c)$, $\beta = (ac') \cap (a'c)$ et $\gamma = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.

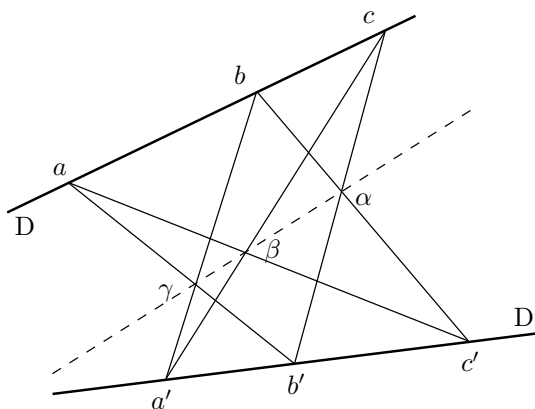
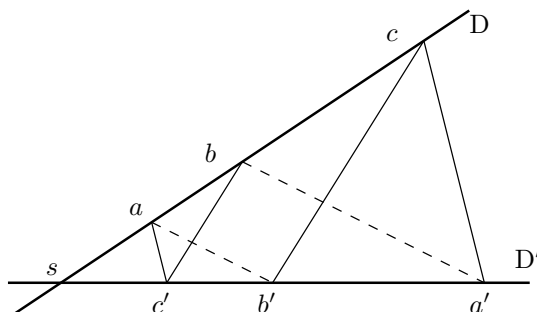


FIGURE 1. Le théorème de Pappus : une situation générique.

Démonstration. — On se place dans une carte affine dont la droite à l'infini est la droite $(\alpha\beta)$ et dont on note U le domaine. Dans cette carte, (bc') est parallèle à $(b'c)$ et (ac') à $(a'c)$.

FIGURE 2. Le théorème de Pappus : on a envoyé α, β à l'infini.

Notons s l'intersection de D et D' et considérons les applications suivantes :

- si s est à l'infini, T_1 est la translation de U envoyant b sur c et T_2 est celle qui envoie c sur a ;
- sinon T_1 et T_2 sont les homothéties de centre s envoyant respectivement b sur c et c sur a .

Dans les deux cas les T_i se prolongent en des transformations projectives (qui fixent chaque point à l'infini), préservent D et D' et ont la propriété d'envoyer une droite sur une droite parallèle.

Ainsi, T_1 envoie (bc') sur la droite parallèle passant par $T_1(b) = c$, c'est-à-dire sur $(b'c)$. Par conséquent, $T_1(c')$ est sur $(b'c)$, ainsi que sur D' , donc $T_1(c') = b'$. De la même façon on a $T_2(a') = c'$.

Considérons l'application $T = T_2T_1$, qui envoie b sur a . Comme T_1 et T_2 sont des homothéties de même centre ou des translations, elles commutent, donc $T = T_1T_2$ vérifie $T(a') = T_1(c') = b'$. Donc T envoie $(a'b)$ sur $(a'b')$, qui sont par conséquent parallèles. On obtient ainsi que γ est à l'infini, donc sur $(\alpha\beta)$. \square

Théorème 3.2 (Desargues). — Soient abc et $a'b'c'$ deux triangles du plan \mathcal{P} .

On suppose que $a \neq a'$, $b \neq b'$ et $c \neq c'$, ainsi que $(ab) \neq (a'b')$, $(ac) \neq (a'c')$ et $(bc) \neq (b'c')$. Notons $\alpha = (bc) \cap (b'c')$, $\beta = (ac) \cap (a'c')$ et $\gamma = (ab) \cap (a'b')$.

Les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si les points α, β, γ sont alignés.

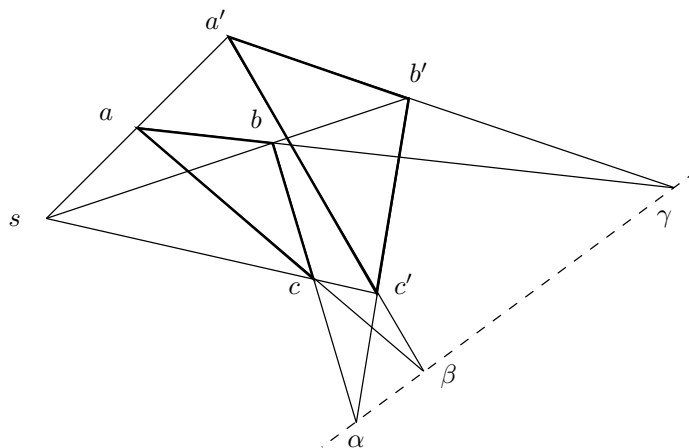


FIGURE 3. Le théorème de Desargues : (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si α , β et γ sont alignés.

Avant de le démontrer, remarquons que la traduction affine de ce théorème est pleine de disjonctions de cas : il faut considérer l'éventuel parallélisme de chacune des cinq paires de droites dont on prend l'intersection. Le formalisme projectif a ainsi l'intérêt de rendre certains énoncés synthétiques.

Démonstration. — Plaçons-nous dans une carte affine de domaine U dont la droite à l'infini est $(\alpha\beta)$. Dans cette carte, (bc) est parallèle à $(b'c')$ et (ac) à $(a'c')$.

Si c' était à l'infini, alors $(a'c')$ et $(b'c')$ seraient parallèles, donc les quatre droites (ac) , $(a'c')$, (bc) et $(b'c')$ seraient parallèles et leur point commun à l'infini serait $c = c'$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc c' appartient au domaine U , ainsi que c , de la même manière.

Notons s le point d'intersection de (bb') avec (cc') . On veut montrer que (aa') contient s si et seulement si γ est sur $(\alpha\beta)$, c'est-à-dire si et seulement si (ab) et $(a'b')$ sont parallèles.

Considérons l'application T suivante : si s est à l'infini, T est la translation du domaine de la carte affine canonique qui envoie c sur c' ; sinon T est l'homothétie de centre s qui envoie c sur c' . Dans les deux cas T se prolonge en une transformation projective (qui fixe chaque point à l'infini) et a la propriété d'envoyer une droite sur une droite parallèle.

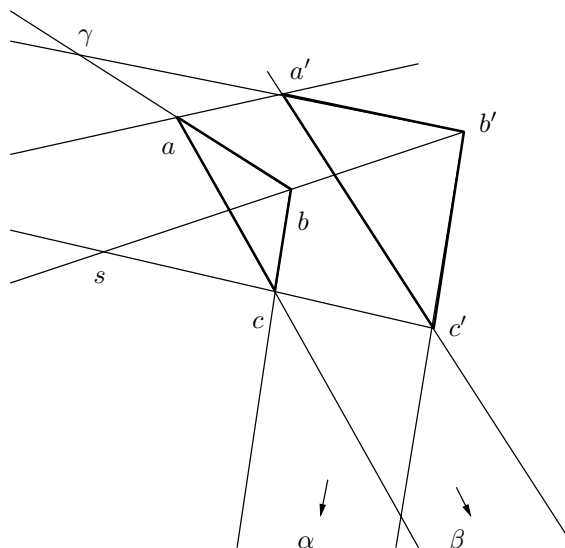


FIGURE 4. Le théorème de Desargues : (aa') passe par s si et seulement si γ est sur la droite à l'infini $(\alpha\beta)$.

Ainsi, T envoie (bc) sur la droite qui lui est parallèle et contient c' , c'est-à-dire sur $(b'c')$. Or T préserve (bb') , donc $T(b)$ doit être sur (bb') et $(b'c')$, et on obtient $T(b) = b'$. Notons que nos hypothèses empêchent (bb') et $(b'c')$ d'être confondues. On obtient de même que $T((ac)) = (a'c')$.

Supposons que (aa') contienne s . Alors $T(a)$ doit être sur (aa') et $(a'c')$, d'où $T(a) = a'$. Cela entraîne que $T((ab)) = (a'b')$, donc $(a'b')$ est parallèle à (ab) .

Inversement, si $(a'b')$ et (ab) sont parallèles, alors T doit envoyer (ab) sur la droite parallèle contenant b' , c'est-à-dire sur $(a'b')$. On a également $T((ac)) = (a'c')$, donc $T(a) = (a'c') \cap (a'b') = a'$, ce qui entraîne que (aa') passe par s . \square

On peut trouver ces démonstration très « affines ». Le formalisme projectif y est pourtant fondamental : il a permis d'envoyer α et β à l'infini, ce qui a rendu les transformations *ad hoc* faciles à définir.

On aurait pu, plutôt que de choisir une carte affine particulière, considérer une carte affine fixée (la canonique dans \mathbb{RP}^2 , par exemple), et utiliser une transformation projective pour envoyer α et β à l'infini. Cela n'aurait pratiquement rien changé aux démonstrations, c'est simplement

une autre façon de les présenter. Elle mérite qu'on s'y arrête un petit peu, car là repose une grande partie du principe des actions de groupes en géométrie.

Les théorèmes de Pappus et Desargues sont plus simples à démontrer en géométrie projective qu'en géométrie affine, car on dispose d'un groupe « plus gros ». Toute transformation affine d'une carte peut, comme le montre la proposition 1.18, s'étendre en une transformation projective, mais l'inverse n'est pas vrai. En effet une transformation projective qui ne préserve pas la droite à l'infini ne préserve pas le domaine de la carte non plus. Ces nombreux éléments du groupe projectif donnent beaucoup de choix quand on les applique à une configuration de droites et de points (voir la proposition 1.14). Ainsi, on peut transformer la configuration à étudier pour la mettre dans une position avantageuse : nous n'avons rien fait d'autre.

On pourrait vouloir, tant qu'à faire, utiliser un groupe encore plus gros. Ce ne serait pas très efficace : en effet, si on prend par exemple le groupe de toutes les bijections de notre espace, on peut certes mettre nos points dans la position souhaitée, mais comme ce groupe ne préserve pas l'alignement, nos droites ne sont pas envoyées sur des droites et on ne peut plus dire grand chose. Il faut donc un groupe assez gros pour offrir une bonne forme à notre configuration, mais assez petit pour préserver les propriétés qui nous importent (en l'occurrence, l'alignement). Pour les théorèmes de Pappus et Desargues, comme on les a exposés ici ou dans leurs versions affines, le groupe projectif est exactement le groupe adapté.

3.2. Coniques

L'objet de cette section est de définir puis d'étudier très brièvement les coniques projectives, mais aussi affines. Nous allons voir comment le point de vue projectif éclaire la distinction entre ellipses, paraboles et hyperboles, tout en unifiant ces trois concepts.

Il y a usuellement deux définitions possibles d'une conique : comme un ensemble de points, ou comme une équation. Ce dernier point de vue est particulièrement pertinent lorsque l'on étudie les intersections

de coniques (le théorème d'intersection de Bézout en témoigne, mais il dépasse le cadre de ce livre). Nous privilégierons le premier point de vue, mais le second prendra naturellement le pas à certains endroits.

3.2.1. Définition. — Plaçons-nous tout d'abord dans le plan affine \mathbb{R}^2 . On définit usuellement une conique affine comme une partie admettant une équation polynomiale d'ordre 2 :

$$(14) \quad ax^2 + by^2 + c + dxy + ex + fy = 0$$

Avec cette définition, l'ensemble vide est une conique (par exemple d'équation $x^2 = -1$), ainsi que n'importe quelle droite $((c+ex+fy)^2 = 0$, on parlera de *droite double* car ses points sont solution double de l'équation), ou n'importe quelle union de deux droites $((c+ex+fy)(c'+e'x+f'y) = 0$). Il n'est pas complètement évident de trouver des conditions qui assurent que la conique est « raisonnable », sans point double par exemple. Retournons dans le monde projectif, où cela se révèlera simple et naturel.

Dans la carte affine canonique U , dont les points s'écrivent sous la forme $[x : y : 1]$ quitte à multiplier par un scalaire, on peut utiliser la même équation pour définir une partie de \mathbb{RP}^2 :

$$C_U = \{[x : y : 1] \mid ax^2 + by^2 + c + dxy + ex + fy = 0\}$$

Aucun point à l'infini n'est obtenu ainsi, ce qui dans beaucoup de cas (une droite par exemple) ne semble pas raisonnable.⁽¹⁾

Cherchons à quelle condition un point $[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2$ appartient à C_U . Si $z = 0$, ce n'est pas le cas. Si $z = 1$, il faut et il suffit que (x, y) vérifie (14). Si z est non nul, on a $[x : y : z] = [x/z : y/z : 1]$ donc l'équation devient

$$a \left(\frac{x}{z}\right)^2 + b \left(\frac{y}{z}\right)^2 + c + d \frac{xy}{z^2} + e \frac{x}{z} + f \frac{y}{z} = 0$$

soit, en multipliant par z^2 ,

$$(15) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

1. Si l'on munit \mathbb{RP}^2 de la topologie quotient, on peut formaliser ceci en : C_U n'est en général pas une partie fermée.

On vient simplement d'homogénéiser un polynôme de degré 2. À ce stade, il paraîtrait bien injuste de continuer à exclure les $[x : y : 0]$ qui vérifient (15), et c'est tout naturellement qu'on donne la définition suivante.

Définition 3.3. — On appelle *conique projective* toute partie de \mathbb{RP}^2 qui admet une équation polynomiale homogène de degré 2 :

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\}$$

où a, b, c, d, e, f sont des nombres réels.

Remarquons que nous nous sommes placés sur \mathbb{RP}^2 pour utiliser des coordonnées (ici les coordonnées canoniques). On peut définir de la même façon les coniques dans un plan projectif \mathcal{P} quelconque, en utilisant les coordonnées homogènes dans un repère. On peut également définir les coniques de \mathcal{P} comme les images des coniques de \mathbb{RP}^2 par les isomorphismes $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathcal{P}$. Pour que tout cela soit cohérent, il faut toutefois vérifier une chose : que cette définition ne dépend pas du repère choisi ou, ce qui revient au même, de l'isomorphisme choisi. Mais c'est le cas, car une équation homogène de degré 2 est envoyée par un automorphisme linéaire sur une équation homogène de degré 2 (s'il reste un doute à ce sujet, la démonstration de la proposition 3.7 contient tout ce qu'il faut pour le lever). En particulier, on a le résultat suivant.

Proposition 3.4. — *Les transformations projectives envoient conique sur conique.*

La définition 3.3 inclut toujours des cas dégénérés : en homogénéisant l'équation d'une union de deux droites affines, on obtient simplement une union de deux droites projectives.

L'idée va être de tirer de notre équation une forme quadratique sur \mathbb{R}^3

$$Q : (x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

qu'on considèrera à multiplication par un scalaire non nul près, puisqu'en fait c'est son cône isotrope (défini par l'équation $Q(x, y, z) = 0$) qui nous intéresse. On écrira que la conique C est définie par l'équation $Q(x, y, z) = 0$, ou plus simplement par la forme quadratique Q .

Considérons de plus près le cas dégénéré modèle : on obtient l'union de deux droites exactement quand on peut factoriser l'équation en $(cz + ex + fy)(c'z + e'x + f'y) = 0$. Considéré dans \mathbb{R}^3 , cela implique en particulier

que la droite vectorielle constituant l'intersection des plans $cz + ex + fy = 0$ et $c'z + e'x + f'y = 0$ est dans le noyau de Q , donc que Q est dégénérée.

Inversement si Q est dégénérée, suivant que sa signature est $(\pm, \pm, 0)$, $(+, -, 0)$ ou $(\pm, 0, 0)$ son cône isotrope est une droite, l'union de deux plans ou un plan donc la conique projective associée est un point, l'union de deux droites ou une droite.

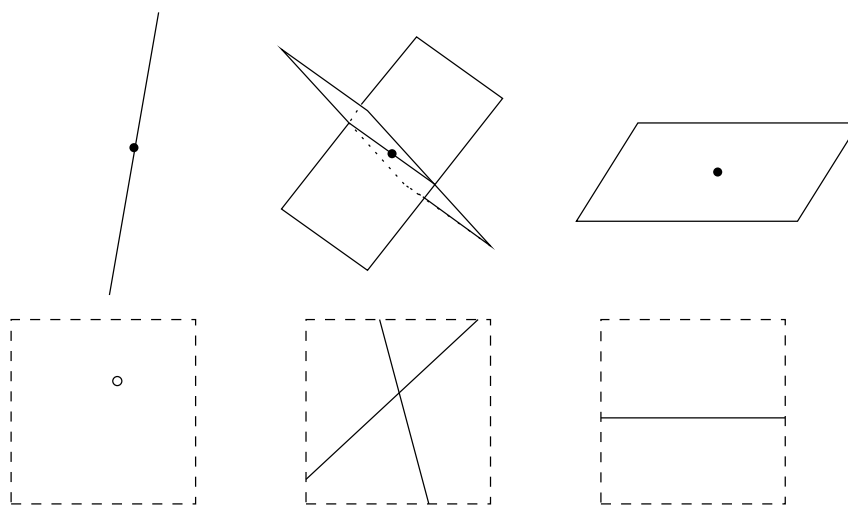


FIGURE 5. En haut, les trois types de cônes isotropes pour une forme quadratique dégénérée non nulle. En bas, les coniques dégénérées correspondantes.

Définition 3.5. — On dit qu'une conique projective est *non dégénérée* si elle admet une équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$ dont la forme quadratique associée

$$Q : (x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

est non dégénérée.

Remarquons que multiplier l'équation par un scalaire non nul ne change pas l'éventuelle dégénérescence de Q .

Il reste quelques cas pathologiques dans la définition 3.5, due aux propriétés du corps des réels. Par exemple, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ définit une conique non dégénérée, mais vide.

Définition 3.6. — On dit qu'une conique projective est *propre* si elle est non-dégénérée et non vide.

Attention, cette terminologie n'est sans doute pas complètement standard. On voit parfois le terme « propre » utilisé dans le sens que nous donnons à « non-dégénéré ».

Les transformations projectives, naturellement, envoient les coniques propres sur des coniques propres.

3.2.2. Unicité. — Certains mathématiciens parlent de « la » conique propre ; cette expression est justifiée par le résultat suivant.

Proposition 3.7 (unicité de la conique propre)

Pour toutes coniques projectives propres et non dégénérées C et C' , il existe une transformation projective $\varphi \in \text{PGL}(3; \mathbb{R})$ telle que $\varphi(C) = C'$.

Démonstration. — Considérons une conique projective propre C . Soit Q une forme quadratique non dégénérée telle que l'équation $Q(x, y, z) = 0$ définisse C .

La signature de Q peut *a priori* être $(+, +, +)$, $(+, +, -)$, $(+, -, -)$ ou $(-, -, -)$. toutefois, si Q était définie alors $Q(x, y, z) = 0$ impliquerait $(x, y, z) = 0$, donc C serait vide. La signature de Q est donc $(+, +, -)$ ou $(+, -, -)$. Notons qu'on passe de l'une à l'autre de ces signature simplement en multipliant Q par -1 , ce qui ne change pas C .

Notons au passage qu'une conique a plusieurs équations quadratiques : si elle est définie par $Q(x, y, z) = 0$, alors l'équation $\lambda Q(x, y, z) = 0$ convient également pour tout λ non nul (on verra plus loin que c'est la seule manière possible de modifier l'équation quadratique d'une conique propre).

En particulier quitte à considérer $-Q$, on peut supposer que sa signature est $(+, +, -)$. Alors la matrice de Q dans la base canonique est de la forme

$$M = {}^t P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P$$

où $P \in \text{PGL}(3; \mathbb{R})$. On note L la matrice diagonale qui apparaît dans l'expression ci-dessus, et on note C_0 la conique associée, c'est-à-dire d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Soit ψ la transformation projective $[P]$, où on confond une matrice et l'application linéaire associée *via* la base canonique. Alors on a

$$\begin{aligned} \langle (x, y, z) \rangle \in C &\Leftrightarrow (x, y, z)^t \text{PLP} \begin{array}{l} | x \\ y = 0 \\ | z \end{array} \\ &\Leftrightarrow {}^t \begin{pmatrix} & | x \\ P & | y \\ & | z \end{pmatrix} \text{LP} \begin{array}{l} | x \\ y = 0 \\ | z \end{array} \\ &\Leftrightarrow \psi(p) \in C_0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\psi(C) = C_0$.

On peut construire de la même façon une transformation projective ψ' telle que $\psi'(C') = C_0$, et $\varphi = \psi'^{-1}\psi$ envoie bien C sur C' . \square

Du point de vue projectif, il n'y a donc aucun moyen de différencier deux coniques propres.

Voyons maintenant rapidement comment ceci se traduit dans le monde affine.

3.2.3. Coniques affines. — Rappelons qu'on a défini une conique affine comme un ensemble de points du plan affine \mathbb{R}^2 défini par une équation polynomiale de degré 2. Comme un polynôme peut toujours s'homogénéiser, une conique affine n'est rien d'autre que la trace d'une conique projective sur une carte affine. On peut encore dire que si l'on identifie \mathbb{R}^2 avec le domaine de la carte affine canonique de \mathbb{RP}^2 , l'adhérence d'une conique affine est une conique projective.

On définit naturellement une conique affine propre comme la trace d'une conique projective propre sur une carte affine. Pour comprendre cette trace, le plus simple est de revenir à \mathbb{R}^3 .

Considérons donc une conique projective propre C , et Q une forme quadratique de signature $(++-)$ la définissant. Soit \tilde{C} le cône isotrope de Q dans \mathbb{R}^3 : c'est exactement $P^{-1}(C) \cup \{0\}$, où $P : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est la projection canonique. Quitte à faire agir une transformation projective φ , on peut supposer que $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Alors \tilde{C} est un cône de révolution, et on considère une carte affine dont on note U le domaine.

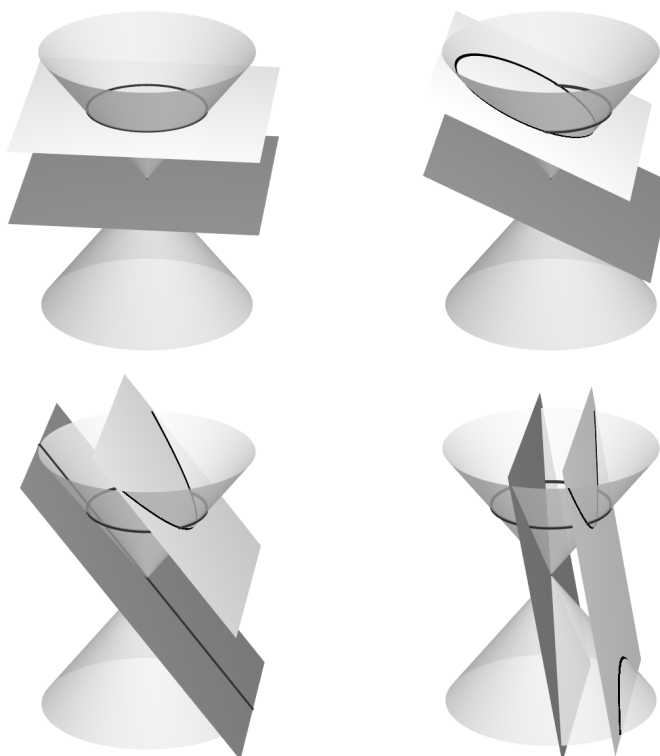


FIGURE 6. Le cône isotrope de Q et différentes cartes affines. Le plan foncé représente F' (qui projectivé devient la droite à l'infini), le plan clair H' (qui s'identifie au domaine de la carte). On a représenté le cercle obtenu dans la carte affine canonique dans chacun des cas.

Comme d'habitude, F désigne le plan vectoriel tel que $P(F)$ soit la droite à l'infini et H un plan affine de \mathbb{R}^3 parallèle à F et auquel s'identifie U .

La conique affine $C_U = C \cap U$ s'identifie donc à l'intersection du cône \tilde{C} et du plan affine H de \mathbb{R}^3 . Si la droite à l'infini n'intersecte pas C , C_U est appelée une ellipse. Si elle intersecte C en un seul point, C_U est appelé une parabole. Enfin si elle intersecte C en deux points, C_U est appelé une hyperbole (voir les figures 6 et 7).

Remarquons enfin que plutôt que de normaliser la conique et voir où la carte affine la rencontre, on aurait pu garder la carte affine canonique et

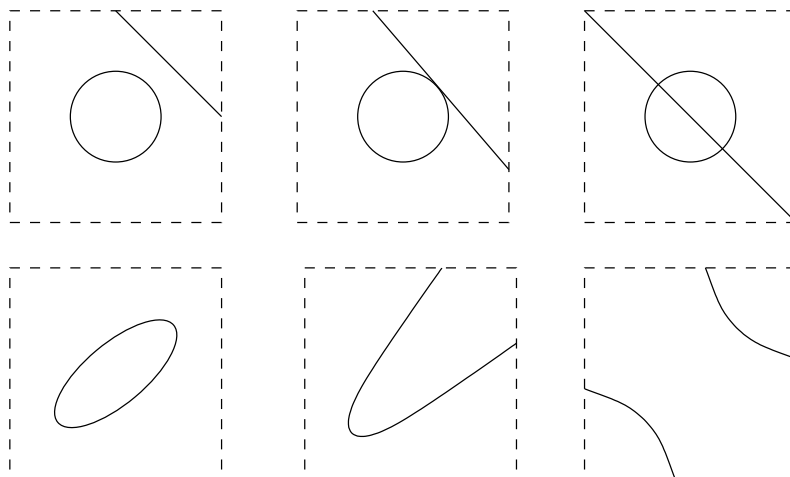


FIGURE 7. En haut, une conique et une droite projectives vues dans une carte affine. En bas, la conique obtenue en envoyant la droite à l'infini.

décrire la conique comme l'image de la conique C_0 sous une transformation projective, ce qui reviendrait au même (en bougeant le cône plutôt que le plan par lequel on coupe.)

Pour compléter la classification affine, il resterait à montrer que deux ellipses sont toujours images l'une de l'autre par une transformation affine, ainsi que deux hyperboles et deux paraboles.

3.2.4. Prescription de coniques. — Un résultat classique dit que par cinq points « génériques » il passe une unique conique. Voyons comment le formalisme projectif permet de le démontrer avec très peu de calculs.

Théorème 3.8. — *Soient a, b, c, d, e cinq points de \mathcal{P} dont trois ne sont jamais alignés. Il existe une unique conique projective qui les contient tous, et elle est propre.*

Démonstration. — On se place dans un système de coordonnées homogènes et on considère l'ensemble de toutes les équations de coniques : il est décrit par six nombres, considérés à multiplication près, et donc identifiable à \mathbb{RP}^5 . Plus précisément, on identifie une équation quadratique

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz = 0$$

au point $[\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta]$ de \mathbb{RP}^5 .

Dire qu'un point de coordonnées $[x_0 : y_0 : z_0]$ appartient à une conique revient à dire que les coordonnées de l'équation de celle-ci satisfont à l'équation linéaire

$$\alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2 + \delta x_0 y_0 + \varepsilon x_0 z_0 + \zeta y_0 z_0 = 0$$

L'ensemble des équations de coniques passant par ce point est donc un hyperplan projectif de \mathbb{RP}^5 .

Il en est de même pour les quatre autres points, donc l'ensemble des coniques passant par a, b, c, d, e est l'intersection de cinq hyperplans dans \mathbb{RP}^5 , c'en est donc un sous-espace de dimension au moins 0 et il n'est pas vide.

Pour obtenir l'unicité, il suffit de montrer que cette intersection est réduite à un point, ce qui revient à démontrer que les différentes équations définies par a, b, c, d, e sont indépendantes.

Comme trois points parmi a, b, c, d ne sont jamais alignés, ces quatre points forment un repère de \mathcal{P} . On peut donc, en se plaçant dans le système de coordonnées homogènes qu'ils définissent, supposer $a = [1 : 0 : 0]$, $b = [0 : 1 : 0]$, $c = [0 : 0 : 1]$ et $d = [1 : 1 : 1]$. Une conique passant par ces quatre points doit alors vérifier $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, quatre équations indépendantes.

Si on note $e = [x_1 : y_1 : z_1]$, la cinquième équation peut s'écrire, quitte à exploiter les précédentes, $\delta x_1 y_1 + \varepsilon x_1 z_1 + \zeta y_1 z_1 = 0$ et elle est liée aux quatre premières équations si et seulement si

$$(16) \quad x_1 y_1 = x_1 z_1 = y_1 z_1$$

Si x_1 était nul, e serait sur la droite (bc) dont $(x = 0)$ est une équation, ce qui est exclu. De même, y_1 et z_1 sont non nuls et la condition (16) peut se réécrire $x_1 = y_1 = z_1$. Mais elle implique entre autres que e soit sur la droite (cd) d'équation $(x = y)$, ce qui est exclu par hypothèse.

Ainsi, on a l'unicité de la conique passant par a, b, c, d, e et il reste à montrer qu'elle est non dégénérée. Dans le cas contraire, elle serait une droite double ou l'union de deux droites, et trois des cinq points seraient alignés. \square

On peut obtenir un peu plus qu'annoncé en modifiant très légèrement la démonstration : si quatre des cinq points forment un repère et si les points sont distincts deux à deux, la conique passant par a, b, c, d, e est unique. On pourrait, par la même méthode, étudier complètement les différentes configurations de cinq points.

De plus, on a en fait montré qu'il existe une unique *équation* de conique à multiplication près passant par les cinq points. Ceci permet de déduire que toutes les équations d'une conique propre sont proportionnelles.

Proposition 3.9. — *Soit C une conique propre définie par l'équation $Q(x, y, z) = 0$ où Q est une forme quadratique non dégénérée. Alors toute forme quadratique Q' vérifiant*

$$\{[x : y : z] \mid Q'(x, y, z) = 0\} = C$$

est de la forme $Q' = \lambda Q$, où $\lambda \in \mathbb{R}^$.*

Démonstration. — Considérons cinq points distincts et trois à trois non alignés⁽²⁾ sur C. D'après ce qui précède, Q' et Q satisfont toutes deux à cinq équations linéaires indépendantes, elles sont donc proportionnelles. \square

Considérons maintenant un autre type de contrainte : on dit qu'une droite L est *tangente* à une conique C si elles ont exactement un point d'intersection. Notons que cette définition est *ad hoc*, spécifique aux coniques propres : pour des courbes de degré plus grand, on demanderait que la droite ait un « point d'intersection double » avec la courbe.

Proposition 3.10. — *Soient a, b, c, d des points du plan dont trois ne sont jamais alignés. Il existe une unique conique passant par a, b, c et tangente aux droites (ad) et (bd) , et elle est propre.*

Démonstration. — Comme précédemment, on se place dans le repère a, b, c, d . On cherche les coniques C dont une équation s'écrit $\delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz = 0$ et qui sont tangentes à (ad) et (bd) .

Comme les coordonnées de a sont $[1 : 0 : 0]$ et celles de d sont $[1 : 1 : 1]$, on constate que l'équation de droite $(y = z)$ est satisfaite par ces deux points, c'est donc l'équation de (ad) . De même, (bd) a pour équation $(x = z)$.

2. En fait cette deuxième condition est automatique, voir les exercices

Un point de (ad) s'écrit donc sous la forme $[x : y : y]$, et les points d'intersection de (ad) et C sont donnés par l'équation $(\delta + \varepsilon)xy + \zeta y^2 = 0$. Ainsi, a est le seul point d'intersection de (ad) et C si et seulement si $\delta + \varepsilon = 0$. De la même façon, b est le seul point d'intersection de (bd) et C si et seulement si $\delta + \zeta = 0$.

Il y a donc bien une seule conique C passant par a, b, c et tangente à (ad) et (bd) , puisque les seules équations possibles sont de la forme $\delta(xy - xz - yz) = 0$.

On peut vérifier à la main que cette conique est propre, ou simplement dire qu'elle ne peut pas être une droite double (sinon a, b, c seraient alignés) ni une union de deux droites (sinon elle intersecterait (ad) ou (bd) en plusieurs points). \square

3.2.5. Le théorème de Pascal. — Revenons au théorème de Pascal : nous pouvons maintenant en donner un énoncé beaucoup plus général que le théorème 2.31 du chapitre précédent.

Théorème 3.11 (Pascal). — *Un hexagone $(abcdef)$ est inscrit dans une conique si et seulement si les points $(ab) \cap (de)$, $(bc) \cap (ef)$ et $(cd) \cap (fa)$ sont alignés. Dans ce cas, la conique est propre.*

Ici encore, un hexagone est une famille ordonnée de six points dont trois ne sont jamais alignés. Il est inscrit dans une conique C si chacun de ses points est sur C .

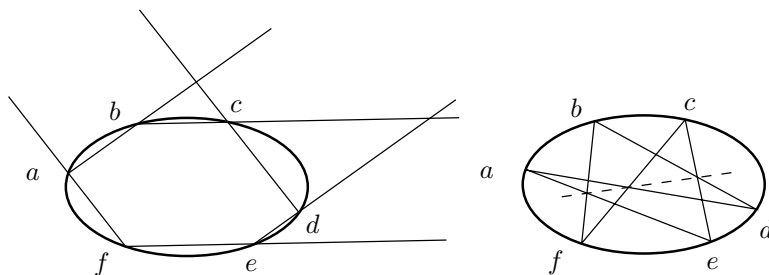


FIGURE 8. Théorème de Pascal : à gauche, chaque paire de côtés opposés de l'hexagone $abcdef$ se rencontre à l'infini ; à droite, on a présenté avec les mêmes points le cas de l'hexagone $adbfce$.

Démonstration. — Faisons une démonstration directe, en coordonnées. Une démonstration plus conceptuelle sera proposée au chapitre suivant.

Remarquons tout de suite que s'il existe une conique passant par les points a, b, c, d, e, f , elle doit être propre puisqu'ils sont trois à trois non alignés.

De plus tout quadruplet choisi parmi ces points est un repère. Plaçons-nous dans le repère (a, c, e, b) et notons $[r : s : t]$ les coordonnées homogènes de d et $[u : v : w]$ celles de f .

La droite (ab) a pour équation $y = z$, puisque cette équation définit une droite et est vérifiée par les deux points a et b . De même, la droite (de) a pour équation $sx = ry$, et on obtient les coordonnées de leur point d'intersection : $[r : s : s]$. De la même façon, les coordonnées de $(bc) \cap (ef)$ sont $[u : v : u]$ et celles de $(cd) \cap (fa)$ sont $[rw : vt : wt]$. Ces trois points sont alignés si et seulement si trois vecteurs les représentant sont coplanaire, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant suivant s'annule :

$$D_1 := \begin{vmatrix} r & u & rw \\ s & v & vt \\ s & u & wt \end{vmatrix} = rtvw + rsuw + stuv - rsvw - rtuv - stuw.$$

Raisonnons maintenant comme pour le théorème 3.8 : on cherche une équation homogène de degré 2, donc de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz = 0$$

qui soit vérifiée par les coordonnées des six points a, b, c, d, e, f . Considérant a, c, e on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on est ramené à résoudre le système suivant en $\delta, \varepsilon, \zeta$:

$$\begin{cases} \delta + \varepsilon + \zeta = 0 \\ rs\delta + rt\varepsilon + st\zeta = 0 \\ uv\delta + uw\varepsilon + vw\zeta = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non nulle si et seulement si le déterminant suivant s'annule :

$$D_2 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ rs & rt & st \\ uv & uw & vw \end{vmatrix} = rtvw + rsuw + stuv - rsvw - rtuv - stuw.$$

Comme $D_1 = D_2$, le résultat est démontré. \square

3.3. Dualité projective

La dualité est un outil important en algèbre linéaire et bilinéaire. Nous avons défini les espaces projectifs *via* les espaces vectoriels, et les coniques projectives *via* les formes quadratiques; il n'est donc pas étonnant que la dualité se prolonge au monde projectif. On peut parler de dualité en toute dimension, mais cette notion est particulièrement intéressante sur le plan.

3.3.1. De la dualité linéaire à la dualité projective. — On se place toujours dans un plan projectif réel $\mathcal{P} = P(E)$.

L'espace dual E^* de E est l'ensemble des formes linéaires sur E

$$E^* = \{L : E \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ } \mathbb{R}\text{-linéaire}\}$$

C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. On peut donc considérer le plan projectif $P(E^*)$.

Pour qu'il soit utile, il faut le relier à \mathcal{P} . Un point $p \in \mathcal{P}$ s'écrit $p = P(F)$ où F est une droite vectorielle.⁽³⁾ Or on peut associer à F la partie de E^* suivante

$$F' = \{L \in E^* \mid \forall u \in F, L(u) = 0\} = \{L \in E^* \mid L(v) = 0\}$$

c'est-à-dire son orthogonal au sens de la dualité. On sait que F' est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E^* , donc $P(F')$ est une droite projective de $P(E^*)$.

De même, si D est une droite projective de \mathcal{P} , elle s'écrit $D = P(G)$ où G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E . Son orthogonal $G' = \{L \in E^* \mid \forall u \in G, L(u) = 0\}$ est une droite vectorielle de E^* , donc correspond à un point de $P(E^*)$. On vient d'associer de façon canonique une droite de $P(E^*)$ à chaque point de \mathcal{P} , et un point à chacune de ses droites.

Définition 3.12. — Le *dual* d'un plan projectif $\mathcal{P} = P(E)$ est le plan projectif $\mathcal{P}^* = P(E^*)$.

3. En fait, formellement, on pourrait écrire $p = F$ puisque les points de \mathcal{P} sont exactement les droites de E ; toutefois il est préférable d'utiliser des notations différentes suivant qu'on y pense comme à un point projectif ou à une droite vectorielle.

On appelle *droite duale* d'un point $p = P(F)$ de \mathcal{P} la droite $p^* = P(F')$ de \mathcal{P}^* obtenue en projectivant l'orthogonal de F .

On appelle *point dual* d'une droite $D = P(G)$ de \mathcal{P} le point $D^* = P(G')$ de \mathcal{P}^* obtenue en projectivant l'orthogonal de G .

Remarque sur les notations : on n'a pas noté, par exemple, F^* l'orthogonal de F pour ne pas le confondre avec son dual (le premier est de dimension 2, le second de dimension 1). Ce problème ne se pose pas avec les droites et points projectifs, puisqu'on n'a défini le dual que des plans projectifs. On utilise donc à ce niveau l'astérisque, plus cohérent avec la notation \mathcal{P}^* .

Pour qu'une notion mathématique soit appelé « dualité », il faut en général qu'elle soit « involutive », c'est-à-dire qu'appliquée deux fois elle ramène à la situation initiale.⁽⁴⁾

Proposition 3.13. — *L'identification canonique de E avec E^{**} donnée par l'application*

$$\begin{aligned} \text{ev} : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto \begin{cases} E^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ L &\mapsto L(x) \end{cases} \end{aligned}$$

*passé au quotient en un isomorphisme projectif $\eta = P(\text{ev}) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{**}$.*

*De plus pour tout point p et toute droite D de \mathcal{P} , on a $p^{**} = \eta(p)$ et $D^{**} = \eta(D)$. Si on identifie chaque objet projectif avec son image par η , cela s'écrit encore $p^{**} = p$ et $D^{**} = D$.*

Démonstration. — On sait que ev est un isomorphisme linéaire, donc η est un isomorphisme projectif.

Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de E . Alors $h \in E^{**}$ est une forme linéaire sur E^* , et appartient à F'' si et seulement si $h(L) = 0$ pour tout $L \in F'$. Or comme ev est un isomorphisme, il existe $x \in E$ tel que $h = \text{ev}(x)$. On a alors $h(L) = L(x)$ par définition de ev , donc $h \in F''$ si et seulement si $L(x) = 0$ pour tout $L \in F'$. C'est le cas si $x \in F$ par définition de F' , donc F'' contient $\text{ev}(F)$. Mais ces deux sous-espaces vectoriels de E^{**} sont de même dimension (celle de F), donc sont égaux : $\text{ev}(F) = F''$.

4. Ceci n'est pas tout à fait vrai, comme en témoigne la dualité dans les espaces vectoriels topologiques de dimension infinie.

Soit $p = P(F)$ un point de \mathcal{P} . Alors

$$p^{**} = P(F'') = P(\text{ev}(F)) = \eta(P(F)) = \eta(p)$$

De même si $D = P(G)$ est une droite de \mathcal{P} , alors $D^{**} = \eta(D)$. \square

Puisque \mathcal{P} et \mathcal{P}^* sont deux plans projectifs réels, ils sont isomorphes. On pourrait penser qu'on peut donc choisir n'importe quel isomorphisme $\varphi : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}$ et s'en servir pour identifier les objets duaux à des objets dans \mathcal{P} . Toutefois ceci ne serait pas très satisfaisant, ⁽⁵⁾ car cette identification n'est pas invariante sous l'action du groupe projectif.

Considérons par exemple un point p , sa droite duale p^* serait identifié à $\varphi(p^*)$, qui est une droite de \mathcal{P} . Maintenant si ψ est un automorphisme de $P(E)$, on voudrait que la droite duale de $\psi(p)$ s'identifie à $\psi(\varphi(p^*))$, c'est-à-dire $\psi\varphi(p^*) = \varphi(\psi(p)^*)$. Mais ceci n'a aucune raison d'être vrai (d'ailleurs, c'est toujours faux pour certains ψ).

On verra plus loin comment on peut se servir d'une conique pour, dans une certaine mesure, remédier à ce problème. Pour l'instant, voyons pourquoi il ne se pose pas pour l'identification d'un objet avec son bidual.

Si ψ est un isomorphisme de \mathcal{P} et p un point (*idem* avec D une droite), on a en effet sous cette identification

$$\psi(p^{**}) = \psi(p) = \psi(p)^{**}$$

Si cette ligne paraît mystérieuse, on peut voir les choses plus précisément ainsi : ψ est une application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, qu'on peut transporter grâce à η en $\tilde{\psi} = \eta\psi\eta^{-1} : \mathcal{P}^{**} \rightarrow \mathcal{P}^{**}$. Alors l'équation précédente devient simplement

$$\tilde{\psi}(p^{**}) = \eta\psi\eta^{-1}(p^{**}) = \eta\psi(p) = \psi(p)^{**}$$

3.3.2. Dualité, alignement et concours. — Dans un plan projectif, il n'y a qu'une propriété projective non triviale que peuvent vérifier trois points distincts : être alignés. Si on considère des droites distinctes, on se trouve dans le même genre de situation : elles peuvent être concourantes ou pas, et il n'y a pas grand-chose d'autre à en dire.

5. Comme en algèbre linéaire de dimension finie où un espace vectoriel et son dual sont abstraitement, mais pas canoniquement, isomorphes.

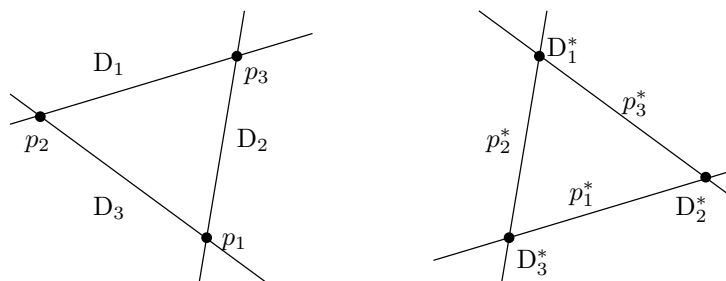


FIGURE 9. Exemple de transformation d'une configuration de points et de droites par dualité : un triangle est envoyé sur un triangle, mais les sommets deviennent des côtés et inversement.

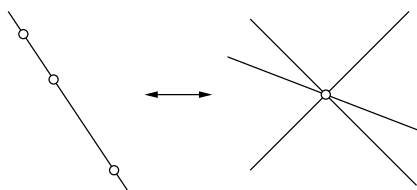


FIGURE 10. La dualité transforme des points alignés en droites concourantes, et inversement

Une propriété remarquable de la dualité est qu'elle échange ces deux situations. Pour le voir, commençons par considérer la relation d'incidence entre points et droites (on dit qu'un point et une droite sont *incidents* si le premier appartient à la seconde).

Proposition 3.14. — Soient p un point et D une droite de \mathcal{P} . Alors $D^* \in p^*$ si et seulement si $p \in D$.

Démonstration. — Supposons $p \in D$. Alors si on écrit $p = P(F)$ et $D = P(G)$, on a $F \subset G$ donc $G' \subset F'$. On obtient bien, en appliquant la projection canonique, $D^* \in p^*$.

Inversement, si $D^* \in p^*$ alors d'après ce qu'on vient de montrer, $p^{**} \in D^{**}$, donc $p \in D$. \square

Corollaire 3.15. — Des points de \mathcal{P} sont alignés si et seulement si leurs droites duales sont concourantes.

Des droites de \mathcal{P} sont concourantes si et seulement si leurs points duaux sont alignés.

Démonstration. — Il suffit bien sûr de montrer le résultat pour trois points et trois droites. Soient $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}$ trois points distincts alignés et D la droite qui les contient. Alors pour tout i , $p_i \in D$ entraîne $D^* \in p_i^*$, donc les droites p_1^*, p_2^*, p_3^* s'intersectent au point D^* .

De même, si D_1, D_2, D_3 sont des droites s'intersectant en un point p , on a $D_i^* \in p^*$ donc leur points duaux sont alignés.

Enfin, les réciproques s'obtiennent par bidualité : par exemple si p_1^*, p_2^*, p_3^* sont concourantes alors on a montré que leur points duaux sont alignés, or ce sont les points p_1, p_2, p_3 . \square

Pour chaque énoncé dont les hypothèses et les conclusions n'impliquent que des alignements de points et de droites, on peut construire un énoncé dual qui sera démontré simplement par dualité. Pour illustrer ce principe, essayons-le sur les « théorèmes classiques » du début du chapitre.

Théorème 3.16 (Pappus dual). — Soient, dans un plan projectif \mathcal{P} , deux points distincts d et d' , A, B, C des droites concourantes en d et A', B', C' des droites concourantes en d' . On suppose qu'aucune de ses six droites ne contient à la fois d et d' .

Notons \mathcal{A} la droite passant par $B \cap C'$ et $B' \cap C$, \mathcal{B} celle qui passe par $A \cap C'$ et $A' \cap C$, et \mathcal{C} celle qui passe par $A \cap B'$ et $A' \cap B$. Alors les droites \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} sont concourantes.

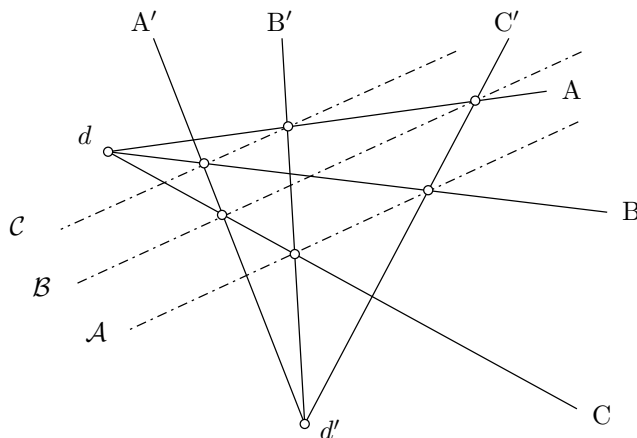


FIGURE 11. Théorème de Pappus dualisé : dans la carte affine choisie pour représenter cet exemple, les droites \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} sont concourantes à l'infini.

Démonstration. — Considérons les objets duaux dans \mathcal{P}^* : d^* et d'^* sont des droites distinctes ; A^* , B^* et C^* sont sur d^* tandis que A'^* , B'^* et C'^* sont sur d'^* ; aucun de ses six points n'est à l'intersection de d^* et d'^* . On peut donc appliquer le théorème de Pappus, qui nous dit que les points $\alpha = (B^*C'^*) \cap (B'^*C^*)$, $\beta = (A^*C'^*) \cap (A'^*C^*)$ et $\gamma = (A^*B'^*) \cap (A'^*B^*)$ sont alignés. Mais on a $\alpha = \mathcal{A}^*$, $\beta = \mathcal{B}^*$ et $\gamma = \mathcal{C}^*$, donc par dualité les droites \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont concourantes. \square

L'énoncé du théorème de Desargues, lui, est autodual, c'est-à-dire équivalent à son énoncé dual. Plus précisément, on peut vérifier que (avec les notations de l'énoncé donné plus haut) connaître l'implication « si les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes alors les points α , γ et β sont alignés » permet de démontrer sa réciproque en passant au dual.

3.4. Dualité par rapport à une conique

3.4.1. Introduction. — Revenons au problème de l'identification de \mathcal{P} avec son dual (voir la discussion qui suit la proposition 3.13). On se heurte en fait au même problème qu'en algèbre linéaire : E et E^* sont isomorphes, mais pas de façon canonique. Le théorème de représentation de Riesz permet de contourner cette difficulté quand on dispose d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ . En effet, on dispose alors d'un isomorphisme privilégié

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto \Phi(x, \cdot) \end{aligned}$$

où $\Phi(x, \cdot)$ désigne la forme linéaire $y \rightarrow \Phi(x, y)$.

Si on utilise f^{-1} pour identifier les éléments de E^* à des éléments de E , alors le dual d'un sous-espace F s'interprète comme l'orthogonal (au sens de Φ) F^\perp . Cette identification n'est pas équivariante par rapport au groupe linéaire, mais elle l'est néanmoins pour le sous-groupe des automorphismes qui laissent Φ invariant. En effet, si h est un automorphisme de E tel que $\Phi(h(x), h(y)) = \Phi(x, y)$ pour tous $x, y \in E$, alors en particulier $h(F^\perp) = h(F)^\perp$. En fait, on peut généraliser aux automorphismes vérifiant $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \Phi(h(x), h(y)) = \lambda \Phi(x, y)$, qu'on qualifie parfois de *conformes*.

Dans le cas projectif, on peut transposer ceci dès que l'espace vectoriel sous-jacent dispose d'une forme quadratique non dégénérée. Il serait peu satisfaisant de se baser sur un objet qui ne « vit » pas dans l'espace projectif, c'est donc une conique projective qui va permettre la dualité, l'une quelconque de ses équations fournissant la forme quadratique. Pour distinguer de la dualité précédemment introduite, on parlera de *polarité*.

Définition 3.17. — Soit C une conique propre du plan $\mathcal{P} = P(E)$.

Soit Q une forme quadratique définissant C , Φ la forme polaire de Q et $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ le projectivé de $x \mapsto \Phi(x, \cdot)$.

$$\mathcal{P} \xrightarrow{-*} \mathcal{P}^* \xleftarrow{\varphi} \mathcal{P}$$

Soient $p = P(F)$ un point et $D = P(G)$ une droite de \mathcal{P} . On appelle *droite polaire* de p par rapport à la conique C la droite projective

$$p^\perp = P(F^\perp) = \varphi^{-1}(p^*)$$

et *pôle* de D par rapport à C le point

$$D^\perp = P(G^\perp) = \varphi^{-1}(D^*)$$

où les orthogonaux sont à entendre au sens de Φ .

On dit de deux points p, p' qu'ils sont *conjugués* par rapport à C si $p' \in p^\perp$.

Vérifions que cette définition est cohérente. Tout d'abord $P(f) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ est un isomorphisme projectif, donc la droite polaire est bien une droite projective, et le pôle est bien un point. De plus, la polarité ne dépend que de C , pas du choix de Q . En effet, si on choisit une autre forme quadratique Q' définissant C , d'après la proposition 3.9 il existe un réel non nul λ tel que $Q' = \lambda Q$. Alors la forme polaire Φ' de Q' vérifie $\Phi' = \lambda \Phi$ donc l'application associée est $f' = \lambda f$. Il s'ensuit enfin que $P(f') = P(f)$.

Notons que la relation « être conjugués » est symétrique, c'est-à-dire que $p' \in p^\perp$ si et seulement si $p \in p'^\perp$, et qu'elle est équivalente au fait que p et p' proviennent de droites vectorielles orthogonales pour Φ .

3.4.2. Quelques propriétés. — On considère C une conique propre du plan projectif \mathcal{P} . Tous les pôles et droites polaires considérés le sont

par rapport à C . On note p^\perp la polaire d'un point p et D^\perp le pôle d'une droite D .

On a tout d'abord les mêmes propriétés que dans la dualité.

Proposition 3.18. — *i. Soit p un point et D une droite de \mathcal{P} . Alors $p \in D$ si et seulement $D^\perp \in p^\perp$.*

ii. La polarité transforme les points alignés en droites concourantes et les droites concourantes en points alignés.

iii. La polarité est involutive, c'est-à-dire qu'un point p est le pôle de sa droite polaire, et qu'une droite D est la droite polaire de son pôle.

Démonstration. — Découle directement des résultats de la section 3.3. \square

Ce qui est nouveau, c'est qu'on peut étudier l'incidence entre un point et sa droite polaire puisqu'ils sont tous les deux dans \mathcal{P} .

Proposition 3.19. — *Soit p un point de \mathcal{P} . On a $p \in p^\perp$ si et seulement si $p \in C$.*

Soit D une droite de \mathcal{P} . On a $D^\perp \in D$ si et seulement si D est tangente à C , et alors D^\perp est le point de tangence.

Rappelons qu'une droite est tangente à C si elle la coupe en exactement un point, appelé point de tangence. Cette proposition montre en particulier qu'une conique a exactement une tangente en chacun de ses points (ce qui est assez rassurant, et peut se voir directement en coordonnées).

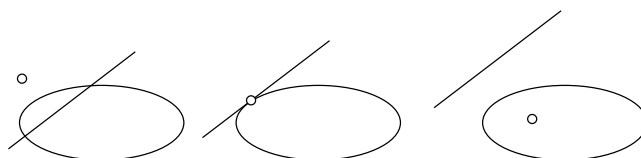


FIGURE 12. Les trois configurations possibles d'un point et d'une droite polaires l'un de l'autre par rapport à une conique propre.

Démonstration. — Reprenons les notations habituelles : Q est une forme quadratique définissant C (donc est non dégénérée), Φ est sa forme polaire et $f : x \mapsto \Phi(x, \cdot)$.

Écrivons $p = \langle u \rangle$; u est un vecteur de E . On a $p \in p^\perp$ si et seulement si $u \in u^\perp$ (où \perp dénote l'orthogonal au sens de Q), c'est-à-dire si et

seulement si u est un vecteur isotrope de Q . Mais cela signifie exactement que $p \in C$.

De plus, dans ce cas montrons que p^\perp intersecte C au seul point p . D'abord $C \cap p^\perp$ contient p . On sait que u^\perp est un plan vectoriel de E , donc si $C \cap p^\perp$ contenait au moins deux points on pourrait trouver $v \in u^\perp$ non colinéaire à u et isotrope. La famille (u, v) serait donc une base de u^\perp vérifiant $\Phi(u, u) = \Phi(v, v) = \Phi(u, v) = 0$. Alors, u^\perp serait un sous-espace isotrope de dimension 2, ce qui est impossible pour une forme de signature $(+, +, -)$ ou $(+, -, -)$.

Maintenant $D^\perp \in D$ est équivalent à $D^\perp \in C$, donc entraîne que D intersecte C au seul point D^\perp . Inversement, supposons que D intersecte C en un seul point $\langle u \rangle$ et notons $D = P(G)$. Alors $u \in G$ est un vecteur isotrope non nul, et on va montrer qu'il est dans G^\perp .

Si ce n'est pas le cas, il existe un vecteur $v \in G$ tel que $\Phi(u, v) \neq 0$, et alors (u, v) est une base de G . Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $Q(u + \alpha v) = 2\alpha\Phi(u, v) + \alpha^2Q(v)$. Comme C ne rencontre D qu'en $\langle u \rangle$, on a $Q(v) \neq 0$. Il existe donc un α non nul tel que $Q(u + \alpha v) = 0$. Mais alors $\langle u + \alpha v \rangle$ est un point d'intersection de C et D distinct de $\langle u \rangle$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

On a donc $u \in G^\perp$, et donc $D^\perp = \langle u \rangle \in D$. □

3.4.3. Une application. — La polarité, tout comme la dualité, permet de démontrer des énoncés duaux de théorèmes connus. Évidemment, la présence d'une conique est nécessaire, et on va démontrer le théorème polaire de celui de Pascal.

Théorème 3.20 (Brianchon). — *Dans un hexagone circonscrit à une conique propre, les trois grandes diagonales sont concourantes.*

Précisons : une conique propre est *inscrite* dans un hexagone $abcdef$ si elle est tangente aux côtés de celui-ci (les droites (ab) , (bc) , (cd) , (de) , (ef) , (fa)). L'hexagone est alors *circonscrit* à la conique. Les grandes diagonales de l'hexagone sont les droites (ad) , (be) et (cf) .

Démonstration. — Considérons donc un hexagone $abcdef$ possédant une conique propre inscrite C . Toutes les polarités considérées le sont par rapport à C . On note $\alpha = (ab)^\perp$, $\beta = (bc)^\perp$, $\gamma = (cd)^\perp$, $\delta = (de)^\perp$,

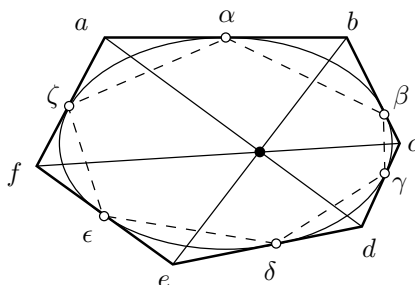


FIGURE 13. Le théorème de Brianchon.

$\varepsilon = (ef)^\perp$ et $\zeta = (fa)^\perp$. D'après la proposition 3.19, ce sont les points d'intersection de C avec les côtés de $abcdef$.

Comme a est l'intersection de (ab) et (fa) , on a $a^\perp = (\zeta\alpha)$, c'est donc un côté de l'hexagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. On a de la même façon $b^\perp = (\alpha\beta)$, $c^\perp = (\beta\gamma)$, $d^\perp = (\gamma\delta)$, $e^\perp = (\delta\varepsilon)$ et $f^\perp = (\varepsilon\zeta)$.

Ainsi, $(\alpha\beta) \cap (\delta\varepsilon) = b^\perp \cap e^\perp = (be)^\perp$ et de la même façon $(\beta\gamma) \cap (\varepsilon\zeta) = (cf)^\perp$ et $(\gamma\delta) \cap (\zeta\alpha) = (ac)^\perp$. En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$, qui est inscrit dans C , on obtient donc que les points $(ad)^\perp$, $(be)^\perp$ et $(cf)^\perp$ sont alignés. Ceci entraîne que les droites (ad) , (be) et (cf) sont concourantes. \square

Exercices

1. \circ — Montrer qu'étant données deux droites distinctes d'un plan projectif, il existe une carte affine telle que les images des droites dans cette carte soient parallèles.

Montrer qu'étant données quatre droites distinctes, il existe une carte affine dans laquelle soit les quatre images des droites sont parallèles, soit trois sont parallèles, soit elles sont divisées en deux groupes de deux droites parallèles.

2. \circ — Parmi les équations de coniques suivantes, lesquelles définissent des coniques propres ? Déterminer le type de celles qui ne le sont pas.

$$\begin{aligned} xy = 0, & & xy + yz = 0, & & xy + yz + xz = 0, \\ x^2 + y^2 = 0, & & x^2 - z^2 = 0, & & x^2 + 4xy - 2xz + 4y^2 - 4yz + z^2 = 0 \end{aligned}$$

Parmi les équations affines suivantes, lesquelles définissent une ellipse, une parabole, une hyperbole ?

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5y^2 - 2xy - 1 &= 0, & -3y^2 + 6xy - 1 &= 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4xy - x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

3. — Montrer qu'une droite et une conique propre ont au plus 2 points d'intersection.

Montrer que deux coniques propres distinctes ont au plus 4 points d'intersection.

Montrer que deux coniques distinctes dont l'une est propre ont au plus 4 points d'intersection.

Donner un exemple de deux coniques ayant plus de 4 points d'intersection.

4. • — Soient L et L' deux droites distinctes du plan projectif $P(E)$ d'équation respective $(\ell = 0)$ et $(\ell' = 0)$ où ℓ et ℓ' sont des formes linéaires sur E . Soient a, b, c des points de L et a', b', c' des points de L' .

Montrer que ℓ et ℓ' sont linéairement indépendantes et en déduire que $\ell\ell'$ est une forme quadratique de rang 2 et de signature $(+0-)$.

Soit k une forme linéaire indépendante de (ℓ, ℓ') telle que la droite qu'elle définit ne passe par aucun des points a, b, c, a', b', c' . Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on considère la conique C_ε d'équation $Q_\varepsilon = \ell\ell' + \varepsilon k^2$. Montrer que C_ε est propre dès que $\varepsilon > 0$, et que $C_0 = L \cup L'$.

Montrer que pour ε assez petit il existe des points $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon, a'_\varepsilon, b'_\varepsilon, c'_\varepsilon$ sur C_ε tels que $a_\varepsilon \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $b_\varepsilon \rightarrow b$, et ainsi de suite.

En appliquant le théorème de Pascal dans C_ε , déduire le théorème de Pappus pour les points a, b, c, a', b', c' .

5. — Soit C une conique propre d'équation $(Q = 0)$ et L une droite d'équation $(\ell = 0)$. Soit ϕ la forme polaire de Q et $a = P(v)$ un point de $P(E)$. On suppose que a est sur C et L .

Montrer que L est tangente à C en a si et seulement si $\phi(v, \cdot)$ est colinéaire à ℓ .

6. — Étant donné une conique propre C du plan \mathcal{P} , on note C^* l'ensemble des droites tangentes à C . Montrer que c'est une conique propre de \mathcal{P}^* .

En déduire qu'étant données 5 droites trois à trois non concourantes, il existe une unique conique propre tangente aux cinq droites.

En déduire qu'étant données 4 droites affines de \mathbb{R}^2 , il existe une unique parabole tangente aux quatre droites.

7. — On considère le plan affine \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique, ainsi que la droite projective \mathbb{RP}^1 identifiée à l'ensemble des directions de droite. Ainsi, une transformation affine de \mathbb{R}^2 agit sur \mathbb{RP}^1 par le projectivité de sa partie linéaire.

Soit σ l'action sur \mathbb{RP}^1 d'une rotation d'angle $\pi/2$. Montrer qu'une transformation affine $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une similitude ou une translation si et seulement si son action sur \mathbb{RP}^1 commute avec σ .

8. — On se donne une droite et trois points distincts a, b, c sur cette droite. On se donne des droites A_1, A_2 issues de a , B_1, B_2 issues de b et C_1, C_2 issues de c . On suppose les sept droites distinctes.

On note $p = A_1 \cap B_1$, $q = B_1 \cap C_1$, $r = C_1 \cap A_2$, $s = A_2 \cap B_2$, $t = B_2 \cap C_2$ et $u = C_2 \cap A_1$. Montrer que les points $(pr) \cap (qs)$, $(rt) \cap (su)$ et $(tq) \cap (up)$ sont alignés.

9. — On identifie via leur équation les coniques de \mathbb{RP}^2 aux points de \mathbb{RP}^5 . Montrer que l'ensemble des coniques passant par quatre points trois à trois non alignés est une droite de \mathbb{RP}^5 . Faire de même pour l'ensemble des coniques passant par trois points non alignés et tangentes en l'un d'eux à une droite donnée. On parle de faisceau de conique, et on peut les classer (voir par exemple le livre de Berger [Ber77]).

Le groupe projectif $\text{PGL}(2; \mathbb{R})$ agit sur les coniques de \mathbb{RP}^2 . Déterminer une action de $\text{PGL}(2; \mathbb{R})$ sur \mathbb{RP}^5 qui soit conjuguée par l'identification à l'action sur les coniques.

Cette action est-elle projective (c'est à dire constituée de transformation projectives)? En déterminer le nombre d'orbites.

CHAPITRE 4

DROITES D'UN PLAN PROJECTIF

Dans tout ce chapitre, on se place sur un plan projectif réel $\mathcal{P} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Nous allons étudier les droites de ce plan plus en détail : comment construire les homographies entre deux droites avec une règle, comment voir l'ensemble des droites passant par un point donné comme une droite projective, comment ses notions s'appliquent à l'étude des coniques.

4.1. Droites du plan et birapport

Commençons par appliquer la proposition 2.12 à la construction du quatrième harmonique d'un triplet de points alignés.

Proposition 4.1. — Soient a, b, a', b' des points du plan \mathcal{P} dont trois ne sont jamais alignés. Soient $c = (ab) \cap (a'b')$, $m = (aa') \cap (bb')$, $n = (ab') \cap (a'b)$ et $d = (mn) \cap (ab)$. Alors les points alignés a, b, c, d sont en division harmonique (voir figure 1).

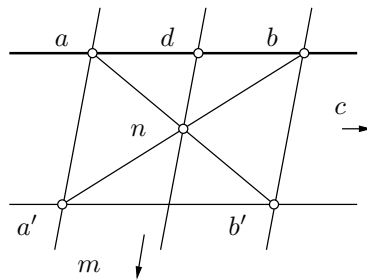


FIGURE 1. Les points a, b, c, d sont en division harmonique.

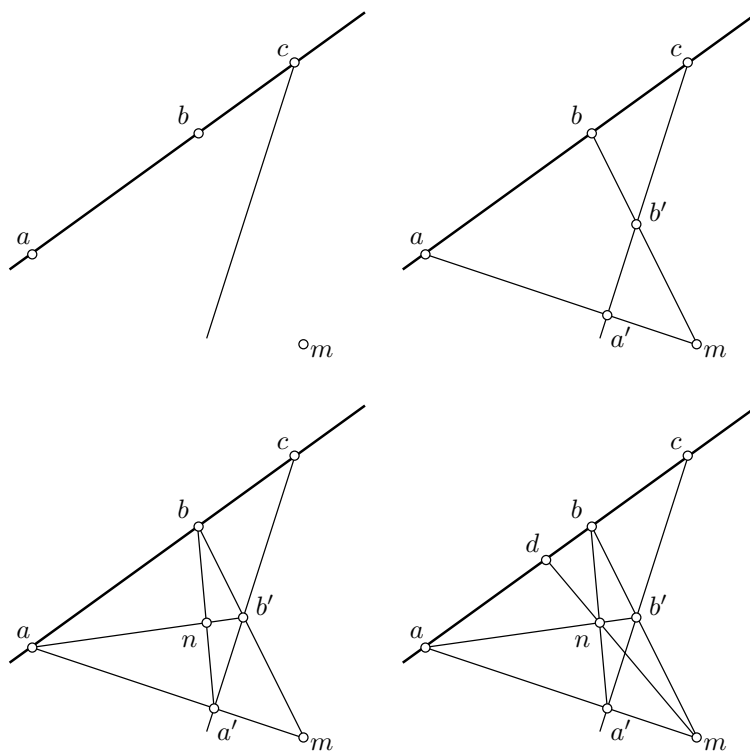


FIGURE 2. Construction du quatrième harmonique d'un triplet aligné.

Démonstration. — En se plaçant dans une carte affine dont la droite à l'infini est (cm) , on transforme $abb'a'$ en parallélogramme. Le point d est alors le milieu du segment $[a, b]$ donc, c étant à l'infini, les points a, b, d, c sont en division harmonique. Comme $[a, b, c, d] = [a, b, d, c]^{-1}$, les points a, b, c, d sont également en division harmonique. \square

Ce résultat permet, étant donnés les points alignés distincts a, b, c , de construire leur quatrième harmonique d . Il suffit en effet de choisir n'importe quel point m hors de (ab) , et n'importe quelle droite différente de (ab) issue de c . On définit alors les points a' et b' comme les intersections de cette dernière avec (am) et (bm) , ce qui permet de construire n et enfin d (voir figure 2).

4.2. Homographies entre droites d'un plan

Il n'y a pas plus de moyen de distinguer un isomorphisme entre deux droites projectives abstraites qu'entre, par exemple, deux espaces vectoriels abstraits. Dans les deux cas, tous les isomorphismes sont équivalents à composition par un automorphisme au but ou à la source. Par contre, quand on considère deux droites d'un même plan, on peut espérer décrire des phénomènes intéressants. Par exemple, on peut distinguer les homographies $A \rightarrow B$ qui fixent le point d'intersection $A \cap B$ de celles qui le déplacent.

4.2.1. Restriction des transformations planes. — La première façon évidente de construire une homographie entre deux droites d'un même plan est d'utiliser une transformation projective du plan lui-même. On les obtient même toutes comme ceci.

Proposition 4.2. — Soient A, B des droites du plan $P(E)$.

Pour toute transformation projective $\varphi \in \text{PGL}(E)$ telle que $\varphi(A) = B$, la restriction $\varphi|_A : A \rightarrow B$ est une homographie.

Inversement toute homographie de A vers B est la restriction d'une transformation projective de $P(E)$.

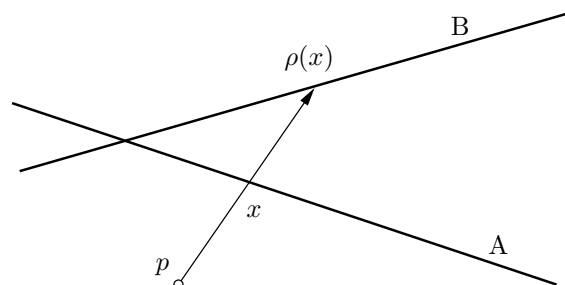
Démonstration. — Il existe un automorphisme linéaire $f : E \rightarrow E$ tel que $\varphi = P(f)$. En notant F et G les plan vectoriels de E tels que $A = P(F)$ et $B = P(G)$, on a $f(F) = G$. Ainsi, $\varphi|_A$ est le projectivé de l'application linéaire $f|_F : F \rightarrow G$.

Inversement, si $\psi : A \rightarrow B$ est une homographie, il existe une application linéaire inversible $g : F \rightarrow G$ telle que $\psi = P(g)$. En choisissant n'importe quels vecteurs $u \in E \setminus F$ et $v \in E \setminus G$, on définit un automorphisme linéaire $f : E \rightarrow E$ par $f(x) = g(x)$ si $x \in F$ et $f(u) = v$. Alors ψ est la restriction de A à B de la transformation projective $P(f)$. \square

4.2.2. Perspectives. — Les perspectives forment un exemple important d'isomorphisme projectif entre deux droites d'un même plan.

Définition 4.3. — Soient A, B des droites de \mathcal{P} et p un point qui n'est ni sur A ni sur B . on appelle *perspective* centrée en p de A vers B l'application $\rho : A \rightarrow B$ qui à tout point $x \in A$ associe $\rho(x) = (px) \cap B$.

Proposition 4.4. — Les perspectives sont des isomorphismes projectifs.

FIGURE 3. Perspective centrée en p de A vers B .

Démonstration. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ une perspective, et p son centre. Plaçons-nous dans une carte affine telle que $A \cap B$ soit sur la droite à l'infini, supposée distincte de A et B .

Dans cette carte, A et B sont parallèles et ρ est simplement la restriction de A à B d'une homothétie. Cette homothétie s'étend à \mathcal{P} entier en une transformation projective φ qui fixe chaque point à l'infini, en particulier le point commun à A et B . Ainsi, ρ est la restriction de φ donc, d'après la proposition 4.2, c'est une homographie. \square

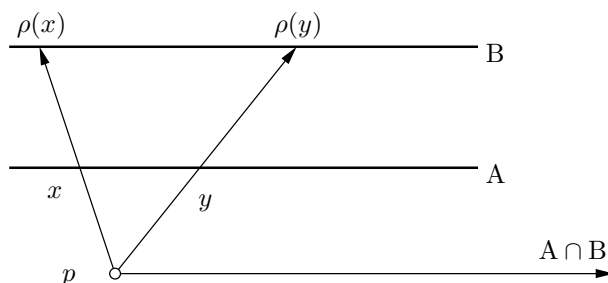


FIGURE 4. Les perspectives sont des homographies

On peut utiliser les perspectives pour donner une autre démonstration du théorème de Pappus.

Démonstration du théorème de Pappus. — En reprenant les notations du théorème 3.1, soient $d = (ab') \cap (a'c)$ et $e = (b'c) \cap (ac')$.

Considérons la perspective ρ_1 centrée en a' de (ab') vers D . Elle envoie (a, γ, d, b') sur (a, b, c, s) .

De même la perspective ρ_2 centrée en c' de D vers $(b'c')$ envoie (a, b, c, s) sur (e, α, c, b') . Ainsi $\rho_2\rho_1$ est un isomorphisme projectif de (ab') sur $(b'c')$ envoyant (a, γ, d, b') sur (e, α, c, b') .

Considérons enfin la perspective ρ centrée en β de (ab') vers $(b'c')$. Elle envoie (a, d, b') sur (e, c, b') , donc coïncide avec $\rho_1\rho_2$ sur ces trois points. Comme c'est une homographie, on a $\rho = \rho_1\rho_2$ et donc $\rho(\gamma) = \alpha$. Comme ρ est centrée en β , les points α, β et γ sont alignés. \square

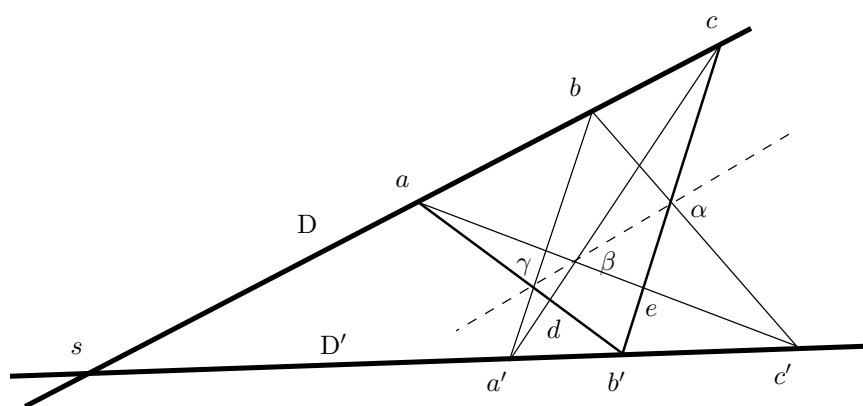


FIGURE 5. Le théorème de Pappus, bis.

4.2.3. Description des homographies entre droites d'un même plan. — Soient A et B des droites distinctes de \mathcal{P} et $\varphi : A \rightarrow B$ une homographie. Comme suggéré plus haut, on va distinguer deux cas, suivant que φ fixe $A \cap B$ ou pas.

Proposition 4.5. — *L'homographie $\varphi : A \rightarrow B$ fixe $A \cap B$ si et seulement si c'est une perspective.*

Dans ce cas, il existe une droite D passant par $A \cap B$, appelée axe de φ , telle que pour tous $x, y \in A$ on ait $(x\varphi(y)) \cap (y\varphi(x)) \in D$.

Démonstration. — Par définition, une perspective entre deux droites fixe leur intersection. Supposons que φ fixe $A \cap B$ et considérons sur A deux autres points distincts x et y . Les droites $(x\varphi(x))$ et $(y\varphi(y))$ se coupent en un point noté p , qui n'est ni sur A ni sur B . Par construction, la perspective de A vers B centrée en p coïncide avec φ sur les points $A \cap B$, x et y , donc ces deux homographies sont égales.

Maintenant, étant donnés trois points x, y, z quelconques de A distincts de son intersection avec B , notons x', y', z' leurs images par φ et appliquons le théorème de Desargues aux triangles $xy'z$ et $x'y'z'$. Comme φ est une perspective, les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes. Le théorème nous assure que les points $(xy') \cap (yx')$, $(zy') \cap (yz')$ et $(xz) \cap (x'z')$ sont alignés. Ce dernier point n'est autre que $A \cap B$, la droite D passant par $A \cap B$ et $(xy') \cap (yx')$ ne dépend donc pas de x , puisqu'elle est ne change pas si l'on remplace x par z . Par symétrie, elle ne dépend pas de y non plus. \square

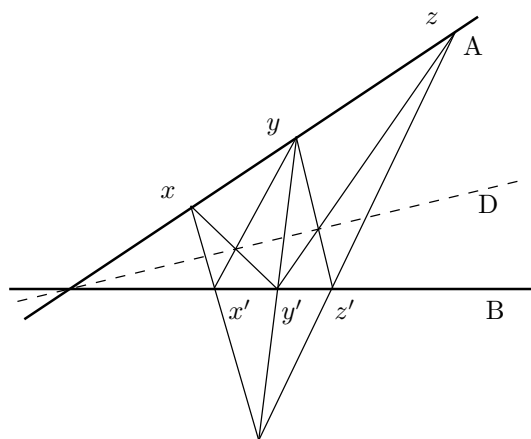


FIGURE 6. Axe d'une perspective

La connaissance de l'axe d'une perspective et de l'image x' d'un point x permet donc de construire celle-ci à la règle : l'image de y est obtenue en construisant l'intersection a de D et $(x'y)$ puis celle B et (ay) , qui est le point cherché. Bien sûr, la connaissance du centre de la perspective permet une construction plus directe. Cette remarque permet toutefois de voir qu'il existe une infinité de perspectives ayant un axe donné, puisqu'on peut choisir l'image d'un point arbitrairement. Cela n'est pas surprenant : une perspective $A \rightarrow B$ est définie par son centre, qui parcourt un plan projectif privé de deux droites (de dimension 2) tandis que l'axe est contraint à passer par $A \cap B$, donc parcourt un ensemble de dimension 1. Enfin, l'axe est une notion qui, contrairement au centre, se généralise à toutes les homographies $A \rightarrow B$.

Proposition 4.6. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ une homographie qui n'est pas une perspective, et soit D la droite joignant $\varphi^{-1}(A \cap B)$ et $\varphi(A \cap B)$. Alors pour tout couple de points x, y de A les droites $(x\varphi(y))$ et $(y\varphi(x))$ se coupent en un point de D , qu'on appelle par conséquent l'axe de φ .

Démonstration. — Notons $a = \varphi^{-1}(A \cap B) \in A$ et $b = \varphi(A \cap B) \in B$. Comme φ n'est pas une perspective, a et b sont distincts de $A \cap B$.

Fixons $x \in A$ distinct de $A \cap B$ et de a et notons x' son image par φ . Soient π_1 la perspective de A sur D centrée en x' et π_2 la perspective de D sur B centrée en x . Alors π_1 envoie $(a, A \cap B, x)$ sur $(a, b, (xx') \cap D)$, lui-même envoyé par π_2 sur $(A \cap B, b, x')$. Les homographies $\pi_2\pi_1$ et φ coïncident donc sur les trois points $a, A \cap B, x$ donc sont égales.

Quel que soit le point $y \in A$ d'image y' , on a $(yx') \cap D = \pi_1(y)$ et $(x'y) \cap D = \pi_2^{-1}(y')$, donc ces deux points coïncident comme voulu. \square

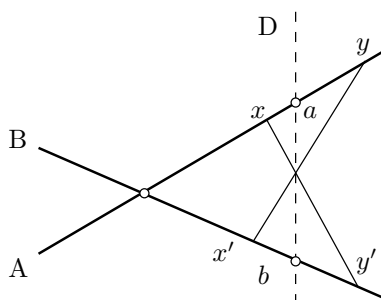


FIGURE 7. Axe d'une homographie

Au passage, on a montré que toute homographie $A \rightarrow B$ pouvait s'écrire comme la composée d'au plus deux perspectives.

4.3. Faisceaux de droites

Étant donné un point $p \in \mathcal{P}$, on peut considérer l'ensemble \mathcal{D}_p des droites passant par p ; on l'appelle le *faisceau de droites* basé en p .

Il est parfois noté p^* , ce qui n'est pas incompatible avec nos notations. En effet, chaque droite $L \in \mathcal{D}_p$ a pour dual un point de la droite duale p^* , et on peut donc identifier naturellement \mathcal{D}_p et p^* . Ceci donne une première « structure de droite projective » sur \mathcal{D}_p . Il est utile, dans les

applications, d'en avoir une autre description : c'est l'objet de ce qui suit. Ce sera aussi l'occasion d'introduire la notion de structure géométrique.

4.3.1. Structure projective sur un faisceau de droites. — Les perspectives permettent de définir, par exemple, le birapport de quatre droites concourantes.

Définition 4.7. — Soient A, B, C, D , quatre droites de \mathcal{P} concourantes en un point p et telles que A, B, C soient distinctes.

On appelle *birapport* de ces droites et on note $[A, B, C, D]$ le birapport des points $A \cap L, B \cap L, C \cap L$ et $D \cap L$ où L est n'importe quelle droite ne passant pas par p .

Cette définition est cohérente : la proposition 4.4 assure que le birapport $[A, B, C, D]$ ne dépend pas du choix de L . En effet, si on choisit une seconde droite L' , les points $A \cap L, B \cap L, C \cap L, D \cap L$ et $A \cap L', B \cap L', C \cap L', D \cap L'$ se correspondent par une perspective, donc ont même birapport.

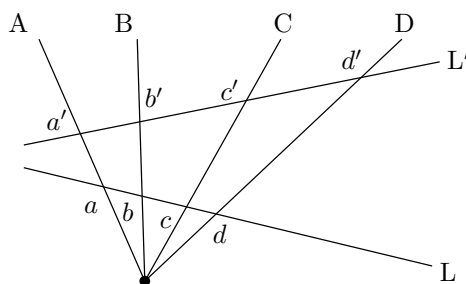


FIGURE 8. Birapport de droites concourantes : $[A, B, C, D]$ vaut $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

On peut aller plus loin, et munir tout faisceau de droites d'une structure de droite projective naturelle.

Détaillons ce que signifie cette expression. En première approximation, pour un ensemble X une structure de droite projective (réelle) est une identification à une droite projective, c'est-à-dire simplement une bijection $\psi : X \rightarrow \mathbb{RP}^1$. En fait, ce n'est pas la bijection elle-même qui nous intéresse, mais les propriétés et grandeurs projectives qu'on obtient sur X (le birapport par exemple).

Définition 4.8. — Soit X un ensemble. Si L est une droite projective réelle et $\psi : X \rightarrow L$ une bijection, on dit que le couple (L, ψ) définit une structure de droite projective réelle sur X . On dit que deux couples (L_1, ψ_1) et (L_0, ψ_0) définissent la même structure si $\psi_1 \psi_0^{-1} : L_0 \rightarrow L_1$ est une homographie. C'est la classe d'équivalence pour cette relation qu'on appelle structure de droite projective réelle sur X .

On aurait pu définir plus généralement ce qu'est une structure d'espace projectif, en n'importe quelle dimension et sur n'importe quel corps, mais on se concentrera sur le cas proposé.

Si X est muni d'une structure de droite projective définie par ψ , on peut parler de ses homographies : ce sont les bijections $\varphi : X \rightarrow X$ telles que $\psi \varphi \psi^{-1} : L \rightarrow L$ soit une homographie. De la même façon, le birapport de quatre points de X est défini par $[x, y, z, w] = [\psi(x), \psi(y), \psi(z), \psi(w)]$, et on peut faire de même avec toute propriété invariante par homographie : deux couples donneront le même résultat tant qu'ils sont équivalents.

Considérons un point $p \in \mathcal{P}$ et le faisceau \mathcal{D}_p des droites projectives de \mathcal{P} passant par p .

Pour chaque droite L de \mathcal{P} ne passant pas par p , on considère la structure de droite projective réelle sur \mathcal{D}_p définie par la bijection $\psi_p^L : \mathcal{D}_p \rightarrow L$ qui à une droite D passant par p associe le point $D \cap L$.

Proposition 4.9. — Toutes les structures de droite projective définies sur \mathcal{D}_p par les bijections ψ_p^L coïncident.

De plus si Φ est une transformation projective de \mathcal{P} et si on note $p' = \Phi(p)$, alors l'application $\tilde{\Phi} : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_{p'}$ qui à D associe $\Phi(D)$ est une homographie (pour les structures projectives décrites).

La deuxième moitié de cette proposition est exactement la raison pour laquelle on qualifie la structure projective obtenue de « naturelle » : les structures projectives définies sur les différents faisceaux sont conjuguées sous l'action du groupe projectif.

Démonstration. — Tout est essentiellement tautologique.

D'abord, si L et L' ne passent pas par p , alors $\psi_p^L (\psi_p^{L'})^{-1}$ est la perspective de centre p de L' vers L , donc c'est une homographie.

Ensuite, soit L une droite ne passant pas par p et notons $L' = \Phi(L)$. On veut montrer que $\tilde{\Phi}$ est une homographie, ce qui revient à considérer l'application $L \rightarrow L'$ qui à $D \cap L$ associe $\Phi(D) \cap L'$ pour toute droite

D passant par p . Mais cette application est exactement la restriction de Φ à $L \rightarrow L'$, car $\Phi(D \cap L) = \Phi(D) \cap \Phi(L)$. C'est donc bien une homographie. \square

On avait signalé que l'on aurait très bien pu définir une structure de droite projective sur \mathcal{D}_p en l'identifiant avec p^* , qui est une droite de \mathcal{P}^* . La proposition suivante montre qu'on aurait obtenu la même structure.

Proposition 4.10. — *Pour toute droite D ne passant pas par p , l'application $D \rightarrow p^*$ qui à un point $a \in D$ associe le point $(ap)^*$ est une homographie.*

Démonstration. — On va choisir des coordonnées sur les droites D et p^* dans lesquelles l'application considérée s'écrira de façon homographique.

Plaçons-nous dans \mathbb{RP}^2 et, quitte à faire agir une transformation projective,⁽¹⁾ supposons que $p = [0 : 0 : 1]$ et que D est la droite d'équation $z = 0$.

Dans le dual de \mathbb{RP}^2 , on utilise les coordonnées homogènes $[x' : y' : z']$ induites par la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Alors D^* a pour coordonnées $[0 : 0 : 1]$ et p^* est la droite d'équation $z' = 0$.

Un point $a = [x_0 : y_0 : 0]$ de D a pour duale la droite a^* d'équation $(x_0x' + y_0y' = 0)$. On a $(ap)^* = a^* \cap p^*$, ce point est donc défini par les équations précédentes, qui ont pour solution évidente $x' = y_0$, $y' = -x_0$, $z' = 0$. Ainsi, l'image de $[x : y : 0]$ a pour coordonnées $[-y : x : 0]$, et l'application considérée est bien une homographie. \square

4.3.2. Homographies entre faisceaux. — Considérons deux points a, b de \mathcal{P} et leurs faisceaux $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b$. Les homographies $\mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ vont, par dualité, se construire à partir des résultats de la section 4.2.3.

Proposition 4.11. — *Soit $\varphi : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ une homographie.*

Si φ fixe l'élément (ab) , alors il existe une droite C telle que pour tout $L \in \mathcal{D}_a$, $\varphi(L)$ soit la droite joignant b à $L \cap C$. On dit alors que φ est une perspective, et dans ce cas il existe un point d de (ab) tel que pour tous les $L, M \in \mathcal{D}_a$ d'images par $\varphi : L', M'$, les points $L \cap M', L' \cap M$ et d soient alignés.

1. la naturalité démontrée dans la proposition 4.9 est ici cruciale.

Si φ ne fixe pas (ab) , soit d l'intersection des droites $\varphi^{-1}(ab) \in \mathcal{D}_a$ et $\varphi(ab) \in \mathcal{D}_b$. Alors pour tous les $L, M \in \mathcal{D}_a$ d'images par $\varphi : L', M'$, les points $L \cap M', L' \cap M$ et d sont alignés.

On appelle parfois d le centre de φ . Remarquons dans le cas où φ est une perspective, que d'après la proposition 4.1 le point d est le quatrième harmonique des points a, b et $(ab) \cap C$.

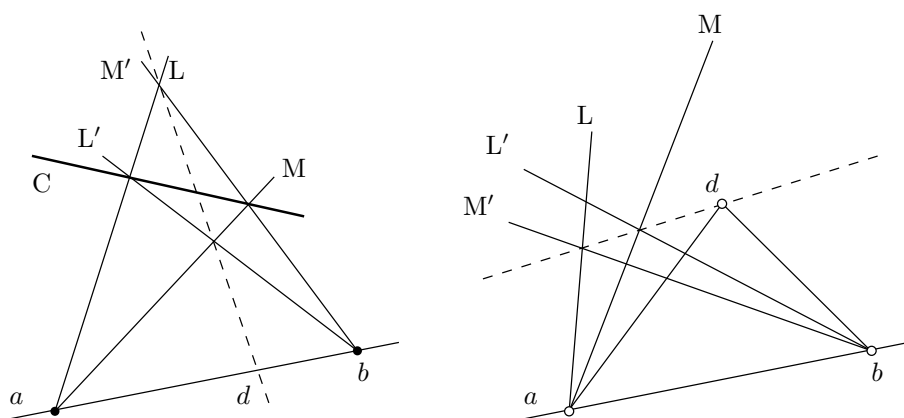


FIGURE 9. Homographies entre deux faisceaux : celle de gauche est une perspective, c'est-à-dire fixe (ab) , pas celle de droite qui envoie (ad) sur (ab) et (ab) sur (bd) .

Démonstration. — D'après la proposition 4.10, l'application $\varphi^* : a^* \rightarrow b^*$ qui au dual L^* d'un élément de \mathcal{D}_a associe $(\varphi(L))^*$ est une homographie. On peut donc lui appliquer les résultats de la section 4.2.3.

Tout d'abord φ fixe (ab) si et seulement si φ^* fixe $(ab)^* = a^* \cap b^*$, donc si et seulement si c'est une perspective.

Dans ce cas, soient c son centre et D son axe. Prendre $C = c^*$ et $d = D^*$ convient.

Dans le cas contraire, φ^* a tout de même un axe D , qui joint $\varphi^{*-1}(a^* \cap b^*)$ et $\varphi^*(a^* \cap b^*)$. Son dual d est donc l'intersection de $\varphi^{-1}(ab)$ et $\varphi(ab)$, et il vérifie la propriété voulue. \square

4.4. Droites et coniques

Le but de cette section est de faire un lien entre faisceaux de droites et coniques, le principal objectif étant d'établir le théorème de Chasles et Steiner et de l'utiliser pour définir une structure de droite projective sur toute conique propre.

4.4.1. Droites et polarité. — Commençons par voir comment la division harmonique permet de déterminer sur une droite les points conjugués par rapport à une conique.

Proposition 4.12. — *Soit C une conique propre et D une droite qui la coupe en deux points distincts a et b . Soient m et m' deux points de D distincts de a et de b . Alors m et m' sont conjugués par rapport à C si et seulement si les points a, b, m, m' de D sont en division harmonique.*

Démonstration. — On écrit $D = P(F)$ et on considère Q la restriction à F d'une forme quadratique définissant C . Dans les coordonnées homogènes définies par le repère (a, b, m) , on a $a = [1 : 0]$, $b = [0 : 1]$ et $m = [1 : 1]$. Notons $m' = [z : 1]$, où par hypothèse $z \neq 0$.

Comme $a, b \in C$, la forme Q doit s'annuler sur $(1, 0)$ et $(0, 1)$ donc s'écrire $Q(x, y) = \lambda xy$. On peut supposer $\lambda = 2$ quitte à multiplier Q par une constante. Sa forme polaire s'écrit alors $\Phi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y$, et on a :

$$\begin{aligned} m \text{ et } m' \text{ sont conjugués} &\Leftrightarrow \Phi((1, 1), (z, 1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow [a, b, m, m'] = [\infty, 0, 1, -1] = -1 \end{aligned}$$

□

On peut combiner cette proposition avec la construction du quatrième harmonique pour en déduire une construction de la droite polaire d'un point par rapport à une conique.

Proposition 4.13. — *Soit m un point et C une conique propre ne passant pas par m . Soient L, M deux droites passant par m et coupant C en deux paires de points tous distincts a, b et c, d . Alors la polaire de m par rapport à C est la droite passant par $(ac) \cap (bd)$ et $(ad) \cap (bc)$.*

Démonstration. — Notons $x = (ac) \cap (bd)$ et $y = (ad) \cap (bc)$. La proposition 4.1 implique que l'intersection de (ab) avec (xy) est le quatrième

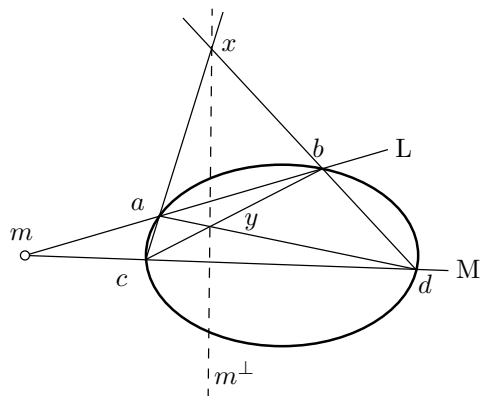


FIGURE 10. Construction de la polaire d'un point par rapport à une conique.

harmonique de a, b, m , donc est conjugué à m par rapport à C . On peut en dire de même pour le point $(ab) \cap (xy)$, donc la droite (xy) est bien la polaire de m . \square

4.4.2. Le théorème de Chasles et Steiner. — Ce théorème a pour objet de munir toute conique d'une structure de droite projective. On va se servir pour cela des structures de droites projectives sur les faisceaux de droites basés en un point de la conique.

Théorème 4.14 (Chasles-Steiner direct). — Soit C une conique propre de \mathcal{P} sur laquelle on considère deux points distincts a et b . Notons d le point polaire de (ab) par rapport à C .

On définit une application $\varphi : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ de la façon suivante : (ad) est envoyée sur (ab) , (ab) sur (bd) et tout autre élément de \mathcal{D}_a , qui s'écrit (ax) pour un certain $x \in C$ différent de a et de b , est envoyé sur (xb) .

L'application φ est alors une homographie.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que d est l'intersection des tangentes à C en a et b . En effet, on a $d = (ab)^\perp = a^\perp \cap b^\perp$.

Soit y un point de C différent de a et de b et soit $\varphi' : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ l'unique homographie envoyant respectivement (ad) , (ab) et (ay) sur (ab) , (bd) , (by) . Par construction, c'est une homographie de centre d donc toute droite (ax) est envoyée sur la droite (bx') où x' est l'intersection de (ay) et de la droite joignant d à $(ax) \cap (by)$. Il nous suffit donc de montrer

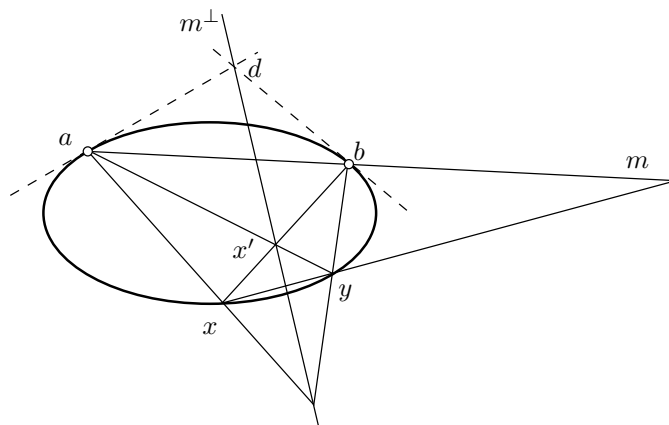


FIGURE 11. Le théorème de Chasles et Steiner, sens direct : la droite (ax) est envoyée sur (bx) .

que $(bx') = (bx)$ pour obtenir $\varphi = \varphi'$, ce qui revient à montrer que $x' = (ay) \cap (bx)$.

Considérons le point $m = (ab) \cap (xy)$. Sa polaire par rapport à C est la droite joignant $(ax) \cap (by)$ et $(ay) \cap (bx)$. Il nous suffit donc de montrer que d est sur m^\perp pour conclure. Or comme $m \in (ab)$, on a $d = (ab)^\perp \in m^\perp$. \square

Théorème 4.15 (Chasles-Steiner, réciproque)

Soient a et b des points distincts et $\varphi : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ une homographie qui ne fixe pas (ab) . Alors quand L parcourt \mathcal{D}_a , le point $L \cap \varphi(L)$ décrit une conique propre C passant par a et b .

De plus, si on note d le centre de φ alors C est tangente à (ad) et (bd) .

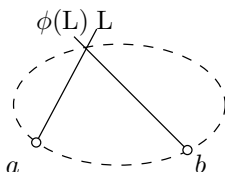


FIGURE 12. Le théorème de Chasles et Steiner, sens réciproque.

Démonstration. — Fixons une droite $M \in \mathcal{D}_a$ différente de (ab) et (ad) et notons M' son image par φ (qui est donc différente de (ab) et (bd)). Soit

C l'unique conique propre passant par a, b et $M \cap M'$ et tangente à (ad) et (bd) . Notons qu'on peut bien appliquer la proposition 3.10, puisque φ ne fixant pas (ab) les points a, b, d ne sont pas alignés.

Soit φ' l'homographie définie par le théorème de Chasles et Steiner direct : elle coïncide avec φ sur (ad) , (ab) et M donc $\varphi = \varphi'$. En particulier, quand L parcourt \mathcal{D}_a , $L \cap \varphi(L)$ décrit C . \square

4.4.3. Structure de droite projective sur une conique. — Soit C une conique propre et a un de ses points. On dispose d'une bijection $\pi_a : \mathcal{D}_a \rightarrow C$ qui à une droite L passant par a associe le deuxième point d'intersection a' de L et C ($a' = a$ si L est tangente à C).

Le théorème de Chasles et Steiner (sens direct) dit exactement que si b est un second point de C , l'application $\pi_b^{-1}\pi_a = \varphi$ est une homographie. On peut donc se servir de π_a pour donner une structure projective à C , qui ne dépendra alors pas du choix de a .

On peut parler d'homographie sur C , de birapport de quatre de ses points, etc. simplement en considérant cette structure de droite projective.

Il est alors légitime et intéressant d'étudier, comme on l'a fait pour les droites, les homographies de C et comment elles se construisent. On renvoie au chapitre 5 de [Sid93].

Pour finir, voici une seconde démonstration du théorème de Pascal (théorème 3.11) qui se base sur la structure de droite projective d'une conique propre.

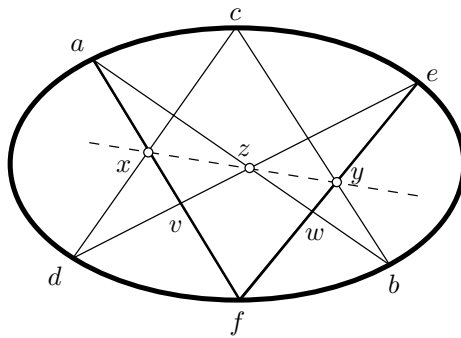


FIGURE 13. Le théorème de Pascal, sens direct

Démonstration du théorème de Pascal. — On considère tout d'abord une conique propre C , six points distincts a, b, c, d, e, f de C , on note $z = (ab) \cap (de)$, $y = (bc) \cap (ef)$ et $x = (cd) \cap (fa)$, et on veut montrer que ces trois points sont alignés. Notons encore $v = (de) \cap (af)$ et $w = (ab) \cap (ef)$.

En considérant les applications naturelles $\pi_d^{-1} : C \rightarrow \mathcal{D}_d$ et $\psi_d^{(af)} : \mathcal{D}_d \rightarrow C$ on obtient l'égalité des birapports $[a, c, e, f] = [a, x, v, f]$ (le premier birapport est calculé sur C , le second sur (af)). De même en projetant C sur (ef) depuis le point b , on trouve que $[a, c, e, f] = [w, y, e, f]$. Il s'ensuit que $[a, v, f, x] = [w, e, f, y]$.

Or la perspective $\rho : (af) \rightarrow (ef)$ de centre z envoie (a, v, f) sur (w, e, f) , donc l'égalité précédente implique $\rho(x) = y$. Par définition du centre d'une perspective, x, y, z sont alignés.

Passons à la réciproque : on suppose que les points a, b, c, d, e, f sont trois à trois non alignés et que x, y, z sont alignés et montrons que la conique propre C passant par a, b, c, d, e passe également par f . Notons f' le deuxième point d'intersection de (af) avec C (si (af) est tangente à C , on définit donc $f' = a$) et f'' le deuxième point d'intersection de (ef) avec C .

Soient $x'' = (cd) \cap (f''a)$ et $y' = (bc) \cap (ef')$: d'après la partie directe, x'', y, z sont alignés et x, y', z également. Comme on a supposé x, y, z alignés, cela signifie que les cinq points x, x'', y, y', z sont sur une même droite. En particulier, si x'' était différent de x on aurait $(xyz) = (cd)$ ce qui est absurde : c, d, e seraient alignés. De $x = x''$ on déduit $f' = f''$, ce qui montre que f est sur C . \square

Exercices

1. — Montrer qu'étant donnés quatre points ordonnés, trois à trois non-alignés, il existe une unique conique passant par ces quatre points et telle qu'ils y soient en division harmonique.

2. — Soit A une droite et $\varphi : A \rightarrow A$ une homographie. À quelle condition existe-t-il une droite B et deux points p, q tels que φ soit la composée des perspectives $A \rightarrow B$ de centre p et $B \rightarrow A$ de centre q ?

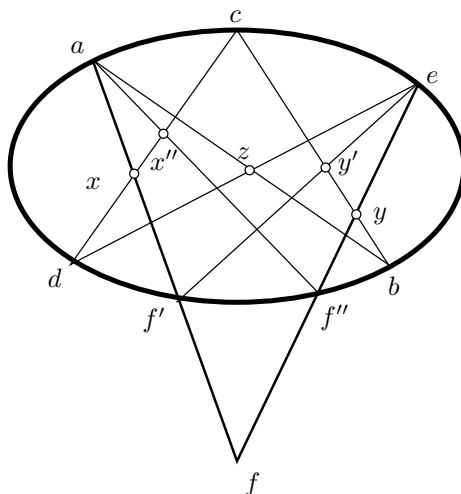


FIGURE 14. Le théorème de Pascal, sens réciproque

3. — Soient A, B des droites distinctes et p, q des points distincts hors de A et B . Déterminer les points fixes de la composée des perspectives $\rho : A \rightarrow B$ de centre p et $\rho' : B \rightarrow A$ de centre q .

Soit C une troisième droite ne passant pas par q . À quelle condition la composée de ρ avec la perspective $\rho'' : B \rightarrow C$ de centre q est-elle une perspective? Quel est alors son centre?

4. — On considère deux droites distinctes A, B d'un plan projectif réel \mathcal{P}

Montrer que pour toute homographie $\varphi : A \rightarrow B$ qui ne fixe pas $A \cap B$, il existe une conique propre qui est tangente à toutes les droites $(p\varphi(p))$ quand p parcourt A .

Montrer que si C est une conique propre tangente à A et B , l'application qui à $p \in A$ associe le point d'intersection de B avec la droite issue de p qui est tangente à C et différente de A est une homographie.

5. • — Montrer que toute homographie d'une conique propre $C \subset \mathcal{P}$ se prolonge de façon unique en une transformation projective de \mathcal{P} .

Dans le cas où l'homographie a deux points fixes, montrer que la transformation projective en a un troisième.

6. • — Montrer que toute homographie non triviale φ d'une conique C possède un axe D tel que $(x\varphi(y)) \cap (y\varphi(x)) \in D$ pour tous $x, y \in C$. Déterminer la position relative de C et de D en fonction de la nature de l'homographie.

7. — Soit $C \subset \mathcal{P}$ une conique propre et p un point qui n'est pas sur C . Pour tout $q \in C$, on note $\varphi(q)$ l'autre point de (pq) qui est sur C (si (pq) est tangente à C , on convient naturellement que $\varphi(q) = q$). Montrer que l'application $\varphi : C \rightarrow C$ ainsi définie est une homographie involutive.

Déterminer le nombre de points fixes de φ en fonction de la position relative de p et C .

Montrer que toute involution de C est de ce type (c'est-à-dire que les droites $(q\varphi(q))$, où q parcourt C , sont concourantes dès que φ est une involution de C).

8. — On considère une ellipse C du plan affine \mathbb{R}^2 . On définit deux transformations de C de la façon suivante : la première associe à un point x le point $\sigma_1(x)$ de C qui est sur la même droite verticale que x , la seconde lui associe le point $\sigma_2(x) \in C$ qui est sur la même droite horizontale.

Soit $f = \sigma_2\sigma_1 : C \rightarrow C$. Montrer que soit f est périodique, soit toutes ses orbites sont denses dans C .

9. • — On se donne trois points non alignés et pour chacun, une droite le contenant. À quelle condition existe-t-il une conique propre passant par les trois points donnés et tangente en chacun à la droite donnée ?

INDICATIONS POUR LES EXERCICES

Chapitre 1

3. — Montrer par récurrence que $\dim(\cap_{i=1}^k H_i) \geq n - k$.

5. — Il suffit de montrer que (v_0, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^3 puis de trouver des scalaires a, b, c tels que $av_0 + bv_1 + cv_2 = v_3$.

6. — Pour dénombrer les points de $\mathbb{F}_q P^n$, on peut l'écrire comme un quotient, ce qui donne $(q^{n+1}-1)/(q-1)$, ou utiliser la décomposition en un domaine de carte affine et un hyperplan ce qui donne $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$.

Pour dénombrer les droites, on peut compter le nombre de paires de points de $\mathbb{F}_q P^n$ et le nombre de paire de points d'une droite. On montre ainsi qu'il y a

$$\frac{(q^{n+1} - 1)(q^n - 1)}{(q - 1)^2(q + 1)}$$

droites dans cet espace projectif.

Pour dénombrer les repères, le plus simple est peut-être de dénombrer les bases de \mathbb{F}_q^{n+1} puis de compter le nombre de bases adaptées à un repère fixé. On obtient

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^2 - 1).$$

7. — On peut bien sûr faire les calculs dans des coordonnées adaptées, mais il est encore plus simple de montrer que φ fixe chaque point de

$P(F)$ si et seulement si $\Psi\varphi\Psi^{-1}$ envoie toute droite affine sur une droite parallèle.

8. — L'exercice est déjà très guidé, indiquons simplement que

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

est le nombre de monômes en X, Y de degré au plus d . Une façon classique de le voir facilement est de coder le monôme X^kY^ℓ par un schéma fait de k étoiles $*$, puis une délimitation $|$, puis ℓ étoiles, puis une délimitation, puis $d-k-\ell$ étoiles. Par exemple, pour $d=4$ le schéma $**|*|*$ représente X^2Y . Alors le nombre de schémas possibles est $\binom{d+2}{2}$ et les schémas sont en bijection avec les monômes.

Chapitre 2

4. — Pour chaque permutation, considérer l'homographie coïncidant avec la permutation en trois points.

5. — Vectorialiser le plan en a et montrer qu'il en existe une base (b_0, b_1) telle que b_0 engendre B , b_1 engendre B' et $b_0 + b_1$ engendre A . Déterminer alors les coordonnées homogènes des quatre droites et conclure.

6. — Si les calculs semblent trop compliqués, penser à se ramener au cas où le déterminant de M est 1 et utiliser l'expression correspondante pour évacuer autant que possible les coefficients non diagonaux de M dans l'expression de M^2 et M^3 .

7. — Commencer par se ramener à l'involution sans point fixe classique

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, suivant le goût, mener le calcul directement ou montrer que si $\varphi = [M]$ commute avec σ , alors M préserve l'orthogonalité.

8. — Le plus simple est ici de reprendre la démonstration du théorème 2.23 dans le cas où le déterminant est négatif.

Chapitre 3

1. — Il suffit d'envoyer des points bien choisis à l'infini pour obtenir des cartes affines convenables.

2. — Pour la première partie, il suffit de déterminer la signature de la forme quadratique. Pour la seconde, le plus simple est d'homogénéiser et de compter le nombre de points à l'infini, ce qui revient à calculer le discriminant de la partie de degré 2 de l'équation.

3. — Si une droite intersecte une conique en trois points, on peut trouver des coordonnées dans lesquelles ces points s'écrivent $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[1 : 1 : 0]$. En considérant les contraintes sur une équation de conique qu'implique de passer par ces points, on en déduit facilement que la conique est dégénérée. Le théorème 3.8 implique directement la deuxième partie. Enfin, deux coniques dégénérées peuvent avoir une droite en commun.

4. — Pour construire les points $a_\varepsilon, b_\varepsilon, \dots$, on peut par exemple considérer l'intersection de C_ε avec des droites passant par a, b, \dots ou utiliser le théorème des fonctions implicites.

Pour conclure l'exercice, appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone $a_\varepsilon b'_\varepsilon c_\varepsilon a'_\varepsilon b_\varepsilon c'_\varepsilon$.

5. — Il suffit d'utiliser la polarité.

6. — La polarité par rapport à C donne un isomorphisme $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ qui envoie C sur C^* , donc cette dernière est une conique propre.

Les points duaux des 5 droites sont contenus sur une conique propre du plan dual. Il ne reste qu'à vérifier que l'ensemble des points dont les droites duales sont tangente à cette conique répond à la question.

7. — Cet exercice est en fait presque identique à l'exercice 7 du chapitre 2.

8. — Appliquer le théorème de Pascal à $prqstu$ puis à $prtqsu$.

9. — Se référer aux démonstrations du théorème 3.8 et de la proposition 3.7 devrait suffire à résoudre cet exercice.

Chapitre 4

1. — Notons (p_0, p_1, p_2, p_3) les points et D la droite passant par p_0 telle que $(p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), D$ soient en division harmonique dans \mathcal{D}_{p_0} . Alors une conique satisfaisant à la propriété cherchée doit passer par les quatre points et être tangente à D .

2. — Si φ est la composée de deux perspectives, alors elle doit fixer le point d'intersection avec la droite B . Pour montrer que cette condition est nécessaire, il suffit de choisir une droite B passant par un point fixe et de construire deux perspectives $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ dont la composition coïncide avec φ en deux autres points.

3. — Tout l'exercice repose sur le fait qu'une perspective entre deux droites fixe leur point d'intersection.

Si $\rho''\rho$ est une perspective, son centre est l'intersection des droites joignant $A \cap B$ à q et $B \cap C$ à p (considérer les images de $A \cap B$ et $\rho^{-1}(B \cap C)$).

4. — L'énoncé est dual au théorème de Chasles et Steiner.

5. — On peut considérer un repère (p_0, p_1, p_2, p_3) de \mathcal{P} dont tous les points sont sur C et définir $\tilde{\varphi}$ comme l'unique transformation projective de \mathcal{P} qui coïncide avec φ sur ce repère. C'est clairement la seule candidate au prolongement de φ .

Il est alors possible de montrer que

$$[(p'_0p'_1), (p'_0p'_2), (p'_0p'_3), (p'_0q')] = [(p'_0p'_1), (p'_0p'_2), (p'_0p'_3), (p'_0\tilde{\varphi}(q))]$$

où les $'$ désignent les images des points par φ et les birapports sont calculés sur $\mathcal{D}_{p'_0}$. Il s'ensuit que $(p'_0q') = (p'_0\tilde{\varphi}(q))$, et par symétrie on a le même résultat avec p_1 à la place de p_0 . On obtient ainsi que $\tilde{\varphi}$ coïncide avec φ sur C .

Si φ a deux points fixes, leurs tangentes sont globalement préservées par $\tilde{\varphi}$ qui doit donc fixer leur intersection.

6. — On veut montrer que pour tous points $x, y, z \in C$ d'images x', y', z' , les points $(xy') \cap (x'y)$, $(xz') \cap (x'z)$ et $(yz') \cap (y'z)$ sont alignés.

Le théorème de Pascal appliqué au bon hexagone donne immédiatement cette propriété.

7. — On peut utiliser l'exercice précédent et la construction de la polaire d'un point pour montrer qu'étant donnés deux points $x, y \in C$ l'unique homographie involutive coïncidant avec φ sur ces deux points a pour axe la polaire p^\perp de p , et en déduire qu'elle coïncide avec p .

On peut aussi trouver une carte affine dans laquelle C est le cercle ($x^2 + y^2 = 1$) et p est soit à l'infini, soit le centre du cercle. Il est alors facile de montrer que φ est la restriction d'une symétrie axiale ou ponctuelle.

8. — Une fois qu'on s'est rendu compte que σ_1 et σ_2 sont des homographies involutives, il est facile de montrer que f est une homographie de déterminant positif et sans point fixe. Elle est donc conjuguée à une rotation E^θ .

9. — Tout d'abord, le théorème de Pascal permet de deviner la condition : que les points d'intersection d'un côté du triangle et de la droite associée au sommet opposé à ce côté soient alignés.

Ensuite, pour obtenir une démonstration on peut se ramener au cas où la conique passant par les trois points et tangente à deux des droites est le cercle unité de \mathbb{R}^2 , et où les trois points forment un triangle équilatéral. Dans cette configuration le résultat est clair, et la condition donnée est invariante par transformation affine.

BIBLIOGRAPHIE

- [Aud06] M. AUDIN – *Géométrie*, Enseignement SUP–Mathématiques, EDP-sciences, 2006.
- [Ber77] M. BERGER – *Géométrie. Vol. 1*, CEDIC, Paris, 1977, Actions de groupes, espaces affines et projectifs. [Actions of groups, affine and projective spaces].
- [Jor72] C. JORDAN – « Recherches sur les substitutions », *J. Math. Pures Appl. (2)* **17** (1872), p. 351–367.
- [Sam86] P. SAMUEL – *Géométrie projective*, Mathématiques, Presses universitaires de France, 1986.
- [Sid93] J.-C. SIDLER – *Géométrie projective*, InterEditions, 1993.

INDEX

- Alignement, 4
- Application projective, 8
- Automorphisme, 8
- Automorphismes conformes, 82
- Axe d'une homographie, 93, 95
- Base adaptée, 13
- Birapport, 33
 - de droites concourantes, 96
- Carte affine, 18, 25, 31
- Centre d'une homographie, 99
- Cercle, 47
- Complété, 19
- Conique, 66
 - Non dégénérée, 67
 - propre, 68
- Coordonnées homogènes, 11, 23, 31
- Dimension, 1
- Division harmonique, 36
- Domaine d'une carte affine, 18, 25
- Droite à l'infini, 59
- Droite duale, 77
- Droite polaire, 83
- Droite projective, 2, 4, 23, 30
 - structure de, 97
- Dualité, 77
- Espace projectif, 1
- Faisceau de droites, 95
- Groupe projectif, 9, 26
- Hexagone, 75
 - circonscrit à une conique, 85
 - inscrit dans une conique, 75
- Homographie, 8, 26, 31
 - elliptique, 44, 51
 - hyperbolique, 44, 52
 - involutive, 37
 - parabolique, 44, 51
- Incidence, 79
- Infini, 24
- Involution, 37
- Isomorphisme, 9, 31
- Perspective, 91, 99
- Plan projectif, 2
- Point dual, 77
- Points cocycliques, 47
- Points conjugués par rapport à une conique, 83
- Polarité, 82
- Pôle, 83
- Projection canonique, 2
- Projectivé
 - d'un espace vectoriel, 1
- Propriété projective, 36
- Quatrième harmonique, 36
- Repère canonique, 30
- Repère projectif, 13, 30, 31
- Sous-espace projectif, 4
 - engendré, 6
- Tangente à une conique, 74

Théorème de Brianchon, 85
Théorème de Chasles-Steiner, 101, 102
Théorème de Desargues, 61
Théorème de Miquel, 50

Théorème de Pappus, 60, 92
Théorème de Pappus Dual, 81
Théorème de Pascal, 54, 74, 103
Transformation projective, 8, 31

TABLE DES MATIÈRES

Préface	v
1. Premières définitions	1
1.1. Espaces et sous-espaces projectifs.....	1
1.2. Transformations projectives.....	7
1.3. Repères projectifs.....	11
1.4. Cartes affines.....	16
Exercices.....	20
2. La droite projective	23
2.1. Présentation.....	23
2.2. Homographies.....	25
2.3. Birapport.....	32
2.4. Involutions.....	37
2.5. La droite réelle.....	40
2.6. La droite complexe.....	45
Exercices.....	55
3. Le plan projectif réel	57
3.1. Théorèmes projectifs classiques.....	58
3.2. Coniques.....	62
3.3. Dualité projective.....	74
3.4. Dualité par rapport à une conique.....	79
Exercices.....	83
4. Droites d'un plan projectif	87
4.1. Droites du plan et birapport.....	87

4.2. Homographies entre droites d'un plan.....	89
4.3. Faisceaux de droites.....	93
4.4. Droites et coniques.....	98
Exercices.....	102
Indications pour les exercices.....	105
Chapitre 1.....	105
Chapitre 2.....	106
Chapitre 3.....	107
Chapitre 4.....	108
Bibliographie.....	111
Index.....	113