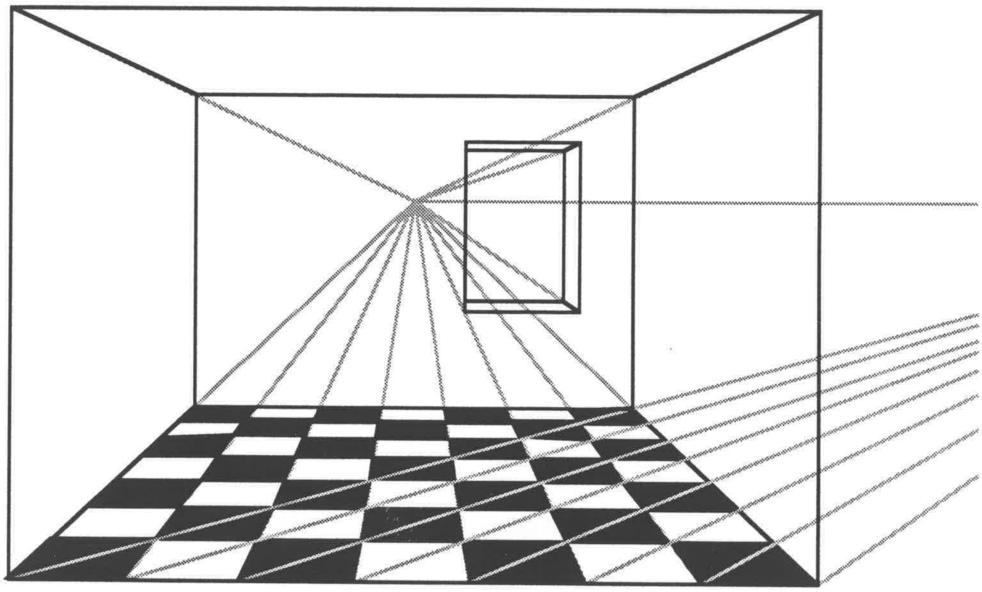
IREM des Pays de la Loire
Centrre de Nantes

UNIVERSITE DE NANTES

Compléments de géométrie 2

Géométrie projective



B. Truffault

Compléments de géométrie 2

Géométrie projective

Sommaire

Chapitre I. Les points à l'infini

Chapitre II. Géométrie projective des droites

Chapitre III. Les espaces projectifs

Chapitre IV. Le plan projectif

Chapitre V. Géométrie projective des coniques

Guide de travail

Avertissement

Disposer d'un minimum de connaissances et de pratique en géométrie projective est irremplaçable pour avoir une vision synthétique de la géométrie – dite – élémentaire. En outre, c'est une condition indispensable pour regarder ce sujet d'un point vue quelque peu moderne ([1]). Nous entendons par là toutes autres choses que le recours à la logomachie ensembliste, la fuite éperdue dans l'abstraction et la théorisation à outrance de notions parfois évidentes, voire vides. Il s'agit de la faculté de classer les figures et leurs propriétés en fonction de leur nature : métrique, affine, projective et l'on pourrait continuer par topologique, différentielle ou autre. Ce qui met en œuvre des critères d'invariance sous l'action de divers groupes de transformations. Ce point de vue permet des rapprochements dont les résultats sont parfois spectaculaires et, n'ayons pas peur des mots, esthétiquement beaux. Il va sans dire que notre ambition n'est pas d'épuiser ce programme mais, plus modestement, de donner au lecteur qui voudra bien nous suivre, l'occasion d'accomplir quelques pas dans cette voie et l'envie d'aller un peu plus loin.

Nous avons pris le parti de conserver, durant deux chapitres, le point de vue qui était le nôtre dans le fascicule "Géométrie élémentaire", ce qui permet de traiter des applications significatives, constitutant un ensemble cohérent, sans recourir à un arsenal théorique élégant et subtile mais dont la mise en œuvre peut, si l'on n'y prend garde, s'opérer dans l'absence de sens la plus totale.

Un dernier mot, dans la rédaction de ce cours, on s'est efforcé d'être clair, certes, mais sans chercher à édulcorer le sujet. La géométrie est, aussi, une discipline de l'esprit qui demande un engagement intellectuel certain. Qu'on nous fasse crédit un moment si nous annonçons, par avance et avec un soupçon de suffisance, que le l'effort demandé en vaut la peine.

Octobre 1993

Additif à la présente édition

Ce petit fascicule est le retirage, dans sa forme originelle, d'un document conçu pour un enseignement de licence à distance, à destination d'un public d'enseignants, en formation continue dont l'agrégation n'était pas un objectif désigné. Le choix de réduire, autant que faire se peut, la partie purement algébrique résulte d'un parti pris systématique, peu conforme aux traditions françaises en la matière. Qu'il soit bien clair que l'objectif est ici de proposer une introduction à la géométrie projective du plan usuel, sous une forme quantativement comparable à un enseignement semestriel raisonnable. Il ne s'agit donc de toute autre chose que l'esquisse plus ou moins tronquée d'un traité de géométrie projective.

Mai 1999

---

1 La docrine en la matière est formulée dans le "programme d'Erlangen" de Felix Klein. Datant de 1872, elle prévaut encore aujourd'hui.

Chapitre I. Les points à l'infini

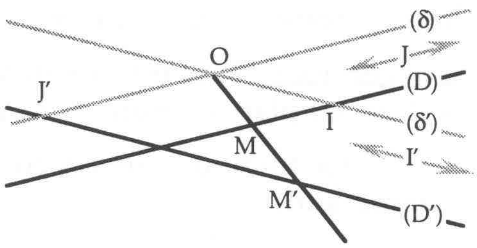
§1. Les points à l'infini : une facilité en termes d'incidence

Pour l'instant, ne nous préoccupons pas des questions formelles, Elles seront réglées, de façon explicite – mais en leur temps. La priorité est de mettre en place les éléments constitutifs de la géométrie projective sous une forme qui soit directement manipulable et nous permette d'accéder directement aux applications les plus courantes.

Provisoirement tout se passe dans l'espace de la géométrie usuelle.

*** Perspective entre droites – points à l'infini**

Dans un plan donné, on considère deux droites sécantes D, D′ et un point O qui n'est situé sur aucune d'elles. Soit M un point quelconque de D, on convient de noter M′ le point de D′, s'il existe, qui est aligné avec O et M. Il est immédiat que la correspondance $M \mapsto M'$ définit une application bijective :



$$p : D - \{I\} \longrightarrow D - \{J'\}$$

où I (respectivement J′) désigne le point commun à D (respectivement à D′) et la parallèle à D′ (respectivement à D) passant par O.

Il semble naturel de lever ces restricitions en décidant d'adjoindre à D un élément I et à D′ un élément J′ et de convenir que :

$$p(I') = I \text{ et } p(J) = J'.$$

Ainsi, on dispose d'une application bijective :

$$\begin{array}{cccc} p : & D \cup \{J\} & \longrightarrow & D' \cup \{I'\} \\ & M & \mapsto & M' \end{array}$$

qu'on appelle *perspective* ([1]).

Si l'on remplace D ou D′ par une droite parallèle, le point J′ ou I, situé sur l'autre reste inchangé. Ce qui conduit à considérer que J est commun à toutes les droites parallèles à D de même que I′ est commun à toutes les droites parallèles à D′.

---

1 C'est, exprimé en d'autres termes, le parti qui s'imposa aux peintres italiens de la renaissance quand il découvrirent qu'ils étaient en mesure de représenter des personnages dans un environnement réaliste – d'abord architectural puis, progressivement, la maîtrise aidant, qui s'ouvrit sur l'extérieur. La perspective resta le domaine exclusif des peintres et des architectes pendant plus de deux sciècles. Desargues, certes, a inscrit son nom au Panthéon des Théorèmes, en fait il était architecte. La perspective devient une question de géomètres patentés avec Lambert aux alentours de 1760. Ce n'est qu'au cours de la première moitié du XIXe sciècle que la géométrie projective acquiert progressivement son statut théorique – au sein des mathématiques – qui prend sa forme définitive avec la publication, en 1847, de "Geometrie der Lage", du mathématicien allemand Von Staudt.

*** Plan de l'infini – droites de l'infini**

Considérons un plan P, on convient que les points ainsi adjoints à P constituent une droite, appelée *la droite de l'infini* de P. Le bénéfice est immédiat car les règles d'incidence s'énoncent désormais :

- par deux points distincts de P il passe une droite, et une seule ;
- deux droites distinctes de P ont en commun un point, et un seul.

Les droites et les points jouent alors des rôles parfaitement symétriques.

Nous convenons, de plus, que les points à l'infini forment un plan. Ainsi, étant donnés deux plans distincts, P et P' :

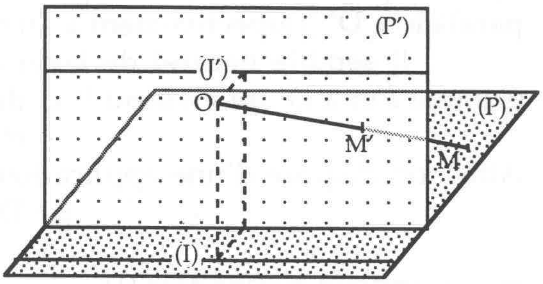
- ou bien ils ont un point commun à distance finie et ils se coupent suivant une droite classique ;
- ou bien ils sont parallèles, ils coupent le plan de l'infini suivant une même droite, ils ont alors la même droite de l'infini.

En résumé, l'espace est complété du plan à l'infini. Tout plan se complète d'une droite – sa *droite de l'infini* – qui est son intersection avec le plan de l'infini, Toute droite D rencontre le plan de l'infini en un point – son *point à l'infini* .

<u>Conventions</u> : si D est une droite, il est commode de noter ∞_D son point à l'infini et si P est un plan, on note ∞_P sa droite de l'infini.

Ce point de vue est cohérent car il permet d'étendre la notion de perspective comme suit.

*** Perspectives entre plans**



Étant donnés deux plan P, P' et un point O n'appartenent à aucun d'eux, soit M un point quelconque de P, on convient de noter M' le point de P', s'il existe, qui est aligné avec O et M. La correspondance :

$$M \mapsto M'$$

est, au départ, une application bijective :

$$P - I \longrightarrow P' - J'$$

où I (respectivement J') désigne la droite commune à de P (respectivement à D') et au plan parallèle à P' (respectivement à P) passant par O. Avec les conventions posées, elle s'étend à une bijection :

$$\begin{array}{rccc} p: & P \cup \infty_P & \longrightarrow & P' \cup \infty_{P'} \\ & M & \mapsto & M' \end{array}$$

qu'on appelle aussi *perspective* .

On notera que si N' est un point de I' les images des droites de P qui sont parallèles à (OI') passent toutes par N'. Ce point apparaît bien comme l'image de leur point à l'infini commun.

<u>Convention</u> : on appelle *espace projectif* l'espace usuel ainsi complété. On parlera de même du *plan projectif* ou de la *droite projective.*

§ 2. Statut analytique des points à l'infini d'un plan affine

Restreignons nos préoccupations au plan, car il sera le cadre de l'essentiel des applications que nous aurons à traiter.

*** Coordonnées homogènes**

Considérons le plan affine usuel, rapporté à un repère $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Nous savons que :

- tout point M, de P, est affecté d'un jeu de coordonnées (x, y),
- toute droite D, de P, est bien définie par la donnée d'une équation
  (1) $$ux + vy + w = 0$$
  on sait aussi que deux telles équations définissent une même droite si, et seulement si, leurs coefficients sont proportionnels.

L'équation (1) est équivalente à la conjonction des conditions suivantes :

$$\begin{cases} uX + vY + wZ = 0 \\ Z \neq 0 \\ x = \dfrac{X}{Z}\ ,\ y = \dfrac{Y}{Z} \end{cases} \quad \text{où } (X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3.$$

Comme le remplacement de X, Y et Z par des nombres proportionnels donne une condition équivalente, on admet que (X, Y, Z) est défini à un scalaire multiplicatif, **non nul**, près. On dit alors que ces nombres constituent un *système coordonnées homogènes* de M – où plus simplement, sont des coordonnées homogènes de M.

Comme, au départ, u et v ne sont pas simultanément nuls, on peu supposer $u \neq 0$, les coordonnées homogènes d'un point de D s'expriment :

$$X = -\frac{vY + wZ}{u}\ ,\ Y\ ,\ Z \text{ où } (Y, Z) \in \mathbf{R}^2$$

ou encore :

$$X = -vY - wZ\ ,\ uY\ ,\ uZ \text{ où } (Y, Z) \in \mathbf{R}^2.$$

Si Z tend vers 0, (X, Y, Z) tend vers $(-vY, uY, 0)$. On note que le sytème obtenu équivalent à :

$$(-v, u, 0)$$

et que cette limite caractérise la direction de D. Dans ces conditions, il devient naturel de poser les conventions qui suivent.

- On lève la restricition $Z \neq 0$, on la remplace par la condition :
  $$(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0),$$
  $(-v, u, 0)$ représente alors les coordonnées homogènes du point à l'infini, commun aux droites parallèles à D – leur direction commune est engendrée par le vecteur $-v\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j}$
- Les points à l'infini sont alors caractérisés par la condition $Z = 0$. On remplace la restricition $(u, v) \neq (0, 0)$ par $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$. Ainsi $Z = 0$ devient l'équation de la droite de l'infini de P.

<u>Conclusion</u> : les points à l'infini restent une vue de l'esprit, certes, mais il est désormais possible de les appréhender algébriquement et non plus seulement par leurs images en perspective.

*** Extension des application affines**

Dans les conditions ci-dessus, considérons une tranformation affine f de P, elle s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

où $ad - bc \neq 0$. Cette relation est aussi bien décrite par l'expression :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a_0 \\ c & d & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'introduction des coordonnées homogènes lui donne la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a_0 \\ c & d & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix}$$

où la matrice est désormais définie à un scalaire multiplicatif, **non nul**, près. On note que cette application laisse stable la droite de l'infini, l'application induite s'exprimant par la relation :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix}$$

où l'on retrouve la matrice de $\vec{f}$ – elle aussi définie à un scalaire multiplicatif près.

§ 3. La dualité

* Le plan projectif dual

Les données restent celles de la section précédente.

Les règles d'incidence se confirment comme suit :

- la donnée de deux points distincts A et B, par leur coordonnées homogènes :
$$(a,b,c) \text{ et } (a',b',c')$$
définit le système linéaire de rang 2 :
$$\begin{cases} au + bv + cw = 0 \\ a'u + b'v + c'w = 0 \end{cases}$$
dont les solutions – définies à un facteur près – sont les coefficients de l'équation d'une droite, et d'une seule
- la donnée de deux droites distinctes, par leurs équations définit le système linéaire de rang 2 :
$$\begin{cases} uX + vY + wZ = 0 \\ u'X + v'Y + w'Z = 0 \end{cases}$$
dont les solutions – définies à un facteur près – sont les coordonnées homogènes d'un point, et d'un seul.

La donnée d'une droite d, par son équation homogène :
$$uX + vY + wZ = 0$$
étant équivalente à celle du triplet :
$$(u, v, w)$$
on appellera désormais u, v et w des *coordonnées homogènes* de d.

Cette symétrie parfaite entre les rôles respectifs des points et des droites du plan projectif, conduit à considérer l'ensemble des droites comme un plan projectif. On l'appelle *plan dual*; Si P désigne le plan, on note son dual P*.

* Faisceaux de droites

Une droite du plan dual admet une équation de la forme :
$$au + bv + cw = 0,$$
où a, b et c sont des scalaires non tous nuls. On les interprète comme suit :

- la droite d, d'équation $uX + vY + wZ = 0$, appartient à Δ si, et seulement si, $au + bv + cw = 0$.
- Cette dernière condition se traduit : d passe par le point de coordonnées homogènes (a, b, c). Ce qui nous conduit à poser la définition qui suit.

<u>Définition</u> : on appelle *faisceau*, l'ensemble des droites d'un plan projectif passant par un point donné. Ce dernier est appelé le *point de base* du faisceau.

<u>Convention</u> : il est commode de noter A* le faisceau de droites admettant A pour point de base.

(3-1) <u>Théorème</u> : les droites du plan projectif dual P* sont les faisceaux de droites de P.

En résumé

On définit de façon explicite :

- tout point M, par ses coordonnées homogènes : $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$
- toute droite D, par ses coordonnées homogènes : [U V W]

La relation "M appartient à D" – synonyme de "D passe par M" – s'exprime :

$$[\,U\ V\ W\,]\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0$$

Cette expression, peut être considérée, comme une équation :

- des inconnues X, Y et Z, elle définit alors une droite,
- des inconnues U, V et W, elle définit alors définit un faisceau.

*** Principe de dualité**

La donnée d'un faisceau de droites est, évidemment, celle de son point de base. On trouve là, outre une illustration remarquable de l'isomorphisme canonique qui identifie un espace vectoriel avec son bidual, l'assurance que la correspondance entre droites et points est involutive. En conséquence :

toute propriété démontrée pour P s'applique à P*.

Pour cela, il suffit d'échanger les rôles des points et des droites comme suit :

P*	P
point	droite
droite	faisceau – i.e. point de base
point commun à deux droites	droite passant par deux points
droite passant par deux points	point commun à deux droites
points alignés	droites concourantes
droites concourantes	points alignés
...	...

§ 4. Plan projectif et plans affines

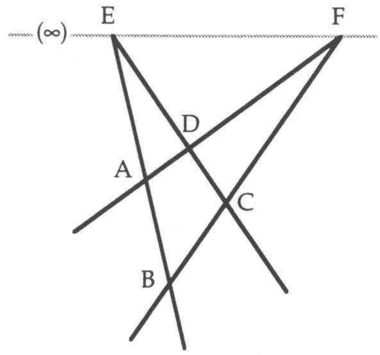
Le plan projectif P étant rapporté à un certain repère, tout point est affecté d'un système de coordonnées homogènes. Étant donnée une droite de P, on en choisit deux points A et B de coordonnées homogènes

$$A : e_0 = (X_0 , Y_0 , Z_0) \quad \text{et} \quad B : e_1 = (X_1 , Y_1 , Z_1).$$

Comme A et B sont distincts, e_0 et e_1 sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^3$. On les complète pour former une base (e_0 , e_1 , e_2) $\mathbf{R}^3$. Dans ces conditions, Relativement à celle-ci, le point courant M de E se voit affecter les coordonnées homogènes (X' , Y' , Z'). Il est immédiat que d admet pour équation $Z' = 0$. Considérons l'ensemble $\mathscr{E} = P - d$, il est formé des points tels que $Z \neq 0$. C'est donc l'ensemble des points de P admettant $(x' , y' , 1)$ pour coordonnées homogènes. Il s'identifie de façon naturelle au plan affine de $\mathbf{R}^3$, d'équation $Z = 1$, dont la direction est le plan vectoriel $\mathrm{esp}(e_0 , e_1)$. Ce qui confère à A une structure de plan affine. En outre, il est immédiat que P est le complété projectif de A et que D en est la droite de l'infini.

(4-1) <u>Théorème</u> : pour toute droite d de P, $\mathscr{E} = P - d$ est un plan affine dont d est la droite de l'infini.

<u>Exemple</u> : désormais, le quadrilatère ABCD, de la figure ci-contre, peut être considéré comme un parallélogramme.



<u>Remarque</u> : ceci dit on a, évidemment, perdu la métrique usuelle et il conviendra de disposer d'une traduction adaptée de la propriété caractéristique, qui s'énonçait initialement :

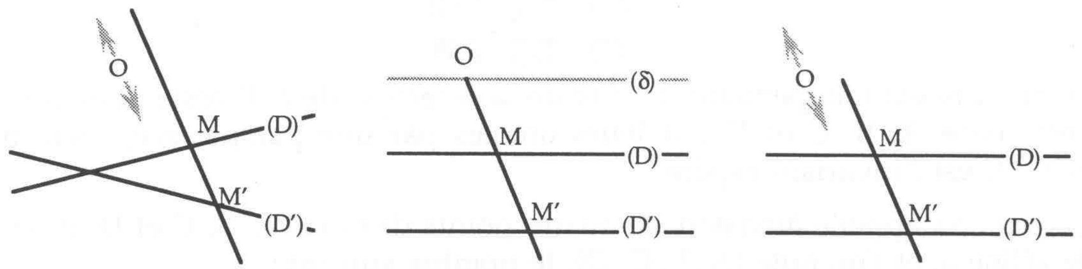
"les diagonales AC et BD ont le même milieu".

Chapitre II. Géométrie projective des droites

§ 5. Le birapport – version affine

*** Les perspectives affines**

Certaines perspectives sont des applications affines. Considérons deux droites D et D′ d'un même plan.



- La projection de D sur D′ parallèlement à une droite δ, donnée, apparaît comme la perspective dont le centre est le point à l'infini de δ. Dans ce cas, les points à l'infini de D et D′ se correspondent.
- Si D et D′ sont parallèles la perpective coïncide alors avec l'homothétie de centre O ou la translation qui transforme D en D′. Dans ce cas, aussi, les points à l'infini de D et D′ se correspondent.

Dans les ceux cas il y a conservation des points à l'infini.

Ceci vaut mutatis mutandi pour les projections parallèlement à une droite entre deux plans et pour toute perpective entre deux plans parallèles.

Notons que chacune de ces applications se caractérise par la conservation l'alignement des points et la conservation des rapports de la forme :

$$x = \frac{\overline{MA}}{\overline{BA}}$$

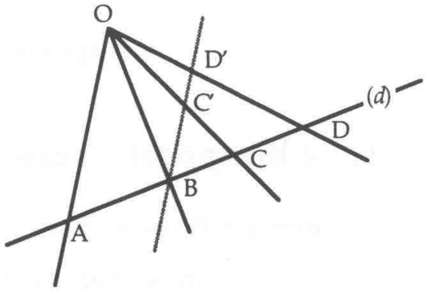
Autrement dit, si A et B sont deux points distincts dont les images sont A′ et B′, l'abscisse de tout point M de (AB), relative au repère affine (A , B) est aussi l'abscisse de son image M′, relative à (A′ , B′). On pourrait aussi bien exprimer ceci en remplaçant l'abscisse par le rapport :

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}},$$

qui, s'il est défini, caractérise les coordonnées barycentriques relatives au repère (A , B).

Il est essentiel de disposer d'un invariant analogue pour les perspectives et, plus généralement, pour toute application obtenue par composition de perpectives entre des droites du plan ou de l'espace. Cet invariant s'impose pratiquement de lui même.

*** Définition**



Quatre droites d'un même faisceau (1) sont coupées par une droite d en quatre points A, B C et D, provisoirement situés à distance finie, on note C' et D' les points où la parallèle à (OA) qui passe par B coupe (OC) et (OD). En considérant des triangles homothétiques, il est immédiat que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{C'B}} \text{ et } \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{D'B}}$$

On en déduit que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{D'B}}{\overline{C'B}}.$$

Or, ce nombre est indépendant de B et de la direction de d, il reste donc invariant si l'on remplace A, B, C et D par leurs images par une perspective quelconque de centre O. C'est l'invariant espéré.

Définition : on appelle *birapport* de quatre points distincts A, B, C et D, d'une même droite affine d, et l'on note $[A,B,C,D]$, le nombre suivant :

$$[A,B,C,D]=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

(5-1) Théorème : toute perspective entre droites conserve le birapport (2).

Remarque : on notera que sur les droites parallèles à (OA), A est le point à l'infni de d, l'expresion précédente devient :

$$[\infty_d,B,C,D]=\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}.$$

On retrouve ainsi l'abscisse de D, relativement au repère (B,C).

*** Birapport de quatre droites d'un faisceau**

Étant données quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 d'un faisceau de point de base O, toute droite ne passant pas par O les rencontre aux points A, B, C, D. Ce qui précède montre que le birapport $[A,B,C,D]$ est indépendant de d, Il est donc légitime de poser la définition suivante.

Définition : on appelle birapport de quatre droites concourantes le birapport de leurs points communs avec une même droite ne passant par par leur point commun.

1 Désormais, cette condition remplace avantageusement la formule " concourantes ou parallèles "

2 Pour autant qu'il soit défini, est sous-entendu car cette restricition n'est que très provisoire.

*** Paramétrage projectif d'une droite**

Considérons une droite d on en choisit trois points distincts A, B et C on note son point courant M. Soit a, b, c et x les abscisses respectives de ces points relativement à un repère affine donné de d. On a :

$$[A,B,C,M]=\frac{c-a}{c-b}:\frac{x-a}{x-b}.$$

L'application :

$$f: x \mapsto \frac{c-a}{c-b}:\frac{x-a}{x-b}$$

est une fonction homographique :

- c'est une une bijection de $\mathbf{R}-\{a\}$ sur $\mathbf{R}-\left\{\frac{c-a}{c-b}\right\}$,
- elle vérifie $f(b)=0, f(c)=1$.
- $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)=\frac{c-a}{c-b}$ et $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)=+\infty$ ou $-\infty$ selon les cas.

On dispose ainsi d'un paramétrage de la droite projective si l'on convient d'associer :

- le point a au symbole ∞
- le point ∞_d au nombre $\frac{c-a}{c-b}$.

Le birapport [A,B,C,M] va jouer, en géométrie projective, un rôle analogue à celui de l'abscisse définie pour un repère affine. Mieux, si l'on se reporte à la remarque de la page précédente, on constatera c'est l'abscisse pour le repère affine (B,C) si A est le point à l'infini de d ([1]).

1 C'est là une idée essentielle. La géométrie projective ne remplace pas la géométrie affine, elle l'enrichit. En banalisant le statut des points à l'infini, elle autorise leur échange avec les points ordinaires, exactement comme sur une image en perspective où les points de fuite sont la représentation concrète de points qui, matériellement, n'existent pas.

§ 6. La droite projective réelle standard et ses homographies

Les considérations qui précèdent nous conduisent à modifier le statut classique du symbole ∞. Cette opération ne peut se concevoir sans quelques précautions élémentaires.

Les fonctions homographiques sont depuis longtemps familières. On les définit par les relations de la forme :

$$x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

où α, β, γ et δ sont quatre nombres réels tels que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ ([1]). Du point de vue élémentaire, si $\gamma\neq 0$, on doit exclure $-\frac{\delta}{\gamma}$ du domaine de définition et $\frac{\alpha}{\gamma}$ de l'image. On lève ces restricitions en complétant le corps des nombres réels par un élément qu'on note naturellement ∞. On pose $\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$. La topologie de cet ensemble est définie en complétant celle de $\mathbf{R}$, par les voisinages de l'infini qui sont les complémentaires des fermés de $\mathbf{R}$ ([2]). Dans ces conditions, la fonction homographique considérée s'étend par continuité à l'homéomorphisme f, de $\hat{\mathbf{R}}$, tel que :

- si $\gamma\neq 0$:

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \quad \text{si } x\in \mathbf{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\},$$
$$f(-\frac{\delta}{\gamma})=\infty \quad \text{et} \quad f(\infty)=\frac{\alpha}{\gamma}.$$

- si $\gamma=0$, alors $\delta\neq 0$, on peut alors supposer $\delta=1$:

$$f(x)=\alpha x+\beta \text{ si } x\in\mathbf{R} \quad \text{et} \quad f(\infty)=\infty.$$

Convention : il est commode d'appeler $\hat{\mathbf{R}}$ la *droite projective standard*. Les fonctions homographiques, ainsi étendues, en sont les *homographies*.

L'assertion suivante se justifie sans peine.

(6-1) Théorème : les homographies de $\hat{\mathbf{R}}$ forment un groupe qu'on note $\mathrm{GP}(\hat{\mathbf{R}})$.

Remarque : il est possible de se dispenser de circonlocutions superflues en retenant que le symbole ∞ obéit aux règles de calcul suivantes :

$$\infty=\frac{1}{0}\ ,\ 0=\frac{1}{\infty},$$
$$\forall k\in\mathbf{R}\ ,\ \infty+k=\infty\ ,$$
$$\forall k\in\mathbf{R}^*\ ,\ \infty.k=\infty.$$

Sachant que si $\gamma\neq 0$, on sait mettre une telle expression sous la forme canonique :

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\frac{1}{x+\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Ce qui lève l'indétermination pour $x=\infty$.

---

1 Pourquoi cette restriction ?

2 Dans la conception classique de l'analyse on rend $\mathbf{R}$ compact en lui adjoignant $-\infty$ et $+\infty$, le résultat et un espace topologique homéomorphe à $[0\,,1]$, appelé la *droite achevée*. Ici lui on adjoint un seul point : ∞, le résultat est un compact homéomorphe à un cercle.

*** Birapport**

Définition : on appelle birapport de quatre nombres réels a, b, c, d distincts le nombre

$$[a,b,c,d]=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

Comme cette expression est une fonction homographique de chacun de ses arguments, cette définition s'étend à $\hat{\mathbf{R}}$ et au cas où trois seulement des nombres sont distincts.

Comme il est évident que les applications suivantes conservent le birapport :

$$x\mapsto x+h \quad , \quad x\mapsto kx \text{ si } k\neq 0 \text{ et } x\mapsto \frac{1}{x}$$

Il est immédiat que toute homographie de $\hat{\mathbf{R}}$ conserve le birapport. La réciproque est un argument essentiel de la géométrie projective.

(6-2) Théorème : une bijection de $\hat{\mathbf{R}}$ sur lui même conserve le birapport si, et seulement si, c'est une homographie.

Démonstration : soit f une bijection de $\hat{\mathbf{R}}$, on choisit arbitrairement trois éléments distincts a, b et c de $\mathbf{R}$. Si f conserve le birapport, pour tout x appartenant à $\hat{\mathbf{R}}$, on a :

$$[f(a),f(b),f(c),f(x)]=[a,b,c,x]$$

Si x est différent de a, b et c, on a donc :

$$\frac{f(c)-f(a)}{f(c)-f(b)}:\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(b)}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{x-a}{x-b}$$

Cette expression se résout par rapport à $f(x)$ et donne l'expression d'une homographie, bien définie, de $\hat{\mathbf{R}}$. Cette application conservant le birapport, elle, convient. ◅

La démonstration précédente nous livre, en prime, la propriété qui suit. Elle est fondamentale.

(6-3) Théorème : pour tous triplets (a,b,c) et (a',b',c'), formés d'éléments distincts de $\hat{\mathbf{R}}$, il existe une homographie, et une seule, qui transforme :

$$a \text{ en } a' \quad , \quad b \text{ en } b' \text{ et } c \text{ en } c'.$$

(6-4) Proposition : (a,b,c) étant trois éléments distincts de $\mathbf{R}$, l'homographie f telle que :

$$f(a)=\infty \quad , \quad f(b)=0 \quad , \quad f(c)=1,$$

s'exprime :

$$f(x)=[a,b,c,x]$$

Démonstration : on présente f au moyen de coefficients indéterminés :

$$x\mapsto f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Si a b et c sont trois nombres réels, les trois conditions $f(a)=\infty$, $f(b)=0$ et $f(c)=1$ se traduisent respectivement :

$$\gamma a+\delta=0 \quad , \quad \alpha b+\beta=0 \text{ et } \alpha c+\beta=\gamma c+\delta.$$

En reportant les deux premières dans la troisième, il vient :

$$\alpha(c-b)=\gamma(c-a).$$

Comme $c-b$ et $c-a$ ne sont pas nuls l'annulation de α ou de γ entraînerait $\alpha=\gamma=0$ et donc $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, ce qui est exclu. On peut donc procéder au calcul suivant :

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{x+\frac{\beta}{\alpha}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{x-b}{x-a}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{x-a}{x-b}.$$

On obtient ainsi l'expression attendue :

$$f(x)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{x-a}{x-b},=[a,b,c,x].$$

◅

*** Permutation des arguments d'un birapport**

En permutant quatre points donnés, l'expression de leur birapport prend $4!=24$ formes différentes. On montre que celui-ci prend, sauf exception, six valeurs distinctes ([1]). Du point de vue pratique il suffit de retenir ce qui suit, après en avoir vérifié le bien fondé.

(6-5) <u>Règles</u> : étant donnés quatre nombres distincts a, b, c et d :

1) on a :

$$[b,a,c,d]=[a,b,d,c]=\frac{1}{[a,b,c,d]},$$
$$[a,c,b,d]=[d,b,c,a]=1-[a,b,c,d];$$

2) si l'on échange ces points deux à deux, leur birapport reste inchangé.

1 Traité en exercice, mais un peu plus tard quand on disposera du formalisme adéquat

§ 7. Repère projectif

(7-1) Lemme : on considère une droite d, munie d'un repère affine arbitraire. Soit A, B, C trois points de d, donnés, distincts, on note a, b, c leurs abscisses respectives. Soit M le point courant de d, on note ξ son abscisse.

Le birapport $[a,b,c,\xi]$ est indépendant du repère choisi.

Démonstration : soit ξ' l'abscisse relative à un autre repère affine de d, comme ξ et ξ' sont liées par une relation de la forme :

$$\xi = \alpha\xi' + \beta.$$

notant a', b', c' les nouvelles abscisses de A, B, C, il est immédiat que :

$$[a,b,c,\xi] = [a,b,c,\xi'].$$

◅

Convention : il est alors légitime de noter :

$$[A,B,C,M] = [a,b,c,\xi].$$

et naturel de poser la définition qui suit.

Définition : on appelle *repère projectif* de d, la donnée d'un triplet (A,B,C) de points distincts. Le birapport :

$$x = [A,B,C,M]$$

est alors appelé l'*abscisse projective* de M relativement à celui-ci.

Remarque : on retiendra que les sommets du repère ont pour abscisse respectives :

$$A : \infty \ , \ B : 0 \text{ et } C : 1.$$

* Changement de repère projectif

(7-2) Lemme : une droite d étant rapportée à un repère projectif donné, on note M son point courant et x l'abscisse projective de celui-ci. On considère trois points distincts A, B et C, d'abscisses projectives respectives a, b et c. Soit x' l'abscisse projective de M relativement au repère (A,B,C), la formule de passage :

$$x = f(x')$$

s'exprime par l'homographie, de $\hat{\mathbf{R}}$, telle que :

$$f(a) = \infty \ , \ f(b) = 0 \text{ et } f(c) = 1.$$

Démonstration : découle immédiatement de la proposition 6-4. ◅

§ 8. Homographies entre droites projectives

Définition : une application entre droites projectives est appelée *homographie* si elle conserve le birapport.

En d'autres termes, l'application $f : d \longrightarrow d'$ est une homographie si, pour tous points M, N, P et Q de d, on a :

$$[f(M), f(N), f(P), f(Q)] = [M, N, P, Q].$$

Remarque : toute perspective entre droites est une homographie.

(8-1) Proposition : tout paramétrage d'une droite par l'abscisse projective relative à un repère est une homographie entre celle-ci et la droite projective standard.

Démonstration : au départ le birapport de quatre points s'évaluait par le birapport des abscisses relativement à un repère affine arbitraire. Les formules de passage étant des homographies de $\hat{\mathbb{R}}$, ce nombre est indépendant du repère choisi. ◅

Tirons quelque conséquences immédiates de la définition

(8-2) Proposition : la composition d'homographies donne une homographie

(8-3) Proposition : toute homographie est bijective et son application réciproque est une homographie.

Démonstration : étant données deux droites d et d', on note M et M' leurs points courants respectifs, x et x' leurs abscisses relativement à deux repères arbitrairement choisis. Nous savons que les deux bijection suivantes :

$$\begin{array}{rcl} g : d & \longrightarrow & \hat{\mathbb{R}} \\ M & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g' : d' & \longrightarrow & \hat{\mathbb{R}} \\ M' & \mapsto & x' \end{array}$$

sont des homographies. Si f est une homographie de d dans d', l'application :

$$h = g' \circ f \circ g^{-1}$$

est une homographie de $\hat{\mathbb{R}}$. Il s'ensuit que $f = g'^{-1} \circ h \circ g$ est une bijection. Le fait que f^{-1} soit une homographie découle de la définition ◅

Il est alors évident que

(8-4) Corollaire : les homographies d'une droite sur elle-même forment un groupe.

Définition : étant donnée une droite d, on appelle l'ensemble de ses homographies son *groupe projectif*. On le note GP(d).

(8-5) Théorème fondamental : étant donnés deux droites d et d', trois points distincts A, B, C de d et trois points distincts A', B', C' de d', il existe une homographie, et une seule, qui transforme :

A en A', B en B' et C en C'.

Démonstration : l'hypothèse posée nous autorise à rapporter respectivement d et d' aux repères (A, B, C) et (A', B', C'). Soit f une application de d dans d', si elle conserve le birapport, pour tout point M de d, son image M', par f, vérifie :

$$[A', B', C', M'] = [A, B, C, M].$$

Réciproquement, il est évident que cette relation définit une application qui conserve le birapport. ◅

*** Principe d'incidence**

En rapprochant la définition des homographies de celle du birapport de quatre droites, il est naturel de poser le principe qui suit.

(8-6) Principe : étant donné un faisceau de droites A* et une droite δ, ne passant pas pas son point de base, l'application qui, à tout ploint de δ, M associe la droite (AM) est une homographie.

Il n'est pas indispensable d'attendre d'avoir justifié cette propriété dans les formes (cf. §20) pour l'appliquer.

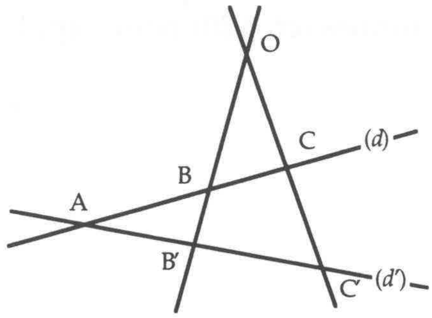
§ 9. Premières applications

(9-1) Théorème : on considère deux droites distintes d et d' d'un même plan projectif, soit A leur point commun. Toute homographie entre D et D' qui transforme A en lui même est une perspective.

Démonstration : on choisit deux points B et C de d, distincts et différents de A, soit f l'homographie considérée, on note $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. comme f est bijective, A, B' et C' sont des points distincts de D. Soit O le point commun aux droites (BB') et (CC'), g la perspective de centre O de D sur D', c'est une homographie telle que $g(A) = A$, on a donc :

$$g(A) = f(A)\ ,\ g(B) = f(B)\ \text{ et }\ g(C) = f(C)$$

Il découle du théorème fondamental que f et la perpective g coïncident. ◅



* Axe d'une homographie

(9-2) Théorème : étant données deux droites distinctes d et d' d'un même plan, pour toute homographie f de d sur d', il existe une droite Δ telle que si M et N sont deux points quelconques de d et M' et N' leurs images par f, les droites (MN') et (NM') se coupent sur sur Δ. Cette droite passe par l'image et l'image inverse du point commun à d et de d'.

Définition : la droite en question est naturellement appelée *axe* de l'homographie.

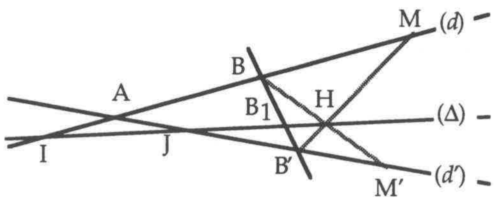
Démonstration : notons A le point commun à d et d' et considérons une homographie f de d sur d'. Commençons par traiter le cas le plus général, où f n'est pas une perspective. Soit I et J l'image réciproque et l'image de A, il résulte du théorème précédent que ces deux points sont différents de A. Ainsi, la droite (IJ) est distincte de d et de d', on la note Δ. On choisit un point B de d, distinct de I et de A, soit B' son image par f et B_1 le point de rencontre des droites Δ et (BB').

La perpective π, de centre B', de d sur Δ transforme :

$$I\ ,\ A\ ,\ B \text{ en } I\ ,\ J\ ,\ B_1.$$

La perpective π', de centre B, de Δ sur d' transforme :

$$I\ ,\ J\ ,\ B_1 \text{ en } A\ ,\ J\ ,\ B'.$$



Comme f n'est pas une perpective I, A, B est un repère de d. Comme $\pi' \circ \pi$ et f coïncident sur ces points, on a :

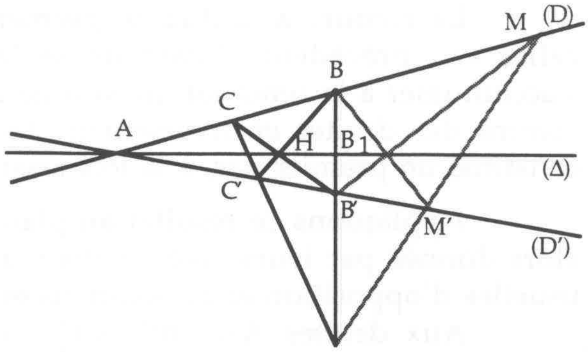
$$f = \pi' \circ \pi.$$

Considérons maintenant un point quelconque M de d, soit M' son image par f et H le point de rencontre de (BM') et de Δ. Nous savons que :

$$M' = f(M) = \pi' \circ \pi(M) = \pi'(H).$$

Ce qui montre que M' est aligné avec B et H et prouve que (BM') et (MB') se coupent sur Δ. Le choix de B restant arbitraire, cette propriété est vérifiée pour tous points M et N de d.

Si f est une perspective, on choisit deux points B et C de d, distincts et différents de A, Soit B′ et C′ leur images par f. On note H le point commun à (BC′) et (CB′), soit Δ la droite (AH). On procède alors comme dans le cas général (1). ◅

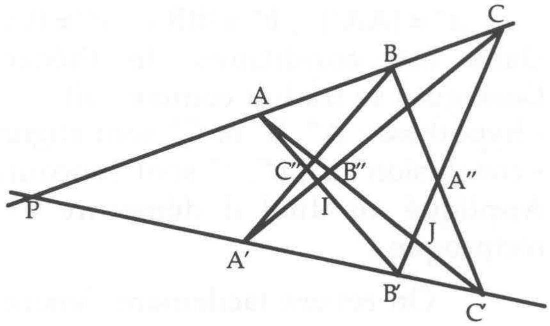


Remarque : on a démontré, en passant, que toute homographie entre deux droites distinctes est le produit de deux perspectives.

(9-3) Théorème de Pappus : si les sommets d'un hexagone sont alternativement situés sur deux droites, les côtés opposés se coupent en trois points alignés.

Démonstration : on considère un hexagone AB′CA′BC′ dont les sommets A, B, C d'un côté, A′, B′, C′ de l'autre sont alignés sur deux droites d et d'. Les trois points en question sont alignés sur l'axe de l'homographie qui transforme respectivement :

A , B et C en A′ , B′ et C′. ◅



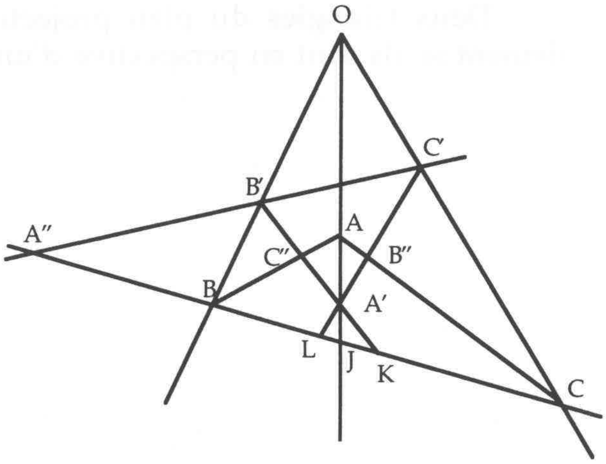
(9-4) Théorème de Desargues.

On considère deux triangles ABC et A′B′C′ d'un plan projectif, tels que les points suivants soient bien définis :

$A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = CA \cap C'A'$ et

$C'' = AB \cap A'B'$.

Si les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes alors les points A″, B″ et C″ sont alignés.



Démonstration : on définit les points J, K et L conformément au schéma ci-contre. La perpective π, de centre C, de (A′C′) sur (AA′) transforme respectivement :

A′ , C′ , B″ et L en A′ , O , A et J

La perspective π', de centre B, de (AA′) sur (A′B′) transforme :

A′ , O , A et J en A′ , B′ , C″ et K.

L'homographie $\pi' \circ \pi$ laisse A′ invariant, c'est une perspective. Les droites (B′C′), (B″C″) et (LK) concourent en son centre. Or (LK) est aussi la droite (BC). Ce qui montre que les points A″, B″ et C″ sont bien alignés.

Cette démonstration ne vaut que si A′ n'appartient pas à (BC). Comme les sommets A, B, C, A′, B′ et C′ jouent des rôles symétriques, si l'on avait $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ etc … tous les points seraient alignés et A″, B″ et C″ ne seraient pas définis. ◅

1 Nous laissons la suite à titre d'exercice car nous retrouverons cette propriété notablement précisée un peu plus loin. (cf. 10-7).

Le recours à la dualité permettrait de déduire une foule de propriétés de celles qui précèdent. Avant de se lancer dans dans cette voie, il convient de s'accoutumer à la sentation de vertige qu'on éprouve parfois en regardant les points comme des droites et inversement. De ce point de vue, le théorème de Desargues constitue un premier pas, à la fois rassurant et spectaculaire.

Appliquons ce résultat au plan dual, les deux triangles ABC et A'B'C', sont alors donnés par leurs côtés, notons les *abc* et *a'b'c'*, en respectant les conventions usuelles d'opposition entre sommets et côtés des triangles.

Aux droites AA', BB', CC', correspondent les points :

$$A'' = a \cap a' \ , \ B'' = b \cap b' \ , \ C'' = c \cap c'$$

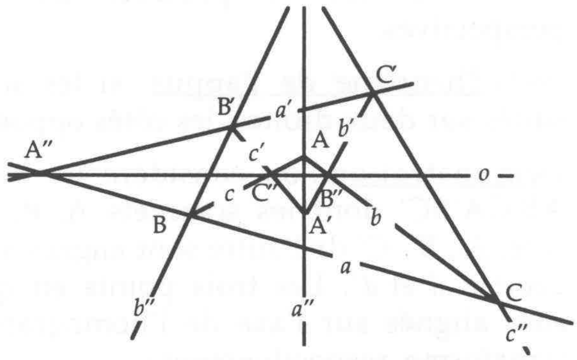
Aux points A″, B″, C″, correspondent les droites :

$$a'' = (AA') \ , \ b'' = (BB') \ , \ c'' = (CC')$$

Dans ces conditions, le théorème de Desargues se traduit comme suit :

- hypothèse : A″, B″ et C″ sont alignés,
- conclusion : *a*″, *b*″, *c*″ sont concourantes.

Appliqué au dual il démontre sa propre réciproque !



On retient facilement l'énoncé qui en découle en le formulant comme suit.

(9-5) <u>Théorème de Desargues</u> (bis)

Deux triangles du plan projectif sont en perspective d'un point [1] si, et seulement si, ils sont en perspective d'une droite [2].

---

1 Les droites joignant les sommets homologues sont courantes.

2 Les points d'intersection des côtés homologues sont alignés.

§ 10. Divisions harmoniques – faisceaux harmoniques

*** Définition**

(10-1) <u>Proposition</u> : étant donnés quatre scalaires distincts a, b, c et d, il y a équivalence entre les trois relations suivantes :

(1) $$[a, b, c, d] = -1$$

(2) $$(a-c)(b-d) + (a-d)(b-c) = 0$$

(3) $$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$$

<u>Démonstration</u> : l'équivalence (1) ⇔ (2) découle immédiatement de l'expression du birapport (cf. § 6). En développant la relations (2), puis en séparant les termes précédés du signe plus de ceux précédés du signe moins, on obtient (3). ◅

(10-2) <u>Corollaire</u> : si $[a, b, c, d] = -1$, on a :

$$-1 = [a, b, c, d] = [b, a, c, d] = [a, b, d, c] = [c, d, a, b].$$

<u>Démonstration</u> : ces égalités découlent des symétries de l'expression

$$(a-c)(b-d) + (a-d)(b-c)$$

intervenant dans la proposition précédente. ◅

<u>Remarque</u> : dans la définition qui suit, on tient compte du fait que les égalités (2) et (3) restent vérifiées si trois des nombres en question sont égaux. Ce qui n'est, initialement qu'une convention sera légitimé par l'usage.

<u>Définition</u> : on dit que quatre points distincts d'une même droite projective forment une *divison harmonique* si leur birapport est égal à –1 ou si trois d'entre eux sont confondus. En remplaçant les points alignés par des droites concourantes on définit les *faisceaux harmoniques*.

<u>Règle d'usage</u> : compte-tenu du corollaire précédent, le fait que quatre points alignés A, B, C et D forment une division harmonique s'exprime aussi bien sous l'une des formes suivantes :

- D est le *conjugué harmonique* de C par rapport à A et B,
- C est le conjugué harmonique de D par rapport à A et B,
- C et D sont conjuguées harmoniques par rapport à A et B,
- A et B sont *conjuguées harmoniques* par rapport à C et D,
- …

*** Interprétation affine**

(10-3) <u>Proposition</u> : étant donnés quatre points distincts A, B, C, D, d'une droite affine Δ, les conditions suivantes sont équivalentes :

(4) A, B, C et D forment une division harmonique,

(5) $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

(6) $$IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}, \qquad \text{(I est le milieu de AB)}$$

(7) $$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

<u>Démonstration</u> : désignant par a, b, c, d les abscisses des points relativement à un repère affine quelconque de la droite donnée, la relation (4) exprime (1), (5) traduit (2). En prenant pour origine, le milieu I de AB, puis A, la relation (3) donne successivement (6) et (7). ◅

(10-4) <u>Proposition</u> : étant donné deux points A et B d'une droite Δ, le conjugué harmonique du point à l'infini de ∞_Δ, par rapport à A et B est le milieu de AB.

<u>Démonstration</u> : ceci découle de la définition de :

$$[\infty, M, A, B] = -1.$$ ◅

(10-5) <u>Proposition</u> : dans le plan, on considère trois droites concourantes d, d' et Δ.

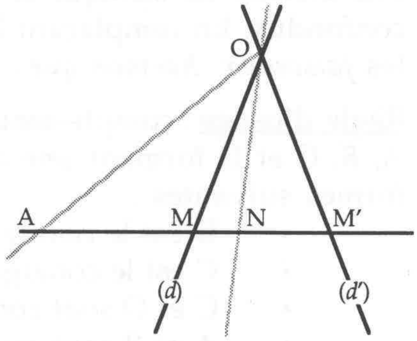
- Si d et d' sont perpendiculaires, la droite conjuguée harmonique de Δ par rapport à d et d' est sa symétrique par rapport à d (et aussi d').
- Si Δ est une bissectrice de d et d', la droite conjuguée harmonique de Δ par rapport à d et d' est la seconde bissectrice.

<u>Démonstration</u> : il suffit de couper ces droites par une parallèle à d ou d' dans le premier cas, par une perpendiculaire à Δ dans le second, la conclusion découle de la propriété du milieu (cf. 10-4). ◅

*** Polaire d'un point par rapport à deux droites.**

(10-6) <u>Proposition</u> : étant données deux droites d et d', un point A, autre que leur point commun noté O, soit Δ une droite quelconque passant par A, elle coupe d et d' en M et M'. Le lieu géométrique des conjuguées harmoniques de A par rapport à M et M' est la droite conjuguée harmonique de (OA) par rapport à d et d'.

<u>Démonstration</u> : notons Δ' l'ensemble décrit par l'énoncé, soit N un point de Δ', comme N est le conjugué harmonique de A par rapport à M et M', nous savons que la droite (ON) est conjuguée harmonique de (OA) par rapport à d et d'. De plus, il est clair que tout point de cette droite appartient à Δ'. La conclusion en découle. ◅



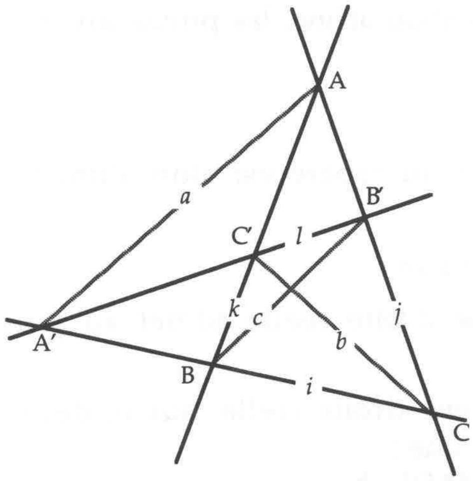
<u>Définition</u> : cette droite est appelée la *polaire* de A par rapport à D et D'.

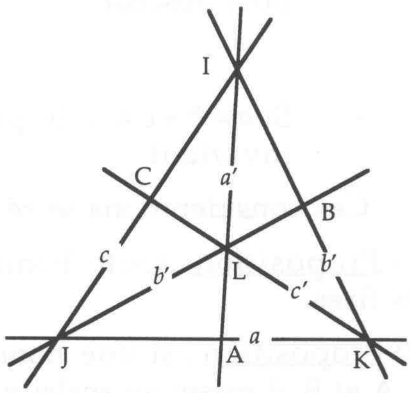
<u>Remarque</u> : si le point A n'appartient ni à d ni à d', sa polaire par rapport d et d' est l'axe de la perspective de d sur d' dont il est le centre.

*** Quadrilatère complet et quadrangle**

Quatre droites telles que trois d'entre elles ne soient jamais concourantes forment ce qu'on appelle un *quadrilatère complet* dont elles sont les *côtés*. Elles se coupent en six points qu'on appelle les *sommets*. Deux sommets sont dit *opposés*. s'ils ne sont pas adjacents à un même côté. Les droites joignant deux sommets opposés sont appelées les diagonales. Elles sont au nombre de trois.

Un *quadrangle* est la version duale du quadrilatère complet, Il est donné par ses quatre *sommets* qui sont joints par six *côtés*, deux à deux opposés et se recoupent en trois points diagonaux.



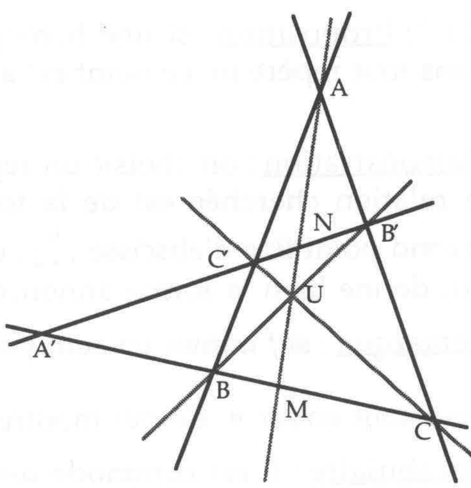


Remarque : dans la pratique, il est commode de regarder :

- un quadriltère complet comme un triangle et une transversale,
- un quadrangle comme un triangle et les céviennes d'un point.

(10-7) Proposition : deux côtés d'un quadrilatère complet, la diagonale passant par leur sommet commun et la droite qui joint ce point à l'intersection des deux autres diagonales forment un faisceau harmonique.

Démonstration : considérons le quadrilatère complet, schématisé ci-contre. On désigne par M et N, les conjugués harmoniques de A' par rapport à B et C d'un côté B' et C' de l'autre. La droite (MN) apparaît ainsi comme la polaire de A' par rapport aux droites (AB) et (AC) et par rapport à (BB') et (CC'). Il s'ensuit que cette droite passe par A et le point d'intersection de (BB') et (CC'). Ce qui montre que les deux côtés (AB) et (AC), la diagonale (AA') forment avec la droite joignant A à l'intersection des diagonales (BB') et (CC') un faisceau harmonique. ◅



Remarque : cette propriété fournit un moyen simple et commode de caractériser et de construire des divisions harmoniques. Il existe une infinité de façons de l'énoncer.

§ 11. Points fixes des homographies

Une droite étant rapportée à une certain repère, il est immédiat que toute relation de la forme :

$$axx' + bx + cx' + d = 0$$

définit une homographie, sous la seule réserve que $ad - bc \neq 0$. On en déduit que les points invariants sont définis comme suit :

- Si $a = 0$, leurs abscisses sont les solutions de l'équation du second degré :
$$ax^2 + (b + c)x + d = 0.$$
- Si $a = 0$ et $b + c \neq 0$, on a une application affine, les points invariants ont pour abscisse :
$$\infty \text{ et } \frac{d}{b+c}$$
- Si $a = b + c = 0$, le premier sommet du repère est alors l'unique point invariant.

Ces considérations se résument comme suit.

(11-1) Proposition : toute homographie d'une droite réelle admet au plus deux points fixes.

(11-2) Proposition : si une homographie f, d'une droite réelle, admet deux points fixes, A et B, il existe un scalaire k, non nul, tel que :

$$\forall M \in D \ [A, B, M, f(M)] = k.$$

Démonstration : on choisi un repère dont les deux premiers points sont A et B. Il découle immédiatement des considérations de la section 7 que f est alors décrite par l'application $x \mapsto kx$, où k est un scalaire non nul. Dans ces conditions, pour tout point M, on a :

$$[A, B, M, f(M)] = [\infty, 0, x, kx] = \frac{kx}{x} = k. \quad \lhd$$

(11-3) Proposition : si une homographie f, d'une droite, admet un seul point fixe A, dans tout repère où ce point est affecté de l'abscisse ∞, elle s'exprime :

$$x \mapsto x + h.$$

Démonstration : on choisit un repère (A, B, C), on se reporte toujours à la section 7, la relation cherchée est de la forme $x \mapsto ax + b$. Si l'on avait $a \neq 1$, il existerait un second point fixe d'abscisse $\frac{b}{1-a}$, on a écarté cette éventualité . Il s'ensuit que $a = 1$. Ce qui donne bien la forme annoncée. $\lhd$

Remarque : si f admet un seul point fixe, f^n s'exprime :

$$x \mapsto x + nh,$$

pour tout entier n. Ce qui montre, en particulier, que f est d'ordre infini dans GP(D).

Vocabulaire : il est commode de différencier les homographies admettant deux, un ou zéro points fixes en les qualifiant, dans l'ordre :

d'*hyperboliques* , *paraboliques* ou d'*elliptiques* (1).

---

1 Par référence au nombre de points à l'infini de chacune de ces coniques.

§ 12. Involutions [1]

(12-1) <u>Théorème</u> : si une homographie f, d'une droite d, est involutive, ou bien elle est sans point fixe, ou bien elle admet deux points fixes, A et B, et alors, pour tout point M de d, on a :

$$[A,B,M,f(M)] = -1.$$

<u>Démonstration</u> : la remarque qui suit la proposition 11-3, justifie le début de l'énoncé. S'il existe deux points fixes A et B, il existe un scalaire k tel que :

$$\forall M \in D,\ [A,B,M,f(M)] = k.$$

Pour un point quelconque M et son image M', on aura donc :

$$k = [A,B,M,M'] = [A,B,M',M] = \frac{1}{k}.$$

Si $k = 1$, f est l'application identique, sinon on a bien $k = -1$. ⊲

(12-2) <u>Corollaire</u> : toute involution, hyperbolique est la conjugaison harmonique par rapport à deux points.

<u>Remarque</u> : on a là une justification de la convention qui conduit à considérer comme une division harmonique un point et trois points qui se confondent.

La propriété qui suit est remarquable.

(12-3) <u>Proposition</u> : pour qu'une homographie d'une droite projective soit une involution, il suffit qu'elle en échange deux points distincts.

<u>Démonstration</u> : soit f une homographie d'une droite donnée et un point A tel que $f(A) = A'$ et $f(A') = A$, on considère un point M, distinct de A et de A'. on note :

$$M' = f(M) \text{ et } M'' = f(M').$$

On a :

$$[A,A',M',M] = [A',A,M'',M'] = [A,A',M',M''].$$

La première égalité résulte de la conservation du birapport et la seconde de l'échange des points deux à deux. Comme M est différent de A et A', M' est aussi différent de ces deux points. On en déduit que M'' = M et ceci quel que soit M. ⊲

(12-4) <u>Proposition</u> : toute homographie d'une droite est soit une involution, soit le produit de deux involutions.

<u>Démonstration</u> : soit f une homographie d'une droite D, autre que l'application identique, on choisit un point A, tel que $A' = f(A) \neq A$, on note $A'' = f(A')$. Alors, soit $A'' = A$, f est alors une involution (cf. 12-3), soit (A, A', A'') est un repère projectif. On se places dans ce cas.

Soit g l'involution de D qui :

échange A avec A'' et laisse A' invariant,

on a :

$$f \circ g(A') = f(A') = A'' \text{ et } f \circ g(A'') = f(A) = A',$$

ce qui montre que $f \circ g$ est une involution. La conclusion est immédiate. ⊲

---

1 De façon générale on appelle *involution* toute transformation, autre que l'application identique, qui coïncide avec son inverse.

*** Théorème d'involution de Desargues**

Il est plaisant de conclure ce chapitre sur un beau résultat en regrettant de ne pas pouvoir en dévoiler, dans ce cadre, toute la substance.

(12-5) <u>Théorème</u> : les côtés opposés d'un quadrangle déterminent sur une droite ne passant par aucun de ses sommets, trois paires de points échangés par une même involution.

<u>Démonstration</u> : on considère un quadrangle ABCD. Une droite d, ne passant par aucun de ses sommets, en coupe les côtés opposés :

(AB) et (CD) en P et P' , (AD) et (BC) en Q et Q' , (AC) et (BD) en R et R'.

On note I le point commun à (AC) et (BD). Les perspectives suivantes :

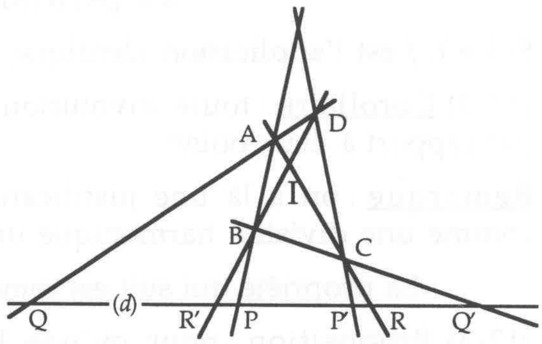
- de centre A de d sur (BD),
- de centre C de (AC) sur d,

transforment :

P, Q, R, R' en B, D, I, R' puis en Q', P', R, R'.

On en déduit que :

$$[P,Q,R,R'] = [Q',P',R,R'].$$



L'échange des deux premiers arguments et des deux derniers ne modifiant pas la valeur d'un birapport, on a :

$$[P,Q,R,R'] = [P',Q',R',R].$$

Comme d ne passe par aucun sommet, les points P, Q, R sont distincts, ils forment un repère projectif de d, de même que P', Q' et R'. L'égalité ci-dessus montre que l'homographie qui transforme P, Q, R en P', Q' et R', échange R et R'. Il s'agit donc d'une involution. ◅

(12-6) <u>Corollaire</u> : étant donné un triangle ABC et une droite d qui coupe (BC) en P, (CA) en B et (AB) en R, si P', Q' et R' sont trois points de d, les droites (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes si, et seulement si, il existe une involution qui échange P avec P', Q avec Q' et R avec R'.

<u>Démonstration</u> : si (AP'), (BQ') et (CR') concourent en D, l'involution de Desargues du quadrangle ABCD est celle annoncée.

Réciproquement, soit D le point commun à (AP') et (BQ'), l'involution de Desargues du quandrangle ABCD, échange P avec P' et Q avec Q'. Elle coïncide donc avec l'involution donnée. Ce qui entraîne que (CR') passe par D. ◅

Chapitre III. Les espaces projectifs

§ 13. Définitions

*** Le plan projectif standard**

Les systèmes de coordonnées homogènes sont les classes d'équivalence de $\mathbf{R}^3 - \{0, 0, 0\}$, pour la relation :

$$(X', Y', Z') \equiv (X, Y, Z) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}\ (X', Y', Z') = \lambda(X, Y, Z).$$

Voilà une façon commode et élégante de présenter les coordonnées homogènes. On pourrait continuer dans cette voie. Cependant, il est plus indiqué de développer les considérations théoriques sur un modèle anonyme pour deux raisons, au moins :

- l'objectif est de définir un cadre où les points à l'infini ne soient plus distingués en tant que tels, il est donc peu indiqué de voir, au départ la dernière coordonnée jouer un rôle spécifique ;
- il est commode de disposer d'un cadre doté des propriétés communes aux droites, aux plans, à l'espace, ...

*** Définition**

Soit $\mathbf{K}$ un corps qui, dans la pratique, sera celui des nombres réels et exceptionnellement celui des nombres complexes, on considère un espace vectoriel E de dimension finie, sur $\mathbf{K}$. Il est immédiat que la relation suivante :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\lambda \in K - \{0\}, y = \lambda x.$$

est une équivalence sur $E - \{0\}$.

<u>Définition</u> : on appelle *espace projectif* de E, et l'on note $p(E)$, l'ensemble quotient de $E^*/\sim$. Si E est de dimension $n+1$ ([1]), on dit que la *dimension* de $p(E)$ est n.

<u>Conventions</u> : les éléments de $p(E)$ sont appelés *points*. Si x est un vecteur non nul de E, on note $p(x)$ le point défini par x et l'on dira que x en est un *représentant*.

<u>Remarque</u> : au départ, insistons lourdement sur le fait que :

$$p(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K}^*\}.$$

La convention sur les dimensions est naturelle dans la mesure où c'est une droite vectorielle de E qui s'identifie à un point de $p(E)$. Ce point de vue prend bien en compte le plan complété de sa droite de l'infini, appréhendé au moyen des coordonnées homogènes. Dans ce cas, on a $E = \mathbf{R}^3$ et la classe $p(X, Y, Z)$ décrit un point unique, situé à distance finie ou à l'infini.

<u>Définition</u> : une partie Q de $p(E)$ est appellée un *sous-espace projectif* s'il existe un sous-espace vectoriel F de E, tel que $Q = p(F)$.

Une partie une partie X de l'espace projectif $P = p(E)$ étant donnée, on considère une famille $(x_M)_{M \in X}$, de représentants des points de X, abitrairement choisis. Il est évident que le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{esp}((x_M)_{M \in X})$ est indépendant du choix des représentants x_M. Il est donc bien défini par la donnée de X.

---

1 Le cas où $\dim E = 0$ est exclu, par définition.

Définition : dans les conditions ci-dessus, on dit que X *engendre* $p(\mathrm{F})$.

Vocabulaire : on utilise les termes de *droite* et *plan* pour désigner les espaces projectifs de dimension 1 et 2, d'*hyperplan* pour désigner les sous-espaces de dimension $n-1$ d'un espace de dimension n.

Remarque : tout ceci reste naturel. En effet :

- la donnée de deux points A et B correspond à celle de deux vecteurs a et b, tels que :
$$\mathrm{A}=p(a) \text{ et } \mathrm{B}=p(b),$$
si A et B sont distincts, ces deux vecteurs sont indépendants, la droite engendrée par A et B est l'espace projectif du plan vectoriel $\mathbf{K}a+\mathbf{K}b$;
- la donnée de trois points A, B et C correspond à celle de trois vecteurs a, b et c, tels que :
$$\mathrm{A}=p(a)\ ,\ \mathrm{B}=p(b) \text{ et } \mathrm{C}=p(c),$$
si les trois points ne sont pas alignés, c'est que les trois vecteurs sont linéairement indépendants, le plan engendré par par ces trois points est l'espace projectif de l'espace vectoriel de dimension 3 : $\mathbf{K}a\oplus\mathbf{K}b\oplus\mathbf{K}c$.

(13-1) Proposition : l'intersection d'une famille de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif.

Plus précisément, si $(\mathrm{Q}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille de sous-espaces projectifs de $\mathrm{P}=p(\mathrm{E})$, telles que pour tout i appartenant à I, on ait $\mathrm{Q}_i=p(\mathrm{F}_i)$, alors :
$$\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Q}_i=p(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i.).$$

Démonstration : on pose
$$\mathrm{Q}=\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Q}_i \text{ et } \mathrm{F}=\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i.$$
Par définition, on a :
$$\mathrm{M}\in \mathrm{Q} \Leftrightarrow \forall i\in \mathrm{I}\ ,\ \exists x_i\in \mathrm{F}_i\ ,\ \mathrm{M}=p(x_i).$$
Désignant par x, un vecteur arbitraire de E, tel que $\mathrm{M}=p(x)$, cette équivalence devient :
$$\mathrm{M}\in \mathrm{Q} \Leftrightarrow \forall i\in \mathrm{I}\ ,\ \exists x_i\in \mathrm{F}_i\ ,\ \exists \lambda_i\in \mathbf{K}^*\ ,\ x=\lambda_i x_i.$$
On en déduit que M appartient à Q si, et seulement si, x appartient à F. ◅

(13-2) Proposition : étant donnés deux sous-espaces projectifs Q et R d'un même espace projectif P, soit S le sous-espace engendré par $\mathrm{Q}\cup\mathrm{R}$ dans P. On a :
$$\dim \mathrm{S} = \dim \mathrm{Q} + \dim \mathrm{R} - \dim(\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})$$
Démonstration : soit F et G, tels que $\mathrm{Q}=p(\mathrm{F})$ et $\mathrm{R}=p(\mathrm{F})$. Il découle de la définition de S que :
$$\mathrm{S}=p(\mathrm{F}+\mathrm{G})$$
On sait que :
$$\dim(\mathrm{G}+\mathrm{F}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}).$$
On soustrait 1 de chacune de ces dimensions, on obtient la relation annoncée. ◅

§ 14. Applications projectives – groupe projectif

*** Définition générale**

Étant donnés deux espaces vectoriels E et F, sur un même corps $\mathbf{K}$, on considère une application linéaire φ de E dans F. Il est clair que, si x et y sont deux éléments de E, on a successivement :

$$p(x)=p(y),$$
$$\exists\lambda\in\mathbf{K}^*,\ y=\lambda x,$$
$$\exists\lambda\in\mathbf{K}^*,\ \varphi(y)=\lambda\varphi(x),$$
$$\text{si } \varphi(x)\neq 0,\ p[\varphi(x)]=p[\varphi(y)],$$

On en déduit que φ induit l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} p(\mathrm{E})-p(\operatorname{Ker}\varphi) & \longrightarrow & p(\mathrm{F}) \\ p(x) & \longmapsto & p(\varphi(x)) \end{array}$$

<u>Définition</u> : une telle application est appelée *application projective*. On la note $p(\varphi)$.

<u>Exemple</u> : étant donné un espace projectif $\mathrm{P}=p(\mathrm{E})$, de dimension 3, on en considère un plan $\mathrm{H}=p(\mathrm{F})$ et un point $\mathrm{O}=p(\omega)$, n'appartenant pas à H. On a :

$$\dim\mathrm{E}=4\ ,\ \dim\mathrm{F}=3$$

et comme O n'appartient pas à H, ω n'appartient pas à F. Il s'ensuit que :

$$\dim(\mathrm{F}+\mathbf{K}\omega)>\dim\mathrm{E}=3.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathbf{K}\omega.$$

Tout vecteur x, de E, s'exprime de façon unique :

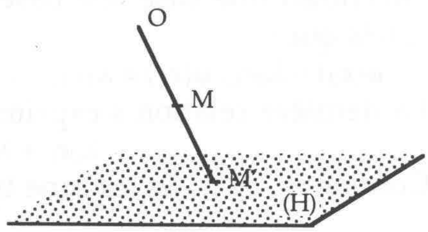
$$x=u+\lambda\omega \ \text{ où } \ u\in\mathrm{F} \ \text{ et } \ \lambda\in\mathbf{K}.$$

La projection vectorielle sur F, associée à la somme directe $\mathrm{F}\oplus\mathrm{K}\omega$, se décrit comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & u \end{array}$$

Elle induit l'application projective :

$$\begin{array}{ccc} \pi:\mathrm{P}-\{\mathrm{O}\} & \longrightarrow & \mathrm{H} \\ \mathrm{M}=p(x) & \longmapsto & \mathrm{M}'=p(u) \end{array}$$



Comme $u=x-\lambda\omega$, le point $\mathrm{M}'=p(u)$ appartient à la droite (OM). On reconnaît la perspective de centre O, de P sur H.

<u>Remarque</u> : cet exemple est pratiquement le seul cas intéressant d'application projective définie par une application linéaire non injective.

(14-1) <u>Proposition</u> : si φ est une application linéaire injective de E dans F, l'application projective $p(\varphi)$ est définie et elle est injective.

<u>Démonstration</u> : si $\operatorname{Ker}\varphi=0$, $p(\operatorname{Ker}\varphi)=\varnothing$, $p(\varphi)$ est alors définie sur $p(\mathrm{E})$. La vérification que cette application est injective est immédiate. En effet, compte-tenu de l'injectivité de φ, la condition $\varphi(y)=\lambda\varphi(x)$ équivaut à $y=\lambda x$. ◅

*** Homographie**

Définition : on appelle *homographie* toute application projective induite par un isomorphisme d'espace vectoriel.

Les propriétés qui suivent découlent immédiatement de cette définition.

(14-2) Proposition.

1) Toute homographie est bijective.

2) L'image (respectivement l'image inverse) d'un sous-espace projectif est un sous-espace projectif de même dimension.

3) La composition d'homographies donne une homographie. Plus précisément, on a toujours :

$$p(\psi \circ \varphi) = p(\psi) \circ p(\varphi) \text{ [1]}$$

4) Toute homographie admet pour inverse une homographie. Plus précisément, on a toujours :

$$[p(\varphi)]^{-1} = p(\varphi^{-1}).$$

*** Groupe projectif**

(14-3) Lemme : l'ensemble des homographies d'un espace projectif $p(\mathrm{E})$, dans lui même, est un groupe, noté GP(E), et l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL(E)} & \longrightarrow & \mathrm{GP(E)} \\ \varphi & \mapsto & p(\varphi) \end{array}$$

est un morphisme de groupes dont le noyau est $\mathbf{K}^*\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Démonstration : il découle de la définition qu'on a toujours :

$$p(\psi \circ \varphi) = p(\psi) \circ p(\varphi).$$

On est donc bien en présence d'un morphisme qui, par définition est surjectif. On en déduit que son image, GP(E), est un goupe.

Soit φ un élément du noyau, cette condition se traduit :

$$\forall x \in \mathrm{E} - \{0\} \text{ , } \exists \lambda \in \mathbf{K} - \{0\} \text{ , } \varphi(x) = \lambda x.$$

On choisit une base une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, de E, il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et λ, tels que :

$$\varphi(e_0) = \lambda_0 e_0,\ \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1,\ \dots,\ \varphi(e_n) = \lambda_n e_n \text{ et } \varphi(e_0 + e_1 + \dots + e_n) = \lambda(e_0 + e_1 + \dots + e_n)..$$

La dernière relation s'exprime alors :

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda e_0 + \lambda e_1 + \dots + \lambda e_n.$$

Comme $e_0, e_1, \dots, e_n$ est une base de E, cette condition entraîne que :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda.$$

Il s'ensuit que :

$$\varphi = \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}.$$

Ce qui se traduit $f = \mathrm{Id}_\mathrm{P}$. La réciproque est immédiate. ⊲

[1] Sous la seule réserve, évidente que le membre de gauche ait un sens.

§ 15. Repère projectif

Définition : soit P un espace projectif de dimension n, on appelle *repère projectif* de P la donnée de $n+2$ points tels que $n+1$ quelconques d'entre eux engendrent P.

Exemple : un repère projectif est constitué :

- pour une droite, de trois points distincts ;
- pour un plan, de quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés ;
- pour un espace projectif de dimension trois, de cinq points, tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires.

(15-1) Lemme : pour qu'une homographie de GP(E) soit l'application identique, il suffit qu'elle laisse invariants les points d'un repère projectif.

Démonstration : étant donné un espace projectif $P=p(E)$, on en considère $n+2$ points :

$$A_0=p(e_0) \;\;,\;\; A_1=p(e_1) \;\;,\;\; \dots \;\;,\;\; A_{n+1}=p(e_{n+1})$$

formant un repère projectif. Comme $A_0, A_1, \dots, A_n$ engendrent P, les $n+1$ vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E. Il existe donc $n+1$ scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$, tels que :

$$e_{n+1}=a_0e_0+a_1e_1+\dots+a_ne_n.$$

Comme, de plus, A_{n+1} n'appartient pas au sous-espace projectif engendré par n points, choisi parmi les autres, e_{n+1} n'appartient à aucun des sous-espaces vectoriels engendrés par $n-1$ vecteurs choisis parmis $e_0, e_1, \dots, e_n$. On en déduit qu'aucun des scalaires a_i n'est nul. On peut donc remplacer e_i par a_ie_i, pour $i=1$ à $i=n$, de telle sorte que, désormais, on ait :

$$A_0=p(e_0) \;\;,\;\; A_1=p(e_1) \;\;,\;\; A_n=p(e_n) \;\text{ et }\; A_{n+1}=p(e_0+e_1+\dots+e_{n+1}).$$

Soit f une homographie de $P=p(E)$, il existe une application φ de GL(E) telle que $f=p(\varphi)$. Si $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$ sont invariants par f, on se retrouve dans la situation traitée au lemme 14-3. On en conclut que $f=\mathrm{Id}_P$. ⊲

*** Théorème fondamental de la géométrie projective**

(15-2) Théorème : étant donnés deux espaces projectifs $P=p(E)$ et $Q=p(F)$, de même dimension n, un repère $(A_0, A_1, \dots, A_{n+1})$ du premier et $(B_0, B_1, \dots, B_{n+1})$ du second, il existe une application projective de P sur Q, et une seule, qui transforme :

$$A_0 \text{ en } B_0,\; A_1 \text{ en } B_1,\; \dots,\; A_n \text{ en } B_n \text{ et } A_{n+1} \text{ en } B_{n+1}.$$

Démonstration : un peu plus haut, nous avons vu qu'il existe :

- une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de E,
- une base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ de F,

telles que :

$$A_0=p(e_0) \;\;,\;\; A_1=p(e_1) \;\;,\;\; A_n=p(e_n) \;\text{ et }\; A_{n+1}=p(e_0+e_1+\dots+e_{n+1}),$$
$$B_0=p(f_0) \;\;,\;\; B_1=p(f_1) \;\;,\;\; B_n=p(f_n) \;\text{ et }\; B_{n+1}=p(f_0+f_1+\dots+f_{n+1}).$$

Ainsi, l'application linéaire φ qui transforme :

$$e_0 \text{ en } f_0,\; e_1 \text{ en } f_1,\; \dots,\; e_n \text{ en } f_n$$

est un isomorphisme de E sur F. L'homographie $f=p(\varphi)$ est telle que :

$$f(A_0)=B_0 \;\;,\;\; f(A_1)=B_1 \;\;,\;\; f(A_n)=B_n \;\;,\;\; f(A_{n+1})=B_{n+1}.$$

Considèrons deux homographies f et g de P sur Q satisfaisant ces mêmes conditions. La composition de $g^{-1} \circ f$ est une homographie de P, laissant A_0, A_1, ... , A_{n+1} invariants. On a donc $g^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_P$ et ainsi $f = g$. Ce qui complète la démonstration. ◅

*** Coordonnées homogènes**

Soit $P = p(E)$ un espaces projectif de dimension n, la donnée d'une base :

$$(e_0, e_1, \dots, e_n)$$

de E, associe à tout point $M = p(x)$ de P, les coordonnées $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ de x relativement à celle-ci. Ces nombres sont, comme x défini à un scalaire multiplicatif. C'est pourquoi on les appelle *coordonnées homogènes*.

(15-3) Corollaire : le choix d'un repère projectif et l'affectation arbitraire à ses sommets des coordonnées homogènes :

$$(1,0,\dots,0)\ ,\ (0,1,\dots,0)\ ,\ \dots\ ,\ (0,0,\dots,1) \text{ et } (1,1,\dots,1)$$

définit, pour tout point de P, un système unique de coordonnées homogènes.

Démonstration : les coordonnées homogènes sont données par l'unique homographie de P sur $p(\mathbf{K}^{n+1})$ qui remplit ces conditions. ◅

*** Equation d'un sous-espace projectif**

Soit $P = p(E)$ un espace projectif, la donnée d'un repère projectif de P définit une base de E – à un scalaire multiplicatif près. Considérons un sous espace projectif Q, de dimension m, de P. Il existe un sous-espace vectoriel F de E, de dimension $m+1$ et tel que $Q = p(F)$. Relativement à la base de E, F admet une équation de la forme :

$$AX = 0$$

où A désigne une matrice à $n+1$ colonnes de rang $r = (n+1) - (m+1) = m - n$. Cette équation étant homogène, est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice X soit celle des coordonnées homogènes d'un point de $Q = p(F)$.

*** Présentation matricielle des homographies**

Soit $P = p(E)$ et $Q = p(F)$ deux espaces projectifs, de même dimension n, rapportés, chacun, à un repère projectif donné. On considère une homographie $f = p(\varphi)$ de P sur P'. Relativement aux bases associées aux repères, φ est décrite par la relation matricielle :

$$Y = AX.$$

où X désigne la matrice des coordonnées du vecteur courant de E, A est une matrice carrée d'ordre $n+1$, inversible. Cette relation décrit aussi bien l'homographie f, en considérant que X est la matrice des coordonnées homogènes du point courant de P et Y la matrice des coordonnées homogènes de son image par f.

En résumé

Un repère projectif est constitué :

- pour une droite, de trois points distincts ;
- pour un plan, de quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés ;
- pour un espace projectif de dimension trois, de cinq points, tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires :
- ...

L'affectation arbitraire à ses sommets des coordonnées homogènes :

$A_0 : (1,0,0,\ldots)$, $A_1 : (0,1,0,\ldots)$, $A_2 : (0,0,1,\ldots)$, ... , $A_{n+1} : (1,1,1,\ldots)$

détermine, les coordonnées homogènes de tous les autres points.

Étant donnés deux espaces projectifs, de même dimension, toute application bijective entre les sommets d'un repère de l'un et d'un repère de l'autre définit une homographie, et une seule.

§ 16. Liaison entre espace projectif et espace affine

*** Complétion projective d'un espace affine**

Étant donné un espace affine $\mathscr{E}$, de dimension n, la section 7 de "géométrie affine" à montré que $\mathscr{E}$ est un hyperplan affine de l'espace vectoriel $\mathscr{E}^{\mathrm{v}}$, isomorphe à $\mathrm{E} \times \mathbf{K}$, où E désigne la direction de $\mathscr{E}$ et $\mathbf{K}$ son corps de scalaires. On choisit un repère affine $(\mathrm{O}, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$, il est toujours possible de former une base :

$$(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}) \text{ de } \mathscr{E}^{\mathrm{v}},$$

Dans ces conditions :

- tout point de $\mathscr{E}$, se voit affecté un jeu, unique, de coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_n)$,
- tout point de l'espace projectif $\mathrm{P} = p(\mathscr{E}^{\mathrm{v}})$, se voit affecté un jeu, unique, de coordonnées homogènes $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{X}_{n+1})$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} j : \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ \mathrm{M} & \mapsto & j(\mathrm{M}) \end{array}$$

qui associe, au point M de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, le point de coordonnées homogènes $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Cette application est injective et admet pour image :

$$\mathrm{Im}\, j = \mathrm{P} - \mathrm{H}$$

où H est l'yperplan d'équation $\mathrm{X}_{n+1} = 0$. Autrement dit :

$$\mathrm{H} = p[\mathrm{esp}(e_1, \ldots, e_n)] = p(\mathrm{E}).$$

En identifiant $\mathscr{E}$ à son image par j, il apparaît que :

$$\mathrm{P} = \mathscr{E} \cup p(\mathrm{E}).$$

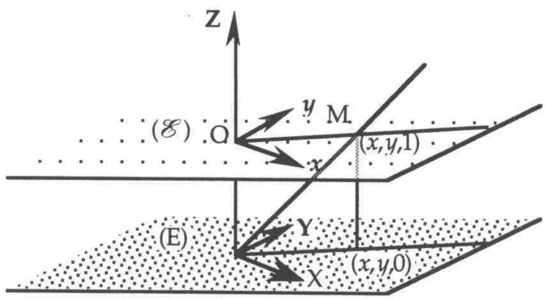
Dans cette opération, le repère projectif utilisé pour P est constitué de :

$$p(e_1) \;,\; \ldots \;,\; p(e_n) \;,\; p(e_{n+1}) \;,\; p(e_1 + \ldots + e_n + e_{n+1}).$$

Définition : on appelle P le *complété projectif* de $\mathscr{E}$.

Interprétation dans le cas d'un plan.

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine réel, de direction E rapporté au repère $(\mathrm{O}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Le point de coordonnées cartésiennes (x, y) s'identifie au point de coordonnées homogènes $(x, y, 1)$ du plan projectif $\mathrm{P} = p(\mathrm{E} \times \mathbf{K})$. Les points échappant à cette idenditification forment la droite d'équation $\mathrm{Z} = 0$ qui s'interprète alors comme étant l'ensemble des points à l'infini de $\mathscr{E}$.



Le repère projectif associé au repère affine donné se constitue comme suit :

- ses deux premiers sommets : $p(\boldsymbol{i}\,,\,0)$ et $p(\boldsymbol{j}\,,\,0)$, s'interprètent comme les points à l'infini des directions engendrées par $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$,
- le troisième est l'origine O du repère affine,
- le dernier est le point de coordonnées $(1, 1)$ relativement à ce même repère.

Cette association généralise l'introduction des points à l'infini telle que nous les avons entendu au chapitre I.

*** Repère affine associé à un repère projectif**

Vérifions que cette correspondance fonctionne ausssi dans l'autre sens. Étant donné un espace projectif P, on en considère un hyperplan $H = p(E)$. On choisit un repère projectif $(A_0, \ldots, A_n, A_{n+1})$ de P, tel que $A_0, \ldots, A_{n-1}$ engendrent H. Cet hyperplan admet alors pour équation $X_{n+1} = 0$. Ainsi $P - H$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ telles que $X_{n+1} \neq 0$. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine arbitraire, de dimension n, rapporté à un repère donné, On considère l'application suivante : :

$$\begin{aligned} j' : P - H &\longrightarrow \mathscr{E} \\ M &\mapsto j'(M) \end{aligned}$$

qui, au point M de coordonnées $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ associe le point $j'(M)$ de coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$$

Cette application est bijective, elle identifie $P - H$ à $\mathscr{E}$. En le faisant apparaître comme étant un espace affine de direction E, rapporté au repère formé des $n+1$ points de P admettant, relativement au repère donné au début, pour coordonnées homogènes - dans l'ordre :

$$(1, 0, \ldots, 0, 1) \ , \ (0, 1, \ldots, 0, 1) \text{ et } (0, 0, \ldots, 1, 1)$$

On note que si l'on applique la première construction à partir de $\mathscr{E}$, on retrouve P.

*** Remarque sur les coordonnées barycentriques**

Considérons un espace affine $\mathscr{E}$ et son complété projectif P. Les coordonnées barycentriques, relativement à un repère affine $(A_0, \ldots, A_n)$ donné de $\mathscr{E}$, sont des homogènes au sens qui est désormais le nôtre. Le sommet supplémentaire du repère projectif est imposé par la structure affine donnée au départ. C'est l'isobarycentre des sommets du repère. Dans ce mode de repérage, l'hyperplan de l'infini admet pour équation :

$$X_1 + \ldots + X_n = 0 \ [1].$$

*** En résumé**

(16-1) <u>Théorème</u>.

- Si $\mathscr{E}$ est un espace affine, de direction E, $\mathscr{E} \cup p(E)$ est un espace projectif dont l'hyperplan $p(E)$ s'interprète comme ensemble des points à l'infini de $\mathscr{E}$.
- Si P est un espace projectif, pour tout hyperplan $H = p(E)$ de P, $P - H$ est un espace affine de direction E.

1 C'est une illustration remarquable des deux cas appraissant lors de l'étude de la fonction vectorielle de Leibniz.

§ 17. Prolongement projectif des transformations affines

*** Homographie induite par une transformation affine**

Étant donnés deux espaces afines $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, de même dimension, on considère une application affine bijective f de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$. On chosit un repère de $\mathscr{E}$, les images de ses sommets forment un repère de $\mathscr{E}'$. L'image par f de tout point de $\mathscr{E}$ est alors le point de $\mathscr{E}'$ qui admet les mêmes coordonnées cartésiennes que lui.

Soit P et P′ les complétés projectifs de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, on les rapporte aux repères projectifs associés aux repères affines considérés ci-dessus. L'application $\hat{f}$ qui, à tout point de P, associe le point de P′ ayant les même coordonnées homogènes, est une homographie de P sur P′ qui prolonge f.

*** Application affine induite par une application projective**

Étant donnés deux espaces projectifs P et P′, de même dimension n, on considère une homographie f de P sur P′. Soit H un hyperplan de P et H′, son image par f, on choisit un repère projectif de P dont les n premiers points engendrent H. Son image par f est un un repère projectif de P′. Tout point M de P est alors affecté des mêmes coordonnées homogènes que $M' = f(M)$.

Considérons les deux espaces affines $\mathscr{E} = P - H$ et $\mathscr{E}' = P' - H'$, rapportés aux repères affines déduit des repères projectifs considérés. Il est clair que f induit l'application de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$ qui associe les points ayant mêmes coordonnées cartésiennes. Elle est donc affine.

*** Groupe affine et groupe projectif**

(17-1) <u>Proposition</u> : étant donnés deux espaces projectifs P et P′, de même dimension soit H et H′ deux hyperplans, respectivement, de P et P′, on note :

$$\mathscr{E} = P - H \text{ et } \mathscr{E}' = P' - H'.$$

On a les propriétés suivantes :

- toute application affine bijective f, de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$, se prolonge en une homographie h, de P sur P′, de façon unique.
- toute homographie h, de P sur P′, telle que $h(H) = H'$, induit une application affine f de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$.

Dans les les deux cas, l'application induite de H sur H′ est $p(\vec{f})$ [1].

On retiendra surtout ce qui suit.

(17-2) <u>Théorème</u> : étant donné un espace projectif, soit H l'un quelconque de ses hyperplans H :

- le groupe affine de $\mathscr{E} = P - H$ est le sous-groupe des homographies de P qui laissent H globalement invariant,
- les dilatations de $\mathscr{E}$ sont les homographies qui laissent invariant tout point de H.

1 Tout est dit, ou presque dans la remaque qui clôt la section 2.

§ 18. La droite projective

On s'assure que le point de vue adopté au chapitre II entre dans le cadre théorique qui est désormais le notre.

*** La droite projective standard**

On convient d'appeler $\hat{\mathbf{K}} = p(\mathbf{K}^2)$ la *droite projective standard* de K. Commençons par noter que si $p(X, Y)$ est un élément de $p(K^2)$, tel que $Y \neq 0$, le quotient $x = \frac{X}{Y}$ est un élément de K indépendant du représentant choisi. Il est donc possible d'identifier $p(K^2)$ au corps K auquel on ajoute le point à l'infini $p(1, 0)$ qu'on note ∞, au moyen de l'application suivante :

$$p(X, Y) \mapsto \begin{cases} x = \dfrac{X}{Y} & \text{si } Y \neq 0 \\ \infty & \text{si } Y = 0 \end{cases}$$

On convient donc que, désormais $\hat{K} = K \cup \{\infty\}$.

*** Le groupe projectif standard GP($\hat{\mathbf{K}}$)**

Définition : on convient d'appeler *groupe projectif standard* de K l'ensemble GP($\hat{\mathbf{K}}$) des homographies de $\hat{\mathbf{K}}$.

Soit f une homographie de $\hat{\mathbf{K}}$, il existe un automorphisme φ de $\mathbf{K}^2$, tel que $f = p(\varphi)$. Cette application s'exprime, relativement à la base standard $((1, 0), (0, 1))$, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ où } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Notons x et x' le éléments de $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ respectivement associées à (X, Y) et (X', Y'). Si $Y' \neq 0$, on a :

$$x' = \frac{X'}{Y'} = \frac{\alpha X + \beta Y}{\gamma X + \delta Y}.$$

Ce qui, compte tenu des conventions posées nous reporte à la section 6.

(18-1) • Si $\gamma \neq 0$:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} & \text{si } x \neq -\dfrac{\delta}{\gamma} \text{ et } x \neq \infty \\ f(-\dfrac{\delta}{\gamma}) = \infty \\ f(\infty) = \dfrac{\alpha}{\gamma} \end{cases}$$

• Si $\gamma = 0$, alors $\delta \neq 0$ et :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\delta} & \text{si } x \neq \infty \\ f(\infty) = \infty \end{cases}$$

(18-2) <u>Théorème</u> : soit f une homographie de GP($\hat{\mathbf{K}}$), ou bien :

- $f(\infty) \neq \infty$, f est alors le prolongement naturel à $\hat{\mathbf{K}}$, d'une fonction homographique de K,
- $f(\infty) = \infty$, f est alors le prolongement à $\hat{\mathbf{K}}$, d'une application affine de K.

*** Abscisse projective**

On considère une droite projective $d = p(\mathrm{E})$, sur **K**, le choix d'un repère projectif (A, B, C) s'accompagne du choix d'une base (e_0, e_1) telle que :

$$\mathrm{A} = p(e_0) \ , \ \mathrm{B} = p(e_1) \ \text{ et } \ \mathrm{C} = p(e_0 + e_1).$$

Ce qui définit sans ambiguïté l'homographie r de d dans $p(\mathbf{K}^2)$ telle que :

$$r(\mathrm{A}) = p(1,0) = \infty \ , \ r(\mathrm{B}) = p(0,1) = 0 \ \text{ et } \ r(\mathrm{C}) = p(1,1) = 1$$

et, plus généralement :

$$r : \mathrm{M} = p(\mathrm{X}e_0 + \mathrm{Y}e_1) \mapsto r(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} \quad \text{si } \mathrm{Y} \neq 0.$$

<u>Définition</u> : $r(\mathrm{M})$, ainsi défini, s'appelle *l'abscisse projective* de M, relativement au repère (A, B, C).

Si d est rapporté à un repère donné et A, B, C sont trois points distincts, d'abscisses projectives respectives a, b, c, on exprime l'abscisse projective relativement à (A, B, C) par l'homographie de $\hat{\mathbf{K}}$:

$$x \mapsto x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \text{telle que : } a \mapsto \infty \ , \ b \mapsto 0 \ , \ c \mapsto 1.$$

Les coefficients vérifient donc les relations suivantes :

$$\gamma a + \delta = 0 \ , \ \alpha b + \beta = 0 \ \text{ et } \ \alpha c + \beta = \gamma c + \delta.$$

En reportant les deux premières dans la troisième, il vient :

$$\alpha(c-b) = \gamma(c-a)$$

puis :

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{x + \frac{\beta}{\alpha}}{x + \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{x-b}{x-a} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b}$$

Finalement, on obtient la relation :

$$x' = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b},$$

On retrouve ainsi le birapport qui désormais prend pour définition.

<u>Définition</u> : étant donnés quatre points dictincts A, B, C et D, d'une droite projective, on appelle birapport et l'on note :

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}].$$

l'abscisse projective de D, relativement au repère (A, B, C).

(18-3) <u>Théorème</u> : étant données deux droites projectives d et d', une application f de d dans d' est une homographie si, et seulement si, c'est une bijection qui conserve le birapport.

<u>Démonstration</u> : soit f une bijection de d sur d', on considère trois point distincts A, B, C de d, on note A', B', C' leurs images par f. Comme f est bijective, on peut considérer l'homographie g, de d' sur $\hat{\mathbf{K}}$, qui transforme A', B' et C' en ∞, 0 et 1.

Si f est une homographie, $g \circ f$ est l'homographie de d sur $\hat{\mathbf{K}}$ qui transforme A, B et C en ∞, 0 et 1. Il résulte de la définition que, pour tout point M de d, si l'on note D' son image par f, on a :

$$[A, B, C, M] = g \circ f(M) = g(M') = [A', B', C', M']$$

Réciproquement, si f conserve le birapport, comme nous venons de monter que l'homographie h de d' sur d qui transforme A', B' et C' en A, B et C, conserve le birapport, il en va de même pour $h \circ f$. Or, cette bijection de d laisse invariants les sommets du repère A, B, C et comme elle conserve le birapport, elle respecte l'abscisse projective. C'est donc l'application identique. Il s'ensuit que $f = h^{-1}$. On a donc bien une homographie. ◅

Remarque : il apparaît ainsi que les transformations projectives qui laissent un point invariant, se caractérisent par la conservation d'un rapport simple quand ce point est pris comme point à l'infini de la droite affine qu'il complète.

*** Homographies à deux points doubles**

Revenons sur ce qui a été traité sur ce sujet au chapitre II.

La donnée d'une homographie f, d'une droite projective $d = p(E)$, est aussi celle d'un automorphisme φ de E tel que $f = p(\varphi)$. Nous savons qu'un point de d est invariant par f s'il est représenté par un vecteur propre de φ.

Si f admet deux points fixes distincts A et B, on considère deux vecteurs e_0 et e_1, tels que :

$$A = p(e_0) \text{ et } B = p(e_1),$$

(e_0, e_1) est alors une base de E, formée de vecteurs propres de f. Notons λ et μ, les valeurs propres associées, si ces scalaires sont égaux, f est l'application identique, dans le cas contraire, pour tout autre point M, on a :

$$M = p(Xe_0 + Ye_1)$$

où X et Y sont des scalaires non nuls. Ce qui donne :

$$f(M) = p(\varphi(Xe_0 + Ye_1)) = p(X\varphi(e_0) + Y\varphi(e_1)) = p(X\lambda e_0 + Y\mu e_1)$$

Dans ces conditions, il vient :

$$A = p(Xe_0) \;,\; B = p(Ye_1) \;,\; M = p(Xe_0 + Ye_1) \text{ et } f(M) = p(\lambda Xe_0 + \mu Ye_1)$$

Il découle alors de la définition du birapport que :

$$[A, B, M, f(M)] = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Ce qui nous permet de reformuler la proposition 11-2, comme suit.

(18-4) Proposition : étant donnée une homographie f, d'une droite projective d qui s'exprime $f = p(\varphi)$. Si e_0 et e_1 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants de φ, associés aux valeurs propres λ et μ, les points $A = p(e_0)$ et $B = p(e_1)$ sont invariants par f et, pour tout point M de d, on a :

$$[A, B, M, f(M)] = \frac{\lambda}{\mu}.$$

N.B. Tous les résultats exposées dans le cadre des sections 11 et 12 valent dans le cas le plus général. Notamment le fait qu'une involution est soit elliptique, soit hyperbolique. Dans ce dernier cas, il s'agit de la conjugaison harmonique par rapport aux points fixes.

*** Homographies de la droite projective complexe**

Gardons les notations précédentes et envisageons le cas où le corps de base est celui des nombres complexes. Alors, ou bien φ admet deux valeurs propres distinctes, auquel cas, f admet deux points doubles, ou bien il existe une valeur propre double. Dans ce cas, si f n'est pas l'application identique, elle admet un point double unique.

On retiendra, en particulier ce qui suit.

(18-5) Proposition : toute homographie d'une droite projective complexe admet un ou deux points fixes,

*** Homographies réelles de la droite projective complexe**

Afin d'éviter des difficultés de nature formelle, limitons nous à la droite projective standard $\hat{\mathbf{R}}$. L'inclusion $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$ induit un plongement naturel de $\hat{\mathbf{R}} = p(\mathbf{R}^2)$ dans $\hat{\mathbf{C}} = p(\mathbf{C}^2)$ (1). Toute homographie f de GP($\hat{\mathbf{R}}$) se prolonge, de façon unique, en une homographie de GP($\hat{\mathbf{C}}$). Il suffit pour cela de substituer des arguments complexes dans l'expression :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

qui décrit f relativement au repère standard $(\infty, 0, 1)$.

Soit $f = p(\varphi)$ une homographie de GP($\hat{\mathbf{R}}$), si les valeurs propres de φ sont réelles, ce qui a été établi au point précédent s'applique mot pour mot. Dans le cas contraire, les valeurs propres sont imaginaires conjuguées et les vecteurs propres qui leur sont associés sont conjugués. Il leur correspond des points conjugués. Notons ces valeurs propres $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, les deux points invariants associés A et B. La proposition 18-4 s'applique et montre que :

$$\forall M \in D \quad [A, B, M, f(M)] = e^{2i\theta}.$$

(18-6) Proposition : toute homographie f, de GP($\hat{\mathbf{R}}$), admet soit :

- deux point fixes réels A et B, auquel cas il existe un réel, non nul, k tel que :
$$\forall M \in d,\ [A, B, M, f(M)] = k.$$
- deux point fixes imaginaires conjuguées A et $\overline{A}$, auquel cas il existe un réel θ tel que :
$$\forall M \in D\ [A, \overline{A}, M, f(M)] = e^{2i\theta}.$$
- un point fixe unique, il est réel.

---

1 Il n'y a pas lieu, d'éprouver d'angoisse métaphysique à ce sujet. Il s'agit du plongement usuel de **R** dans **C**, auxquels on adjoint un point à l'infini commun.

Chapitre IV. Le plan projectif

§ 19. Le modèle abstrait

On résume à grand traits les acquis concernant le plan projectif $P = p(E)$.

- E est un espace vectoriel de dimension 3 sur **K** (**R** ou **C**), les points de P sont les classes de la forme :
$$p(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K} - \{0\}\} \quad \text{où} \quad x \in \mathbf{E} - \{0\}.$$
- **Repère projectif** : est constitué de quatre points de P, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.
- **Coordonnées homogènes** : l'affectation arbitraire des coordonnées :
$$(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (0,0,1) \text{ et } (1,1,1)$$
aux sommets d'un repère projectif détermine pour chaque point de P ses coordonnées homogènes.
- **Homographies** : bijections entre plans projectifs conservant l'alignement.
  • De façon générale, on les décrit comme applications induites par les isomorphismes d'espaces vectoriels.
  • Si deux plans P et Q sont rapportés à des repères, toute homographie de P sur Q s'exprime, via les coordonnées homogènes sous la forme :
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$
ou, de façon condensée condensée :
$$\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}' = A.\mathscr{X},$$
où A est une matrice carrée, d'ordre 3, inversible.
  • Toute homographie est entièrement déterminée par la donnée d'une bijection entre les sommets de deux repères.
- **Le groupe projectif** : se décrit comme suit
$$GP(P) = GL(E)/\mathbf{K}^*Id_E.$$
Le prototype est le groupe des matrices 3×3, inversibles, définies à un scalaire multiplicatif près.
- **Structure affine induite** : le choix d'une droite d, induit sur $\mathscr{E} = P - d$ une structure de plan affine. Les éléments de $GA(\mathscr{E})$ sont les transformations de GP(P) qui laissent d globalement invariante.
  • Analytiquement cette proppriété se schématise comme suit. Le repère projectif étant choisi de telle sorte que d admette pour équation $Z = 0$ la transition s'exprime, schématiquement :
$$Z \neq 0 \text{ et } (X, Y, Z) \leftrightarrow (x, y) = (\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z})$$
  • Le repère affine ou sont comptées ces coordonnées cartésiennes de $\mathscr{E}$ est donc constitué des points de coordonnées homogènes :
$$(0,0,1)\ ,\ (1,0,1) \text{ et } (0,1,1).$$

§ 20. La dualité dans le plan

Nous avons désormais le moyen de justifier, dans les formes, ce que nous avions appelé, provisoirement, le "principe de dualité".

Comme précédemment, E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps **K**. On se souvient que les applications linéaires de E dans son corps de base forment un espace vectoriel, appelé *expace dual* de E et noté E* ([1]), de même dimension que E. Du point de vue formel, $p(E^*)$ – naturellement noté P* – est donc aussi un plan projectif. Considérons un élément φ de E*, autrement dit une forme linéaire. Si elle est non nulle, c'est une application linéaire de rang 1, la dimension de son noyau est donnée pas la règle familière

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im}\varphi = 3 - 1 = 2.$$

Autrement dit, le noyau de φ est un plan vectoriel. De plus ce noyau est commun à toute les formes linéaires de la forme $k\varphi$, pour tout scalaire non nul k. Cette droite est donc associée à l'élément $p(\varphi)$ de P*. On peut ajouter **et à lui seul**. Afin de s'en convaincre choisissons une base de E et notons (X, Y, Z) les coordonnées de l'élément courant de E, φ est alors décrite par la relation :

$$(X, Y, Z) \mapsto uX + vY + wZ.$$

L'équation de son noyau s'exprime naturellement :

$$uX + vY + wZ = 0.$$

Considérons une autre forme linéaire φ' de E*, de coefficients (u', v', w'). Si φ et φ' sont linéairement indépendantes, le sytème linéaire :

$$\begin{cases} uX + vY + wT = 0 \\ u'X + v'Y + w'T = 0 \end{cases}$$

a pour rang 2. L'ensemble de ses solutions est alors une droite vectorielle de E. En conséquence, on a :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi' \iff p(\varphi) = p(\varphi').$$

Comme tout sous espace de dimension 2 de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle, il existe une bijection entre les droites de P et P*.

<u>Conclusion</u> : P* s'identifie à l'ensemble des droites de P, interprété comme suit :

$$\{p(\ker\varphi) \mid \varphi \in E^* - \{0\}\}.$$

<u>Convention</u> : dans ces conditions, si une droite projective D de P, admet pour équation $uX + vY + wZ = 0$, on dira que (u, v, w) est un système de *coordonnées homogènes* de D ([2]).

Le principe d'incidence allait de soi au début, du point de vue qui est désormais le nôtre, il devient un théorème banal – mais essentiel.

(19-1) <u>Théorème d'incidence</u> : étant donnés un point O et une droite d ne passant pas par O, l'application f qui, à tout point M de d, associe la droite (OM) est une homographie de d sur le faisceau O* des droites passant par O.

1 Se reporter, si nécessaire, au cours d'algèbre linéaire.

2 Il s'agit là des coordonnées homogènes de φ, relativement à la base duale de celle choisie pour E.

<u>Démonstration</u> : il est toujours possible de choisir une base de E de telle sorte que les coordonnées de O soient (0, 0, 1) et d admette pour équation $T=0$. Les coordonnées homogènes du point courant de Δ seront donc de la forme $(X,Y,0)$. Notons d la droite (OM), si d admet pour coordonnées homogènes (u,v,w), la condition O et M appartiennent à d s'exprime :

$$w=0 \text{ et } uX+vY=0.$$

On a donc, à un scalaire multiplicatif près :

$$u=Y\ ,\ v=-X \text{ et } w=0.$$

Ainsi, f associe au point de coordonnées homogènes $(X,Y,0)$ la droite de coordonnées homogènes $(Y,-X,0)$. Cette correspondance étant linéaire en X et Y et bijective, l'application f est projective. ◅

*** Correspondance entre un repère et son dual**

On considère un plan projectif $P=p(E)$. Le choix d'un repère projectif (A,B,C,D), de P :

$$A=p(e_0)\ ,\ B=p(e_1)\ ,\ C=p(e_2)\ ,\ D=p(e_0+e_1+e_2),$$

induit le choix d'un repère projectif de P* :

$$p(e_0^*)\ ,\ p(e_1^*)\ ,\ p(e_2^*)\ ,\ p(e_0^*+e_1^*+e_2^*),$$

formé des droites d'équations respectives :

$$X=0\ ,\ Y=0\ ,\ Z=0\ ,\ X+Y+Z=0,$$

C'est-à-dire des droites :

$$(BC)\ ,\ (CA)\ ,\ (AB)\ ,\ \Delta.$$

où Δ coupe les trois précédentes aux points de coordonnées respectives :

$$(0,1,-1),\ (-1,0,1) \text{ et } (1,-1,0).$$

La droite d'équation $UX+UY+WZ=0$ admet pour coordonnées homogènes (U,V,W) relativement à la base (e_0^*,e_1^*,e_2^*) de E*, duale de celle choisie pour E.

§ 21. L'homologie

Le cadre est celui d'un plan projectif P quelconque. Ce qui suit montre le profit qu'on tire de la possibilité qu'on a d'en distinguer **une** droite arbitraire d et de la considérer comme **la** droite de l'infini du plan affine $P-d$.

(21-1) Proposition : étant donnée une homographie f de P, les deux propositions qui suivent sont équivalentes :

(1) il existe une droite dont tous les points sont invariants par f,

(2) il existe un faisceau dont toute droite est globalement invariante par f.

Démonstration : si tous les points d'une droite d sont invariants par f, cette application induit une dilatation du plan affine $P-d$. Si cette dilatation est une homothéthie, elle laisse invariante le faisceau des droites passant par son centre. Sinon, c'est une translation et alors elle laisse invariante toutes les droites passant par un même point O de d, interprêté, rappelons le, comme droite de l'infini du plan affine $P-d$.

On applique ce qui vient d'être démontré au dual de P, on obtient la réciproque. ◅

Définition : étant donnée une droite d et un point O de P, toute homographie qui laisse invariants les points de d et les droites passant par O, autre que l'application identique de P, est appelée :

- *homologie* si O n'appartient pas à d,
- *élation* dans le cas contraire.

Dans les deux cas O et d, sont appelés le centre et l'axe de la transformation.

(21-2) Proposition : étant donné un point O, une droite d et deux points A et A' de P, différents de O et non situés sur d, il existe une homologie ou une élation, de centre o, d'axe d, qui transforme M en M'. Elle est unique

Démonstration : il existe une unique dilatation de $P-d$ qui transforme A en A'. ◅

(21-3) Proposition : étant donnée une homologie de centre O et d'axe d, on note M le point courant de P et M_0 le point commun à d et (OM_0). Il existe un scalaire k, différent de 0 et de 1, tel que pour tout point M, différent de O et de M_0, on ait :

$$[M_0, O, M, f(M)] = k$$

Démonstration : sur $P-d, f$ définit une homothétie de centre O, de rapport k, on a donc sur la droite (OM) :

$$[M_0, O, M, M'] = k.$$

car M_0 est le point à l'infini de la droite affine (OM). ◅

Définition : si $k=-1$, l'homologie dite *harmonique*.

Il est clair que toute homologie harmonique est une involution, la réciproque est une propriété remarquable.

(21-4) Proposition : toute involution de P est une homologie harmonique.

Démonstration : étant donnée une involution f de P, on considère deux points non invariants M et N, on note M′ et N′ leur images par f. Comme f échange M avec M′ et N avec N′, les droites (MM′) et (NN′) sont invariantes par f. Il est possible de les supposer distinctes – il suffit pour cela de choisir N n'appartenant pas à (MM′). Soit O le point d'intersection de (MM′) et (NN′), ce point est invariant car son image appartient à ces deux droites. Ainsi, f induit une involution sur (MM′) et sur (NN′). Chacune d'elles laisse O invariant, elle admet donc un second point fixe distinct de O qu'on note, A pour (MM′) et B pour (NN′) (cf. 11-3). Dans ces conditions, on a :

$$[A,O,M,M'] = -1 = [B,O,N,N'].$$

Considérons l'homologie harmonique g de centre O, d'axe (AB). Elle échange M avec M′ et N avec N′. Elle coïncide donc avec f sur le repère projectif constitué de M, N, M′ et N′. On sait alors que $f = g$. ◅

*** Interprétations affine de l'homologie**

Si le plan P est donné affine, sa droite de l'infini est bien définie.

- Considérons une homologie f de P, de centre O et d'axe d.

  1. Si $d = \infty_P$, son centre O est à distance finie, nous savons déjà que f est une homothétie de centre O. On retrouve la forme classique de son rapport à partir du birapport intervenant en 21-3 Il s'exprime alors :

  $$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k.$$

  2. Si le centre O est un point à l'infini, l'axe d n'est pas la droite de l'infini. La direction des droites (MM′) reste fixe et le birapport en question :

  $$[M_0, O, M, M'] = k$$

  devient :

  $$\frac{\overline{M_0M'}}{\overline{M_0M}} = [O, M_0, M, M'] = \frac{1}{k}.$$

  Ce qui montre que f est alors l'affinité d'axe d, de rapport $\frac{1}{k}$ dans la direction de O.

  En particulier, l'homologie harmonique décrit, à la fois les symétries centrales et les symétries par rapport aux droites.

- Considérons une élation d'axe d, son centre O est un point de d.

  • Si son axe est la droite de l'infini, nous savons que f est une translation.

  • Si son centre est le seul point à l'infini de son axe, f est alors une transvection [1].

(21-5) Théorème : toute transformation affine admettant deux points fixes (à distance finie), est une affinité ou une transvection.

Démonstration : soit f une transformation affine laissant invariants deux points distincts A et B, on note d la droite (AB). Comme ces points forment un repère affine de d, tout point de d est invariant par f. On sait alors que f est une homologie ou une élation d'axe d. Comme la droite de l'infini est invariante et différente de d, elle passe par le centre. On en déduit que f est une affinité si ce point n'appartient pas à d et une transvection dans le cas contraire. ◅

---

1 cf. géométrie affine : exercice 10·

*** Réduction d'une homographie réelle**

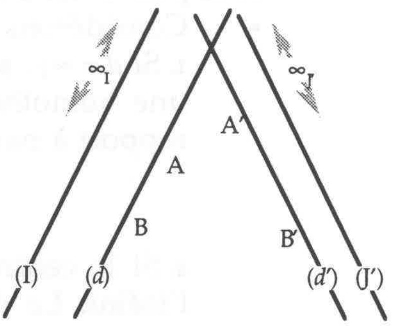
Ce qui suit précise précise de façon spectaculaire l'effet des homographies sur les figures de la géométrie usuelle.

(21-6) Théorème : toute homogaphie du plan projectif usuel ([1]) se décompose en produit d'une similitude et d'une homologie.

Démonstration : soit f une homographie du plan, si c'est une transformation affine, on choisit arbitrairement deux points distincts A et B, leurs images par f sont deux points distincts A′ et B′. Soit s l'une des similitudes qui transforment A en A′ et B en B′, $h = s^{-1} \circ f$ est une transformation affine laissant A et B invariants, c'est donc une affinité, ou une transvection. Dans ce dernier cas, il suffit de choisir l'autre similitude, ce qui revient à composer h avec la symétrie d'axe (AB), il est facile de vérifier que l'application obtenue est alors une affinité.

Si f n'est pas une transformation affine, la droite de l'infini est alors l'image d'une droite I et elle admet pour image une droite J′, toutes deux situées à distance finie. Il est clair que :

$$f(\infty_I) = \infty_{J'}.$$



Il s'ensuit que si d est une parallèle à I, $d' = f(d)$ est une parallèle à J′, l'application induite :

$$\begin{aligned} f_0 : d &\longrightarrow d' \\ M &\longmapsto f(M) \end{aligned}$$

respectant les point à l'infini est une application affine.

On choisit arbitrairement deux points A et B de d, soit A′ et B′ leurs images par f. Soit s l'une des deux similitudes qui transforment A en A′ et B en B′, l'application induite par s entre d et d' est f_0. Il s'ensuit que l'homographie :

$$h = s^{-1} \circ f$$

laisse invariants tous les points de (AB). On sait alors que h est une homologie ou une élation d'axe (AB). On conclut comme dans le cas ou f est affine ([2]). ◅

(21-7) Corollaire : toute homographie entre deux plans de l'espace est le produit d'une similitude et d'une homologie.

Démonstration : il suffit de composer l'homographie considérée par une isométrie entre les deux plans. On applique alors le théorème précédent ([3]). ◅

---

1 Le plan affine euclidien, accompagné de ses points à l'inifini,

2 cf. erercice 28.

3 On retrouve cette propriété en filigramme dans nombre des constructions utilisées pour le dessin en perspective.

§ 22. Complexification [1]

* Complexification d'un espace vectoriel

Étant donné un espace vectoriel **réel** E, il est possible de le prolonger en un espace vectoriel complexe par une opération qui généralise le plongement, classique, de la droite réelle dans le corps des nombres complexes.

On note E_c l'ensemble E^2, muni de l'addition naturelle et de l'opération externe suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}\times E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (x+iy,(u,v)) & \mapsto & (xu-yv\,,xv+yu) \end{array}$$

C'est une formalité de vérifier ce qui suit.

(22-1) <u>Proposition</u> : E_c est un espace vectoriel sur **C** dont tout élément s'exprime de façon unique sous la forme :

$$(u\,,v)=(u\,,0)+i(v\,,0)$$

Ceci nous conduit à identifier $(u\,,0)$ à u et $(0\,,v)$ à iv. Ainsi, tout élément de E_c s'exprime, de façon unique, sous le forme :

$$u+iv \quad \text{où} \quad (u\,,v)\in E^2.$$

Cette écriture, identifie E à la partie de E_c qui est stable par l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & E_c & \longrightarrow & E_c \\ & u+iv & \mapsto & u-iv \end{array}$$

qu'on appelle naturellement la *conjugaison*. L'assertion qui suit découle directement des définitions.

(22-2) <u>Proposition</u> : la conjugaison est involutive et, pour tous vecteurs x et y de E_c, pour tout nombre complexe λ, on a :

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y) \quad \text{et} \quad \sigma(\lambda x)=\bar{\lambda}\sigma(x)$$

Les éléments de E sont les vecteurs *réels* de E_c et les éléments $u+iv$, tels que $v\neq 0$ sont dit *imaginaires* [2].

Les propositions qui suivent découlent des définitions, de façon directe.

(22-3) <u>Proposition</u> : toute base de E, est aussi une base de E_c.

(22-4) <u>Proposition</u> : tout automorphisme φ, de GL(E) s'étend, de façon unique, à E_c sous la forme suivante :

$$\varphi_c : u+iv \mapsto f_c(u+iv)=\varphi(u)+i\varphi(v)$$

et donne un automorphisme GL(E_c).

Il découle de l'unicité que GL(E) s'identifie au sous-groupe de GL(E_c) formé par les transformations ainsi obtenues. On les appelle automorphismes *réels* de E_c. Ils se caractérisent comme suit.

(22-5) <u>Proposition</u> : un automorphisme de GL(E_c) est réel si, et seulement si, il commute avec la conjugaison.

---

1 Cette partie peut être laisée de côté en première lecture. Elle ne prend en effet tout son sens que par des considérations théoriques – la section suivante en donne un échantillon – et lors d'applications un peu sophistiquées, demandant une bonne pratique de la géométrie projective.

2 Il sera sans incovénient de parler des éléments imaginaires de E.

Démonstration : si φ estune transformation de GL(E), on a toujours :

$$\sigma \circ \varphi(u+iv) = \sigma(\varphi(u)+i\varphi(v)) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \varphi(u-iv) = \varphi \circ \sigma(u+iv).$$

Réciproquement, si φ estune transformation de GL(E_c) telle que $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$, pour tout vecteur réel, on a:

$$\sigma(\varphi(u)) = \sigma \circ \varphi(u) = \varphi \circ \sigma(u) = \varphi(u).$$

De sorte que E est stable par φ qui, de ce fait, induit un automorphisme de E. $\lhd$

*** Complexification d'un plan projectif**

Si $P = p(E)$ est un plan projectif réel, l'application suivante :

$$\begin{aligned} j : p(E) &\longrightarrow p(E_c) \\ p(u) &\mapsto p(u) \end{aligned}$$

est injective, elle identifie P à une partie de $p(E_c)$, qu'on note alors P_c.

(22-6) Proposition : tout repère de P est aussi un repère de P_c.

La conjugaison des vecteurs de E_c, induit une application sur les points de P_c. En effet, si :

$$p(u+iv) = p(u'+iv'),$$

c'est qu'il existe un nombre complexe λ, non nul, tel que :

$$u'+iv' = \lambda(u+iv)$$

et alors, on a :

$$u'-iv' = \bar{\lambda}(u-iv).$$

Il s'ensuit que :

$$p(u-iv) = p(u'-iv').$$

La relation :

$$\sigma(p(u+iv)) = p(u-iv)$$

définit donc une involution de P_c. On la note aussi σ et on l'appelle *conjugaison* des points.

(22-7) Proposition : les points de P sont les points de P_c invariants par la conjugaison.

Démonstration : il est clair que les points de P sont invariants par conjugaison. C'est la réciproque qui pose problème. L'invariance du point $p(u+iv)$ s'exprime par l'égalité :

$$\sigma(p(u+iv)) = p(u+iv)$$

et se traduit : il existe un **nombre complexe** λ, non nul, tel que :

$$u-iv = \lambda(u+iv)$$

Dans ces conditions, on a :

$$u+iv = \sigma(u-iv) = \sigma(\lambda(u+iv)) = \bar{\lambda}(u-iv) = \lambda\bar{\lambda}(u+iv).$$

Comme le vecteur considéré est non nul, ceci entraîne que :

$$\lambda\bar{\lambda} = 1.$$

Il existe donc un nombre complexe μ tel que $\lambda = \frac{\mu}{\bar{\mu}}$ (par exemple, on pose $\lambda = e^{2i\theta}$ et $\mu = e^{i\theta}$). Ce qui donne :

$$\bar{\mu}(u-iv) = \mu(u+iv).$$

Il s'ensuit que :

$$\sigma(\mu(u+iv)) = \mu(u+iv).$$

Ce qui montre que $\mu(u+iv)$ est un vecteur réel et prouve que $p(u+iv)$ est un point réel. $\lhd$

(22-8) <u>Proposition</u> : toute transformation f, de GP(P) s'étend, de façon unique, en un élément de GP(P_c).

Ici encore on parlera des *tranformations projectives réelles* de P pour désigner les éléments de GP(P_c) ainsi définis. Enfin, notons que tout ceci n'a de sens qu'après avoir vérifié la condition qui suit.

(22-9) <u>Proposition</u> : une homographie de GP(P_c) est réelle, si et seulement si, elle commute avec la conjugaison.

<u>Démonstration</u> : si φ est une transformation de GL(E), on a toujours :

$$\sigma \circ p(\varphi)(u+iv) = \sigma[p(\varphi(u)+i\varphi(v))] = p(\varphi(u)-i\varphi(v)) = p(\varphi(u-iv)) = p(\varphi)\circ\sigma(u+iv).$$

Ce qui montre que toute transformation réelle de P_c commute avec la conjugaison.

Réciproquement, si φ est une transformation de GL(E_c) telle que :

$$\sigma \circ p(\varphi) = p(\varphi)\circ\sigma,$$

pour tout vecteur réel, on a:

$$\sigma(p(\varphi)(u)) = \sigma\circ p(\varphi)(u) = p(\varphi)\circ\sigma(u) = p(\varphi)(u).$$

De sorte que $p(\varphi)(u)$ est toujours réel (cf. 22-5). On choisit un repère réel (A,B,C,D) de P. Nous venons de montrer que :

$$A' = p(\varphi)(A)\ ,\ B' = p(\varphi)(B)\ ,\ C' = p(\varphi)(C)\ ,\ D' = p(\varphi)(D)$$

sont des points réels de P_c. Soit g l'élément de GP(P) qui transforme :

A en A', B en B', C en C' et D en D'.

On note g_c son extension à P_c. Dans ces conditions, $g_c^{-1}\circ p(\varphi)$ laisse A, B, C et D invariants. Ces points formant un repère de P_c, $g_c^{-1}\circ p(\varphi)$ est l'application identique. On en déduit que :

$$p(\varphi) = g_c.$$

Ce qui établi que toute transformation de GP(P_c) qui commute avec la conjugaison est l'extension d'un élément de GP(P) – autrement dit une transformation projective réelle. ◅

*** Complété projectif complexe d'un plan affine**

<u>Rappel</u> : nous avons convenu qu'un plan affine est un plan projectif P dont on distingue une droite, sa droite de l'infini qu'on note ∞_P.

En combinant les acquis précédents avec ceux des sections 16 et 17, on obtient l'énoncé qui suit. il résume l'essentiel de ce qu'il convient de retenir de ce travail formel.

(22-10) <u>Théorème</u> : tout plan affine réel P est plongé dans un plan projectif complexe, noté P_c, doté d'une application involutive : la conjugaison.

La droite de l'infini de P engendre une droite, complexe, c'est la droite de l'infini de P_c. Ce qui distingue une structure affine complexe de ce plan.

Les points de P sont les éléments de P_c qui sont stables par conjugaison.

Les éléments de GP(P) sont les transformations de GP(P_c) qui commutent avec la conjugaison.

Les éléments de GA(P) sont les éléments de GP(P) qui laissent globalement invariante la droite de l'infini de P.

<u>Définition</u> : avec les notations ci-dessus, le plan P_c, est appelé le *complexifié* de P.

§ 23. Invariants projectifs d'une structure euclidienne

On considère un plan affine euclidien P, plongé dans son complexifié P_c. On note E l'espace vectoriel sous-jacent de P.

On rapporte P à un repère (affine) orthonormé.

*** Points cycliques**

Considérons une similitude **directe** s de P, la matrice de son application linéaire associée s'exprime, relativement à toute base orthonormée de E par la matrice :

$$k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

où k est un réel positif. Elle induit sur la droite de l'infini, complexifiée, l'homographie qui se décrit :

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}X'\\ Y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}.$$

Les vecteurs propres admettent pour coordonnées :

$$(1,-i)\text{ et }(1,i)$$

et sont respectivement associés aux valeurs propres :

$$e^{i\theta}\quad\text{et}\quad e^{-i\theta}.$$

Notons I et J les points correspondants, ils ont pour coordonnées homogènes :

$$\mathrm{I} : (1,-i,0)\text{ et }\mathrm{J} : (1,i,0)$$

et sont indépendants de θ. Bien plus, il découle de cette propriété que ces coordonnées demeurent inchangées par tout changement de repère orthonormé, conservant l'orientation. Cette propriété remarquable conduit à nommer ces deux points.

Définition : I et J sont appelés *points cycliques* de P et l'on qualifie d'*isotrope* toute droite, autre que la droite de l'infini, qui passe par l'un d'eux.

(23-1) Proposition : toute similitude directe laisse invariant les points cycliques et induit, sur la droite de l'infini complexe de P, l'homographie décrite par la relation :

$$[\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{M},f(\mathrm{M})]=e^{2i\theta}.$$

Si le plan est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, θ est l'angle de la similitude.

Démonstration : se reporter à la fin de section 18. ◅

(23-2) Corollaire : étant données deux droites d et d' de P, on note Δ_I et Δ_J les droites isotropes du faisceau qu'elles déterminent. dans ces conditions, on a :

$$(d,d')=\theta\ (\mathrm{mod}\ \pi)\iff[\Delta_\mathrm{I},\Delta_\mathrm{J},d,d']=e^{2i\theta}\ (1).$$

Démonstration : la rotation d'angle θ induit sur la droite de l'infini l'homographie décrite plus haut. Le birapport des droites est aussi le birapport de leur points à l'infini. ◅

1 Cette expression est appelée le *formule de Laguerre*. Elle exprime clairement un fait assez subtil. Une droite n'ayant qu'un point à l'infini, lorsque qu'on la fait pivoter d'un demi-tour, son point à l'infini effectue un tour complet ! Ceci traduit une certaine complexité topologique du plan projectif qui fait, en particulier, que toute surface de l'espace usuel qui lui est homéomorphe, se recoupe elle même.

Un cas particulier mérite d'être explicité

(23-3) Corollaire : deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs points à l'infini sont conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques.

Nous allons retrouver ce fait en considérant une similitude **indirecte** s. Il existe une base orthonormée de E telle que l'homographie induite par s, sur la droite de l'infini s'exprime :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

on en déduit la proposition qui suit.

(23-4) Proposition : toute similitude indirecte induit sur la droite de l'infini complexe de P, l'involution qui laisse invariants les points à l'infini de ses deux axes et échange les points cycliques.

Remarque : ceci montre, en particulier, qu'orienter le plan revient à distinguer les points cycliques l'un de l'autre.

*** Caractérisation projective des similitudes**

(23-5) Théorème : étant donné un plan affine euclidien P :

1. le sous-groupe de GP(P) formé des transformations laissant invariants les deux points cycliques est le groupe des similtudes directes de P,
2. les transformations de GP(P) qui échangent les points cycliques sont les similitudes indirectes de P.

Démonstration : soit f une transformation projective (réelle) de P, si f conserve globalement les points cycliques elle conserve la droite de l'infini complexifiée et comme f est réelle, elle conserve la droite de l'infini de P, f est donc une transformation affine.

Si f conserve les points cycliques, les deux vecteurs admettant :

$$(1, -i) \text{ et } (1, i)$$

pour coordonnées relativement à toute base orthonormée de E, sont des vecteurs propres de $\vec{f}$. Choisissons une base orthonormée de E, et notons la matrice de $\vec{f}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ces vecteurs propres sont associées à deux valeurs propres imaginaires conjuguées :

$$\rho e^{i\theta} \text{ et } \rho e^{-i\theta}.$$

Les hypothèses se traduisent comme suit :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \rho e^{i\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},$$

puis, explicitement, par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} a - ib = \rho e^{i\theta} \\ c - id = -\rho i e^{i\theta} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$a = d = \rho\cos\theta \text{ et } -b = c = \rho\sin\theta.$$

On est donc en présence d'une similitiude directe.

Si f échange les points cycliques, il existe un nombre complexe $\rho e^{i\theta}$, tel que :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \rho e^{i\theta}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\begin{cases} a - ib = \rho e^{i\theta} \\ c - id = \rho i e^{i\theta} \end{cases}.$$

Ce qui donne :

$$a = -d = \rho\cos\theta \text{ et } b = c = -\rho\sin\theta.$$

On est alors en présence d'une similitude indirecte.

Chapitre V. Géométrie projective des coniques

Dans toute cette dernière partie, le cadre est celui d'un plan projectif réel $P = p(E)$, plongé dans son complexifié $P_C = p(E_C)$.

§ 24. Classification projective des coniques réelles

*** Préambule**

En géométrie affine, nous avons appelé coniques les courbes algébriques de degré 2, celles dont l'équation se présente sous la forme la plus générale :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où les coefficients sont des nombres réels et a, b, c ne sont pas simultanément nuls. Le plan affine s'est enrichi des points à l'infini et toute conique se prolonge de façon naturelle, via l'introduction des coordonnées homogènes. L'équation ci-dessus prend alors la forme suivante :

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 = 0.$$

Les coordonnées des points à l'infini de la conique, s'il en existe, sont les solutions du système :

$$\begin{cases} aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Si le plan est rapporté à un repère projectif quelconque, aucune des coordonnées ne jouant de rôle particulier, on présente l'équation d'une conique sous la forme suivante :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dYZ + 2eZX + 2fXY = 0,$$

où les six coefficients sont des nombres réels non tous nuls, définis à un facteur multiplicatif près.

On doit pouvoir distinguer entre elles des coniques dont les équations telles que :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0\ ,\ X^2 + Y^2 + 2Z^2 = 0$$

admettent $(0,0,0)$ pour seule solution réelle et n'ont donc aucun point réel, ce qui conduit à poser la définition qui suit.

<u>Définition</u> : une *conique* du plan projectif $P = p(E)$ est une forme quadratique de E, non nulle, définie à un scalaire multiplicatif près.

Si Γ désigne la conique représentée par la forme quadratique Q, les points de Γ sont les éléments $M = p(x)$, du complexifié de P, tels que $Q(x) = 0$. On dira donc que Γ admet pour équation $Q(x) = 0$.

<u>Remarque</u> : lorsque le plan est rapporté à un repère, on note aussi l'équation $Q(X, Y, Z) = 0$, dans la mesure où cette facilité n'est pas source d'ambiguïté.

*** Bref rappel sur les formes quadratiques**

Étant donné un espace vectoriel E, réel, une application Q de E dans **R** est une *forme quadratique*, s'il existe une *forme bilinéaire symétrique* B de E telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x) = \mathrm{B}(x, x)$$

On peut retrouver la forme bilinéaire à partir de la donnée de la forme quadratique, comme suit :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{E},\ \mathrm{B}(x, y) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Q}(x+y) - \mathrm{Q}(x) - \mathrm{Q}(y)\right]$$

On dit que B est la *forme polaire* de Q.

Relativement à une base de E, une forme quadratique s'exprime :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{Y}^2 + c\mathrm{Z}^2 + 2d\mathrm{YZ} + 2e\mathrm{ZX} + 2f\mathrm{XY}.$$

où (X, Y, Z) désigne les coordonnées du vecteur courant. Sa forme polaire associée s'exprime (1) :

$$\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}; \mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}') = a\mathrm{XX}' + b\mathrm{YY}' + c\mathrm{ZZ}' + d(\mathrm{YZ}' + \mathrm{ZY}') + e(\mathrm{ZX}' + \mathrm{XZ}') + f(\mathrm{XY}' + \mathrm{YX}').$$

Il commode de présenter ces expressions sous forme matricielle :

$$\mathrm{Q(X,Y,Z)} = [\,\mathrm{X\ \ Y\ \ T}\,]\begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

On condense cette écriture en posant :

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{S} = \begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\mathrm{Q(X,Y,Z)} = {}^{t}\mathscr{X}\,\mathrm{S}\,\mathscr{X}.$$

où ${}^{t}\mathscr{X}$ désigne la transposée de $\mathscr{X}$.

On considère deux vecteurs x et x' de coordonnées (X,Y,Z) et (X′,Y′,Z′), l'expression de la forme polaire devient :

$$\mathrm{B}(x, x') = [\,\mathrm{X\ \ Y\ \ Z}\,]\begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix}.$$

Qui se condense sous la forme :

$$\mathrm{B}(x, x') = {}^{t}\mathscr{X}\,\mathrm{S}\,\mathscr{X}'.$$

La donnée d'une forme bilinéaire symétrique B définit l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}^* \\ x & \mapsto & (y \mapsto \mathrm{B}(x, y)) \end{array}$$

dont le noyau s'exprime :

$$\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E},\ b(x, y) = 0\}.$$

Elle admet pour rang :

$$r = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{N}.$$

---

1 On retient la règle dite *du dédoublement* :
on remplace X^2 par XX′ … et **2**XY par XY′ + YX′ …

2 On retrouve facilement les coefficients si l'on retient que les lignes décrivent les formes linéaires :
$\frac{1}{2}\mathrm{Q}'_{\mathrm{X}},\ \frac{1}{2}\mathrm{Q}'_{\mathrm{Y}},\ \frac{1}{2}\mathrm{Q}'_{\mathrm{Z}}.$

Notons, enfin, que toute forme bilinéaire de E s'étend de façon unique au complexifié E_C de E, comme suit :

$$B(x+iy,x'+iy')=B(x,x')-B(y,y')+i[B(x,y')+B(y,x')],$$

de même que la forme quadratique associée :

$$Q(x+iy)=Q(x)+2iB(x,y)-Q(y).$$

*** Classification des coniques**

Définitions : si Γ désigne la conique représentée par la forme quadratique Q, le *rang* de Γ est celui de Q, diminué de 1 et si N est le noyau de Q, $p(N)$ est aussi appelé *noyau* de Γ.

(24-1) Proposition.

- Les coniques de rang nul sont les droites doubles.
- Les coniques de rang 1 sont les réunions de deux droites distinctes, réelles ou imaginaires conjuguées [1].
- Les coniques de rang 2 sont les courbes qui, dans un certain repère, admettent pour équation :

  $$X^2+Y^2-Z^2=0,$$

  auquelles il convient d'ajouter les ensembles de points imaginaires d'équation :

  $$X^2+Y^2+Z^2=0.$$

Démonstration : le théorème de Sylvester (cf. Cours "forme quadratiques et formes hermitiennes" : chapitre 1-§4-2) montre que, pour toute forme quadratique réelle, il existe une base où elle s'exprime sous forme réduite :

$$Q(X,Y,Z)=\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2,$$

les coefficients α, β et γ étant 1, –1 ou 0 – en nombres invariables. Considérons une conique Γ, compte tenu des équivalences entre équations, il existe un repère où son équation est de l'une des formes suivantes.

- Si le rang est nul :

  $$X^2=0.$$

  L'ensemble des points de Γ est alors la droite d'équation $X=0$.
- Si le rang est 1 :

  $$X^2-Y^2=0 \quad \text{ou} \quad X^2+Y^2=0,$$

  ces équations se factorisant comme suit :

  $$(X-Y)(X+Y)=0 \quad \text{et} \quad (X-iY)(X+iY)=0$$

  Γ est alors la réunion de deux droites distinctes, réelles ou imaginaires conjuguées.
- Si le rang est 2 :

  $$X^2+Y^2-Z^2=0 \quad \text{ou} \quad X^2+Y^2+Z^2=0. \qquad \triangleleft$$

1 Ce sont des coniques réelles car elles sont invariantes par conjugaison.

(24-2) <u>Théorème</u> : sous l'action du groupe projectif réel, les coniques du plan euclidien se répartissent en cinq orbites, respectivement constituées :

- des droites doubles,
- des paires de droites réelles,
- des paires de droites imaginaires conjuguées.

Dans le cas où P est un plan affine euclidien, les deux dernières se caractérisent comme étant les images par toutes les homographies :

- d'un cercle arbitraire,
- d'un cercle imaginaire (d'équation $x^2 + y^2 = -1$).

<u>Démonstration</u> : le plan étant rapporté à un repère une conique Γ est donnée par son équation sous forme matricielle :

$$Q(X,Y,Z) = {}^t\mathscr{X} S\, \mathscr{X}.$$

La proposition précédente montre qu'il existe une matrice inversible Q, telle que :

$${}^t\mathscr{X}(\,{}^tQSQ)\mathscr{X}$$

soit de l'une des cinq formes mentionnées. Soit f l'homographie de matrice Q^{-1}, le point M, de coordonnées $\mathscr{Y}$, appartient à $f(\Gamma)$ si, et seulement si, $f^{-1}(M)$ appartient à Γ, c'est-à-dire si :

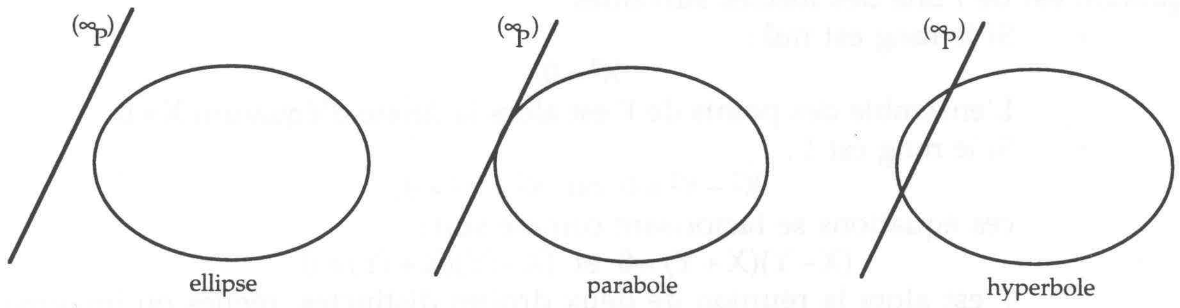
$${}^t\mathscr{Y}({}^tQSQ)\mathscr{Y} = {}^t(Q\mathscr{Y})S(Q\mathscr{Y}) = 0$$

Cette équation de $f(\Gamma)$ est de l'une des cinq formes mentionnée ci-dessus, et d'une seule. Ce qui justifie l'affirmation avancée. ◅

<u>Définition</u> : les seules coniques qui nous intéressent vraiment sont évidemment celles de rang 2 qui admettent des points réels. On les qualifie de *propres*.

Si P est un plan affine, parmi les coniques propres, on distinguera :

- les ellipses, par leurs points à l'infini imaginaires conjugués,
- les hyperboles, par leurs points à l'infini réels et distincts,
- les paraboles, par leur point à l'infini unique.



- les cercles comme étant les coniques propres passant par les points cycliques (cf. § 23),
- les hyperboles équilatères par leurs points à l'infini réels et conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques.

L'énoncé qui suit montre que la prise en compte des points imaginaires ne conduit à aucune révision déchirante des conceptions qu'on avait antérieurement des coniques.

(24-3) <u>Lemme</u> : une droite et une conique ont en commun soit :

- deux points distincts qui sont alors soit réels, soit imaginaires conjugués ;
- un point, et un seul, il est alors réel ;
- à moins que la droite ne soit contenue dans conique dont le rang est alors 0 ou 1.

<u>Démonstration</u> : considérons une conique Γ, d'équation $Q(x)=0$ et une droite Δ. On choisit un repère tel que Δ admette pour équation $Z=0$. Notons :

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2dYZ+2eZX+2fXY=0$$

l'équation de Γ. Un point M, de coordonnées homogènes X, Y, Z appartient à $\Gamma\cap\Delta$, si, et seulement si :

$$aX^2+bY^2+2fXY=0 \text{ et } Z=0.$$

Notons $\delta=f^2-ab$ le discriminant du trinôme $aX^2+2fXY+bY^2$ et passons en revue tous les cas possibles.

- Si $\delta\neq 0$ et
  - si $a\neq 0$ l'équation $ax^2+fx+b=0$ admet deux racines distinctes α et β réelles ou imaginaires conjuguées, on a :
  $$aX^2+bY^2+2fXY=a(X-\alpha Y)(X-\beta Y),$$
  Γ et Δ ont alors en commun les deux points distincts de cooordonnées :
  $$(\alpha,1,0) \text{ et } (\beta,1,0).$$
  - Sinon $a=0$, et $f\neq 0$, la factorisation est évidente :
  $$Y(bY+2fX)=0,$$
  Γ et Δ on alors en commun les deux points distincts de cooordonnées :
  $$(1,0,0) \text{ et } (2f,-b,0)$$
- Si $\delta=0$ et
  - si $a\neq 0$ on a
  $$aX^2+bY^2+2fXY=a(X+\frac{f}{a}Y)^2,$$
  Γ et Δ ont alors en commun le point double de cooordonnées $(-\frac{f}{a},1,0)$.
  - Sinon $a=0$ et $f=0$, auquel cas la condition devient $bY^2=0$,
    - si $b\neq 0$, le point de coordonnées $(1,0,0)$ est l'unique solution ;
    - sinon $a=b=f=0$, l'équation de Γ prend alors la forme :
    $$Z(dZ+2dY+eX)=0,$$
  Γ est alors la réunion des droites d'équations $Z=0$ et $dZ+2dY+eX=0$.
  Dans ces conditions la matrice de Q prend la forme :
  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & d \\ e & d & c \end{bmatrix}$$
  son rang est alors 2 ou 1. Le rang de Γ est alors 1 ou 0 $\lhd$

§25. Points conjugués

* Définition

Définition : étant donnés une conique Γ d'équation $Q(x)=0$, deux points $M=p(x)$ et $M'=p(x')$ sont dits *conjugués* par rapport à Γ si $B(x,x')=0$, où B désigne la forme polaire de la forme quadratique Q.

L'assertion qui suit découle directement de cette définition.

(25-1) Proposition : un point est conjugué de lui-même par rapport à une conique si, et seulement si, il appartient à celle-ci.

* Polaire d'un point par rapport à une conique

Soit B la forme polaire de Q, considérons un point $M_0=p(x_0)$, l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & B(x_0,x) \end{array}$$

est une forme linéaire.

- Si elle est non nulle, son noyau F est de dimension 2, $p(F)$ est une droite.
- Si elle est nulle, comme, par définition, x_0 est non nul, Q est de rang inférieur à 2, la conique est alors dégénérée.

Dans le premier cas, l'ensemble des points conjugués de M par rapport à Γ est la droite $p(F)$ et dans le second, c'est P tout entier.

Définition : étant donnée une conique Γ et un point M, lorsque l'ensemble des conjugués de M par rapport à Γ est une droite, celle-ci s'appelle la *polaire* de M et on la note M° – à condition toutefois qu'il n'y ait pas ambiguïté sur la conique.

N.B. Si les coordonnées de M sont (X_0,Y_0,Z_0) :

$$Q\,(X_0,Y_0,T_0\,;X,Y,Z)=0$$

est l'équation de la polaire de M, ou bien c'est l'équation triviale $0=0$. Explicitement, si l'équation de Γ s'exprime :

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2dYZ+2eZX+2fXY=0,$$

l'équation de la polaire de M s'exprime :

$$aX_0X+bY_0Y+c\,Z_0Z+d(Y_0Z+Z_0Y)+e(Z_0X+X_0Z)+f(X_0Y+Y_0X)=0.$$

Elle prend la forme suivante :

$$(aX_0+fY_0+eZ_0)X+(fX_0+bY_0+dZ_0)Y+(eX_0+dY_0+cZ_0)Z=0.$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$[X_0\ \ Y_0\ \ Z_0]\begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=0$$

Sous forme condensée, ceci s'écrit :

$${}^t\mathscr{X}_0\,S\,\mathscr{X}=0.$$

(25-2) Théorème : si une conique est propre, tout point du plan admet une polaire et l'application :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P^* \\ M & \mapsto & M^\circ \end{array}$$

est une homographie.

Démonstration : notons S la matrice de la conique relativement à un certain repère. Si les coordonnées de M sont (X, Y, Z), les coordonnées homogènes (u, v, w) de sa polaire sont données par la relation suivante :

$$[u \;\; v \;\; w] = [X \;\; Y \;\; T]\,S$$

Comme S est de rang 3, on a un isomorphisme de E sur E*. Il induit bien une homographie de P sur son dual. ◅

Nous exploiterons ce résultat un peu plus loin. Dans l'immédiat, contentons nous de donner de la conjugaison une interprétation géométrique à la fois frappante et féconde.

*** Points conjugués par rapport à une conique propre**

(25-3) Théorème : étant donnés une conique propre Γ et deux ses points A et B, distincts, deux points M et N de (AB) sont conjugués par rapport à Γ si, et seulement si, il sont conjugués harmoniques par rapport à A et B.

Démonstration : les points A et B étant distincts, on peut choisir une base (e_0, e_1, e_2) de E, telle que :

$$A = p(e_0) \;\text{ et }\; B = p(e_1).$$

Soit M et N, deux points de (AB), il s'expriment :

$$M = p(Xe_0 + Ye_1) \;\text{ et }\; N = p(X'e_0 + Y'e_1)$$

Soit $Q(x) = 0$ une équation de Γ, comme A et B appartiennent à cette conique, on a $Q'(e_0) = Q(e_1) = 0$. On en déduit que :

$$B(Xe_0 + Ye_1, X'e_0 + Y'e_1) = (XY' + YX')\,B(e_0, e_1).$$

Si l'on avait $B(e_0, e_1) = 0$, on aurait toujours :

$$Q(Xe_0 + Ye_1) = 2XY\,B(e_0, e_1) = 0$$

et la conique serait dégénérée. Ce cas étant écarté, on a :

$$M \text{ et } N \text{ sont conjugués } \Leftrightarrow XY' + YX' = 0.$$

Il s'ensuit que :

- si $Y \neq 0$ alors, M est distinct de A, N l'est aussi, on a donc $Y' \neq 0$ et ainsi :
$$XY' + YX' = 0 \Leftrightarrow \frac{X}{Y} = -\frac{X'}{Y'} \Leftrightarrow [A, B, M, N] = -1,$$
- si $Y = 0$ alors $X \neq 0$ et ainsi :
$$XY' + YX' = 0 \Leftrightarrow Y' = 0 \Leftrightarrow M = N = A.$$

Ce qui justifie l'assertion avancée. ◅

L'alternative de la situation que nous venons d'étudier est celle où une droite et une conique ont en commun un point double. Caractérisons ce cas.

(25-4) Lemme : une droite et une conique ont en commun un point double si, et seulement si, la droite est la polaire de ce point.

Démonstration : on considère toujours une conique Γ, d'équation $Q(x) = 0$. Soit $A = p(e_0)$ l'un des ses points. Soit $B = p(e_1)$ un point distinct de A, un point de la droite (AB) s'exprime $M = p(Xe_0 + Ye_1)$. Compte tenu de :

$$Q(Xe_0 + Ye_1) = 2XY\,B(e_0, e_1) + Y^2 Q(e_1) = Y[2X\,B(e_0, e_1) + YQ(e_1)]$$

L'appartenance de M à Γ s'exprime :

$$Y[2X\,B(e_0, e_1) + YQ(e_1)] = 0$$

La solution évidente $Y = 0$ – le point A – est double si, et seulement si, $B(e_0, e_1) = 0$, c'est-à-dire si B est conjugué de A par rapport à Γ. ◅

*** Tangentes aux coniques propres**

<u>Définition</u> : on dit qu'une droite est *tangente* à une conique **propre** si elle la rencontre en un point *double*.

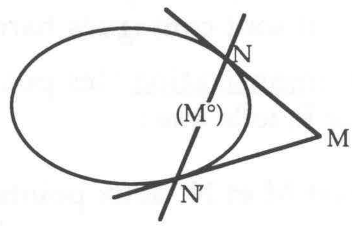
Le lemme précédent trouve une forme plus lisible.

(25-5) <u>Théorème</u> : les tangentes à une conique propre sont les polaires de ses points.

On en déduit une nouvelle caractérisation géométrique de la polaire d'un point.

(25-6) <u>Corollaire</u> 1 : étant donnée une conique Γ, par tout point M n'appartenant pas à Γ, il passe deux tangentes à cette courbe, les points de contact sont les intersections de la polaire M°, par rapport à Γ.

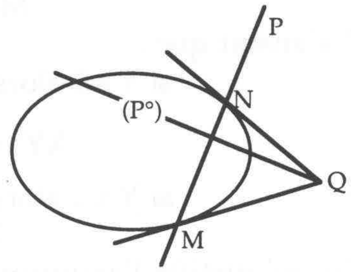
<u>Démonstration</u> : si la polaire M° partageait avec la conique un point double, M appartiendrait à Γ, c'est exclu. La polaire de M coupe donc Γ en deux points N et N' qui sont conjugués de M. Ce point appartient donc à N° et N'° qui sont les tangentes en N et N' à Γ. ◅



<u>Remarque</u> : par tout point du plan non situé sur Γ, il passe deux tangentes, réelles ou imaginaires conjuguées. On définit l'extérieur de la conique comme l'ensemble des points ou ces tangentes sont réelles.

(25-7) <u>Corollaire</u> 2 : étant donnés deux points distincts M et N d'une conique Γ, si P est un point de la droite (MN), la polaire de P par rapport à Γ est aussi la polaire de ce point par rapport aux tangentes en M et N.

<u>Démonstration</u> : soit Q le point commun aux tangentes en M et N, ce qui précède montre que (MN) = Q°, comme P appartient à cette droite, ce point est conjugué de Q par rappport à Γ. La polaire de P passe donc par Q. De plus, elle passe par le conjugué harmonique de P par rapport à M et N. La conclusion en découle immédiatement. ◅



*** Remarques sur les polaires par rapport à une conique dégénérée**

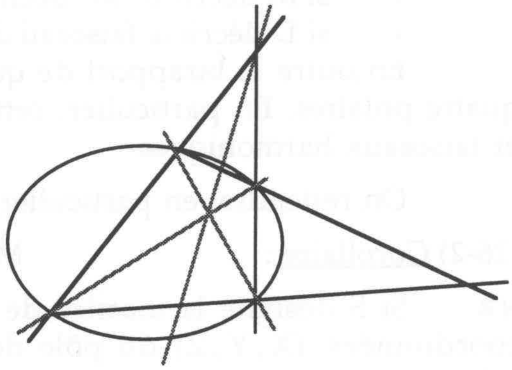
(25-8) Proposition : tout point d'une droite double est conjugué de tous les points du plan et les points d'une droite double constituent la polaire de tout autre point du plan.

Démonstration : les points d'une droite double consitituent son noyau, ils sont conjugués de tous les points du plan. Ils forment ainsi la polaire de tous les autres points . ◅

(25-9) Proposition : étant données deux droites d et d' distinctes, soit O leur point commun. On note Γ la conique $d \cup d'$. Le point O est conjugué de tout point du plan et tout autre point M admet pour polaire, par rapport à Γ, la droite conjuguée harmonique de (OM) par rapport à d et d'.

Démonstration : le noyau de Γ est le point O, commun aux deux droites. Tout autre point admet pour polaire une droite qui passe évidemment par O. Pour le reste, la démonstration 25-3 vaut aussi dans ce cas. ◅

Remarque : on peut constater que la notion de polaire ne présente guère d'intérêt pour les droites doubles. Elle était déjà connue pour les réunions de deux droites mais elle voit désormais sa portée considérablement accrue. En effet, il est possible de mêler polaires par rapport à une conique propre et à des coniques dégénérées, comme sur le schéma ci-contre. Nous laissons le lecteur imaginer tout le parti qu'il peut en tirer – notamment en termes de constructions géométriques. C'est, avec le théorème de Chasles-Steiner (cf §27), l'un des ressorts essentiels pour les exercices les plus classiques.



§ 26. La réciprocité polaire

Rappelons que si une conique est propre, l'application suivante est une homographie :

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow P^* \\ M &\mapsto M^\circ \end{aligned}$$

<u>Définition</u> : l'homographie réciproque de π associe à toute droite D de P, un point qu'on appelle son *pôle* par rapport à Γ. On le note D°.

<u>Remarque</u> : qu'il soit bien clair qu'on a toujours :

$$M^{\circ\circ} = M \quad \text{et} \quad D^{\circ\circ} = D.$$

Les assertions qui suivent découlent immédiatement du fait que π est une homographie.

(26-1) <u>Théorème</u> : M et D désignant respectivement un point et une droite, pour une conique non dégénérée donnée, on a :

- si M décrit D, M° décrit le faisceau des droites qui passent par D° ;
- si D décrit le faisceau des droites qui passent par M, D° décrit M°.

En outre le birapport de quatre points alignés est égal au birapport de leur quatre polaires. En particulier, cette correspondance associe divisions harmoniques et faisceaux harmoniques.

On retiendra, en particulier, ce qui suit.

(26-2) <u>Corollaire</u> : $M \in D \Leftrightarrow D^\circ \in M^\circ$.

N.B. Si S désigne la matrice de la conique relativement à un certain repère, les coordonnées (X, Y, Z) du pôle de la droite de coordonnées (u, v, w) vérifient la relation :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

et s'expriment sous forme condensée :

$$\mathscr{U}^\circ = S^{-1}\, {}^t\mathscr{U}.$$

L'assertion qui suit reformule des propriétés déjà démontrées.

(26-3) <u>Proposition</u> : étant donné une conique propre Γ et une droite D :

$$D^\circ \in D \Leftrightarrow D \text{ est tangente à } \Gamma$$

et dans ces conditions, le pôle de M est le point de contact avec Γ.

On en déduit immédiatement la proposition qui suit.

(26-4) Corollaire : la relation :

$$[u \;\; v \;\; w]\, S^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

sous forme condensée :

$$\mathscr{U}\, S^{-1}\, {}^{t}\mathscr{U},$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la droite de coordonnées homogènes (u, v, w) soit tangente à la conique d'équation ${}^{t}\mathscr{X} S.\mathscr{X}$.

Définition : la relation ci-dessus est appellée *équation tangentielle* de la conique.

En fait, on est en présence de l'équation de la conique de P* qui est l'ensemble des tangentes à la conique donnée.

*** Droites conjuguées**

(26-5) Proposition : étant données une conique et deux droites D et Δ, on a toujours :

$$D^\circ \in \Delta \;\Leftrightarrow\; \Delta^\circ \in D.$$

Démonstration : il découle immédiatement du corollaire 26-2 que :

$$D^\circ \in \Delta \;\Leftrightarrow\; \Delta^\circ \in D^{\circ\circ} = D.$$

◅

La définition qui suit prend alors tout son sens.

Définition : deux droites sont conjuguées par rapport à une conique si le pôle de l'une appartient à l'autre.

Nous laissons à chacun le soin de vérifier que cette propriété est, tout bonnement, la conjugaison des éléments du dual par rapport à la conique duale de celle considérée.

§ 27. Génération projective des coniques

Nous avons établi que toute droite passant par un point d'une conique propre la recoupe en un second, distinct, à une exception près, la tangente au point considéré. Il existe donc une bijection entre la conique et le faisceau des droites passant l'un de ses points, arbitrairement choisi. Cette constatation, a priori banale, conduit à des résultats essentiels, autant sur le plan théorique que d'un point de vue pratique.

*** Théorème de Chasles-Steiner**

(27-1) Théorème : étant donnée une conique propre, on désigne par M son point courant et l'on en considère deux points A et B. L'application :

$$\begin{array}{ccc} A^* & \longrightarrow & B^* \\ (AM) & \mapsto & (BM) \end{array}$$

est une homographie entre les faisceaux A* et B*, telle que :

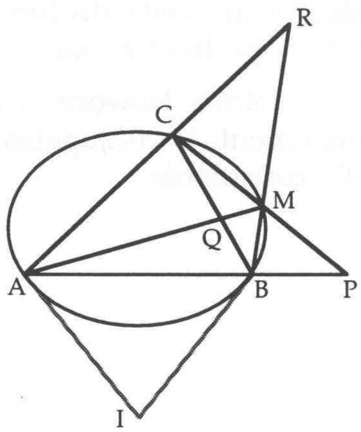
- (AB) soit l'image de la tangente en A,
- (AB) ait pour image la tangente en B.

Démonstration : si A et B coïncident, h est l'application identique de A*, écartons ce cas. Soit Γ la conique donnée, on note I le point commun à ses tangentes en A et B, on en choisit un point arbitraire C différent que A et B et l'on considère l'homographie f, de A* sur B*, qui tansforme :

(AI) en (BA), (AB) en (BI) et (AC) en (BC)

Soit M un point quelconque de Γ, on note :

$$P=(AB)\cap(CM)\ ,\ Q=(AM)\cap(BC) \text{ et } R=(AC)\cap(BM).$$



Il découle des propriétés du quadrilatère complet que la droite (QR) est la polaire de P, ainsi les points Q et R sont conjugués de P par rapport à Γ. Le corollaire 25-6 montre que I est aussi conjugué de P. On en déduit que ce point est aligné avec Q et R. Or, I est le centre de l'homographie f. Cet alignement justifie que (BM) est l'image de (AM) par f [1]. Ainsi, cette homographie est l'application introduite dans l'énoncé. ◅

N.B. Ce théorème vaut encore si la conique est dégénérée en deux droites distinctes Δ et Δ', sous réserve que A et B soient situés sur l'une d'elles et distincts du point commun. Si A et B appartiennent à Δ, l'homographie obtenue est la perspective duale dont l'axe est Δ'. La droite $\Delta=(AB)$ est alors sa propre image.

1 Ceci renvoie au théorème 9-2, dans sa version duale évoquée à l'exercice 12.

*** Problème réciproque**

(27-2) <u>Théorème</u> : étant donnés deux points distincts A et B, on note δ la droite qui les joint et l'on considère une homographie h, telle que :

$$h : A^* \longrightarrow B^* \qquad d \mapsto d'$$

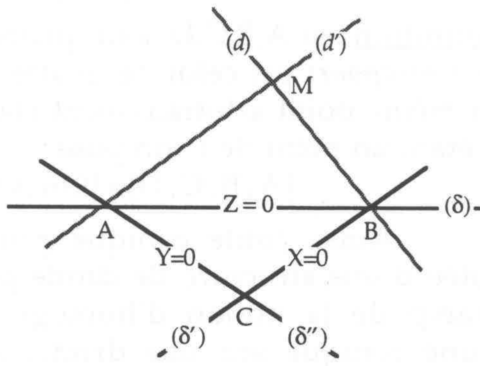
Le lieu des points communs à d et d' est une conique :

- propre si $h(\delta) \neq \delta$, tangente en A à $h^{-1}(\delta)$ et en B à $h(\delta)$;
- dégénérée si $h(\delta) = \delta$ et dans ce cas, elle contient δ.

<u>Démonstration</u>.

1) Si $\delta' = h(\delta) \neq \delta$, on note $\delta'' = h^{-1}(\delta)$. Soit C le point commun à δ′ et δ″, on choisit un repère projectif dont les trois premiers points sont A, B et C. Les droites δ′, δ″ et δ ont alors pour coordonnées homogènes :

$$(1,0,0) \ , \ (0,1,0) \text{ et } (0,0,1).$$



Dans ces conditions

- une droite D de A* admet pour coordonnées homogènes $(0,v,w)$
- une droite D′ de B* admet pour coordonnées homogènes $(u',0,w')$.

Si $d' = h(d)$, ces coordonnées sont liées par des relations linéaires :

$$\begin{cases} u' = av + bw \\ w' = cv + dw \end{cases}$$

Comme $h(\delta'') = \delta$ et $h(\delta) = \delta'$, on a :

$$\begin{cases} 0 = a \\ 1 = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 1 = b \\ 0 = d \end{cases}$$

Ce qui montre que si d admet pour équation $vY + wZ = 0$, d' a pour équation $wX + vZ = 0$. Les coordonnées de leur point commun vérifient :

$$\begin{cases} vY + wZ = 0 \\ wX + vZ = 0 \end{cases}$$

Deux droites d et d' passent par le point de coordonnées (X,Y,Z), si et seulement si, ce système linéaire homogène de deux équations, des inconnues u *et* v, admet une solution non triviale. Or, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est :

$$XY - Z^2 = 0.$$

Le point M décrit donc la conique correspondante. Les droites δ″ et δ′ la rencontrent respectivement en A et B. Ces points étant doubles, si cette conique était dégénérée, ce serait la droite double d'équation $Z^2 = 0$, c'est exclu. Cette conique est donc propre et tangente en A à δ″, en B à δ′.

2) Si $h(\delta) = \delta$, h est une perspective duale. Les points M en décrivent l'axe. L'ensemble considéré est alors la réunion de cette droite et de δ. ◅

*** Birapport de quatre points d'une conique propre**

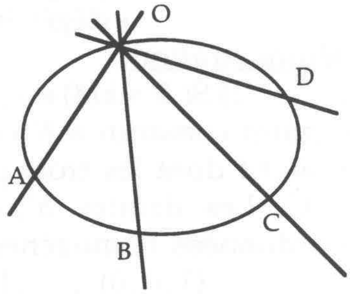
Le théorème de Chasles-Steiner peut se reformuler comme suit.

(27-3) <u>Corollaire</u> : étant donnée une conique propre Γ et cinq de ses points : A,B,C,D et O, le birapport des droites :

$$[OA, OB, OC, OD]$$

est indépendant du point O.

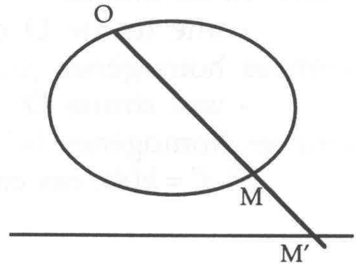
Ce qui donne corps à la notion de birapport de quatre points d'une conique qui se définit naturellement.



<u>Définition</u> : si A,B,C,D sont quatre points d'une conique Γ, leur *birapport* est celui de quatre droites qui les joignent à un même point arbitrairement choisi sur Γ. Autrement dit, O étant un point de Γ, on pose :

$$[A, B, C, D] = [OA, OB, OC, OD]$$

Ainsi, toute conique propre est intrinsèquement dotée d'une structure de droite projective, ce qui étend le champ de la notion d'homographie. Toute perspective d'une conique sur une droite, ou inversement, est une homographie, pourvu que le centre soit choisi sur la conique. On peut aussi considérer le groupe projectif d'une conique.



*** Conique passant par cinq points**

(27-4) <u>Théorème</u> : par cinq points, données distincts et tels que quatre d'entre eux ne soient pas alignés, il passe une conique, et une seule ([1]).

<u>Démonstration</u> : soit A, B, C, D, E les cinq points donnés, si trois d'entre eux sont alignés, la droite qui les joint ne contient aucun des deux autres, il est donc toujours possible de supposer que (AC), (AD) et (AE) sont des droites distinctes, ainsi que (BC), (BD) et (BE). Dans ces conditions, elles forment des repères projectifs des faisceaux A* et B*, respectivement. L'homographie *h* de A* sur B* qui tranforme (AC) en (BC), (AD) en (BD) et (AE) en (BE) définit une conique passant par les cinq points en question. Réciproquement, si une conique passe par ces cinq points, elle définit l'homographie *h*. ◅

<u>Remarque</u> : on notera que la donnée de deux points peut être remplacée par celle d'une tangente et son point de contact sans modifier foncièrement la démonstration précédente.

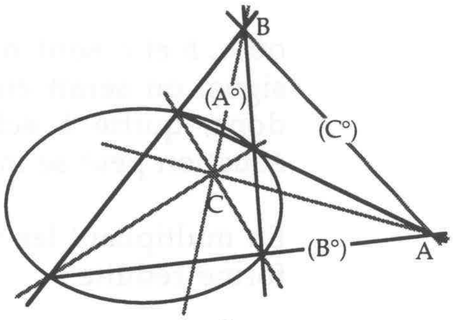
1 Si quatre des points appartiennent à une droite D, les cinq appartiennent à toute conique dégénérée formée de D et d'une droite quelconque passant pas le cinquième — et si tous les points sont sur D, il appartiennent à toute conique formée de D et d'une droite quelconque. Ces cas ne présentent donc aucun intérêt.

§ 28. Triangles autopolaires – équations réduites

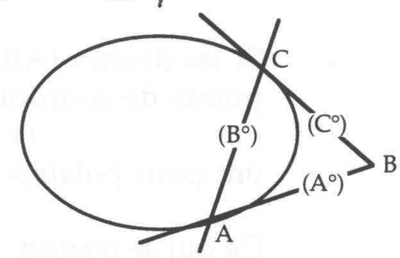
Définition : un triangle est dit *autopolaire*, pour une conique propre donnée, si ses côtés sont les polaires de ses sommets ou, ce qui est équivalent, si ses sommets sont les pôles de ses côtés.

Les triangles autoplaires sont de deux sortes, on peut les définir comme suit. On considère une conique propre Γ.

• On choisit arbitrairement deux points conjugués A et B, n'appartenant pas à Γ le troisième sommet est l'intersection C des polaires A° et B°. Il n'est pas non plus situé sur Γ.



• On choisit arbitrairement un sommet A sur Γ. Sa polaire est la tangente en A, c'est un côté du triangle, celui-ci contient un second sommet, on le choisit arbitrairement, on le note B. Ce point n'appartenant pas à Γ, sa polaire est une droite passant par A, distincte de (AB), c'est un côté du triangle. Alors, la polaire du troisième sommet, C, ne peut être que le troisième côté (AB). Ce qui fait que C est l'intersection de Γ et de B°.



Dans les deux cas on a bien défini un triangle autopolaire.

On considère une conique propre Γ. On choisit un repère projectif dont les trois premiers sommets forment un triangle ABC, autopolaire par rapport à Γ. Considérons l'équation la plus générale d'une conique :

$$[X\ Y\ Z]\begin{bmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=0.$$

Nous avons montré qu'il y a deux cas possibles. Envisageons les tour à tour.

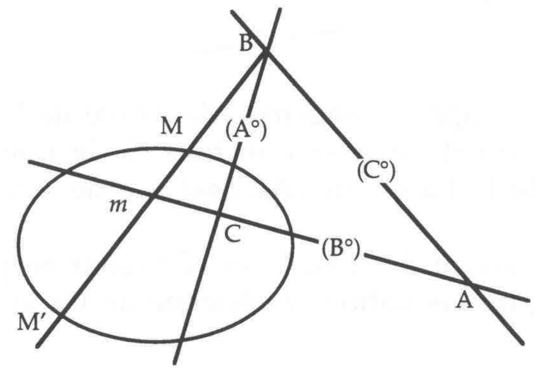
- Si aucun des points considérés n'appartient à Γ, les points de coordonnées :
$$(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ \text{et}\ (0,0,1)$$
ont pour polaires respectives les droites d'équations :
$$X=0\ ,\ Y=0\ \text{et}\ Z=0.$$
Ce qui se traduit :
$$f=e=0 \text{ puis } d=0.$$
L'équation de Γ est donc de la forme :
$$aX^2+bY^2+cZ^2=0,$$
où a, b et c sont non nuls. Si ces trois coefficients étaient de même signe, on serait en présence d'une conique sans point réel. On peut donc, quitte à échanger l'ordre des sommets, supposer que cette équation peut se mettre sous la forme suivante :
$$\alpha^2X^2+\beta^2Y^2-\gamma^2Z^2=0.$$
En multipliant les vecteurs de base par α, β et γ (1), l'équation prend la forme réduite :
$$X^2+Y^2-Z^2=0.$$
- Si les droites (AB) et (BC) sont les tangentes à la conique en A et C, les points de coordonnées :
$$(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ \text{et}\ (0,0,1)$$
ont pour polaires respectives les droites d'équations :
$$Z=0\ ,\ Y=0\ \text{et}\ X=0.$$
Ce qui se traduit :
$$a=f=0\ ,\ \text{puis } d=0\ ,\ \text{puis } c=0.$$
Léquation de Γ est donc de la forme suivante :
$$bY^2+2eXZ=0.$$
On peut toujours modifier le repère de façon que cette équation prenne la forme :
$$Y^2-2XZ=0.$$

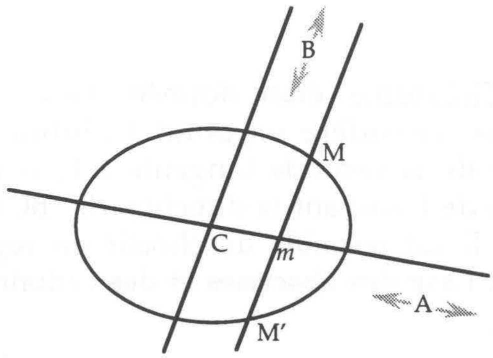
1 Ce qui revient à modifier le choix du quatrième sommet du repère.

§ 29. Interprétation projective de propriétés affines

Ce qui précède trouve une interprétation remarquable dans le cas où le plan est donné affine, en considérant un triangle autopolaire dont un côté est la droite de l'infini. Les résultats sont connus, certes, mais cette relecture s'effectue sous un jour bien différent puisque désormais tout ceci tient en quelques idées.

*** Coniques à centre**





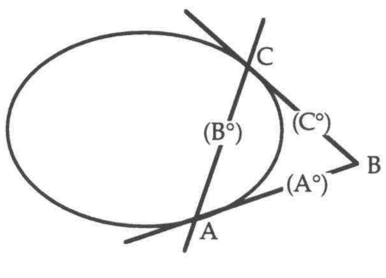
(29-1) <u>Théorème</u> : si une conique propre Γ possède deux points à l'infini distincts (réels ou imaginaires conjugués), on note C le pôle de la droite de l'infini. On considère deux points à l'infini distincts A et B, conjugués par rapport à Γ, alors :

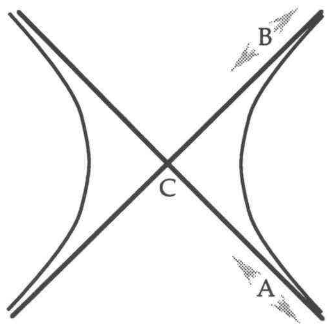
- C est centre de symétrie de Γ,
- (CA) est axe de symétrie oblique de Γ, suivant la direction de (CB).

Il est possible de choisir un repère affine dont (CA) et (CB) sont les axes de coordonnées et tel que l'équation cartésienne de Γ soit de l'une forme des formes suivantes :

$$x^2+y^2=1 \text{ ou } x^2-y^2=1.$$

*** Asymptotes**

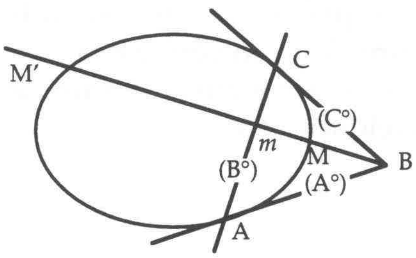


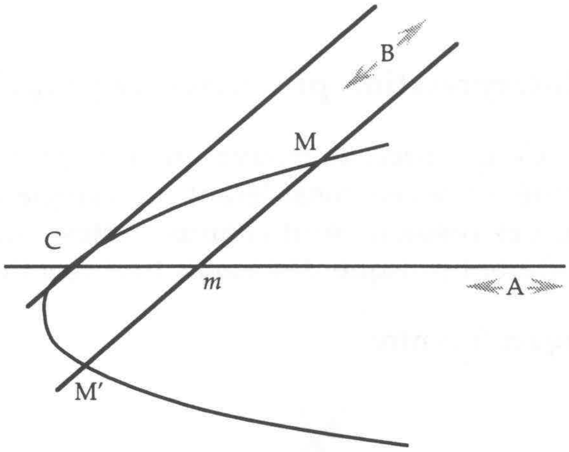


Considérons une hyperbole. Les tangentes en ses points à l'infini se coupent au pôle de la droite de l'infini, c'est-dire au centre de la conique. Ces deux droites sont donc les asymptotes. On retrouve ainsi l'équation cartésienne de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes :

$$xy=1.$$

*** Parabole**





(29-2) Théorème : étant donnée une conique propre Γ tangente à la droite de l'infini en A, on considère un point à l'infini B distinct de A et l'on note C, le point de contact de la seconde tangente à Γ, issue de B. La droite (AC) est axe de symétrie oblique de Γ suivant la direction de (BC).

Il est possible de choisir un repère affine dont (CA) et (CB) sont respectivement l'axe des abscisses et des ordonnées, où l'équation cartésienne de Γ soit de la forme :

$$y^2 = x.$$

*** Vocabulaire**

Les axes de symétrie oblique des coniques sont appelés *diamètres*.

Les diamètres d'une ellipse ou d'une hyperbole sont ainsi toutes les droites qui passent par son centre.

Les diamètres d'une parabole sont toutes les droites passant par son point à l'infini.

§ 30. Interprétation projective de propriétés métriques

La donnée d'une structure euclidienne distingue, parmi les involutions de la droite de l'infini, la conjugaison harmonique par rapport aux points cycliques. C'est la caractérisation projective des directions orthogonales.

*** Axe d'une parabole**

Étant donnée une parabole, on note que le repère considéré à la section précédente n'est orthogonal que dans un seul cas, si B est le conjugué harmonique de A par rapport aux points cycliques. Ce qui montre que la parabole admet un seul axe de symétrie orthogonale.

*** Axes des coniques à centre**

Étant donnée une conique à centre, le repère considéré au début de la section précédente est orthogonal si les points, notés A et B, sont à la fois conjugués harmoniques par rapport aux deux points à l'infini de la conique et aux deux points cycliques. On écarte, évidemment, le cas du cercle, pour lequel ces deux conditions coïncident.

On rapporte le plan à un repère orthonormé et l'on considère les coordonnées homogènes $(X, Y, 0)$ des points à l'infini, relativement au repère projectif associé.

Les points cycliques sont caractérisés par l'équation :

$$X^2 + Y^2 = 0$$

et les points à l'infini de la conique par une équation de la forme :

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0.$$

Un couple de points de coordonnées $(X, Y, 0)$ et $(X', Y', 0)$ répond à l'attente si, et seulement si :

$$XX' + YY' = 0 \quad \text{et} \quad aXX' + b(XY' + YX') + cYY' = 0$$

La première condition se traduit :

$$(X', Y') = (-Y, X).$$

Les solutions sont donc données par l'unique équation :

$$bX^2 + (c-a)XY - bY^2 = 0$$

Le discriminant $\Delta = (c-a)^2 + b^2$ ne s'annule que si :

$$a = c \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Cette condition caractérisant les cercles, elle n'est pas vérifiée, alors ou bien :

- $b \neq 0$, les racines du trinôme $bx^2 + (c-a)x - b$ sont de la forme α et $-\frac{1}{\alpha}$, ce qui donne les solutions :

  $$(\alpha, 1, 0) \quad \text{et} \quad (-\tfrac{1}{\alpha}, 1, 0)$$

  qui s'écrivent encore :

  $$(\alpha, 1, 0) \quad \text{et} \quad (-1, \alpha, 0)$$

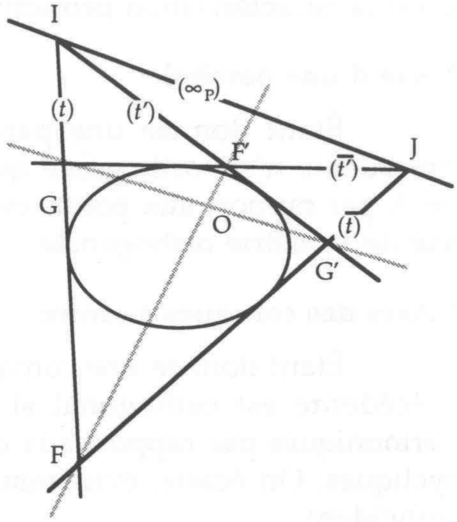
- $b = 0$, alors $c - a \neq 0$, les solutions sont alors $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.

On a donc toujours une paire unique de solutions **réelles**. Ce qui établit l'existence de deux axes de symétrie orthogonale, pour toute autre conique à centre que le cercle – ce qu'on savait déjà.

*** Théorie Plükerienne des foyers**

Pour conclure, donnons, très brièvement, à titre essentiellement informatif la caractérisation projective des foyers et directrices d'une conique.

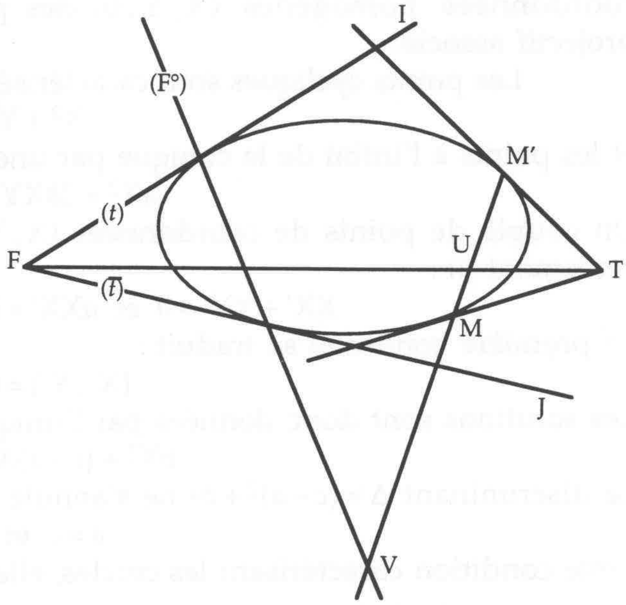
On considère une conique réelle Γ, qui n'est pas un cercle. Par chacun des points cycliques il passe deux tangentes. Si Γ n'est pas non plus une parabole, ces droites sont au nombre de quatre, deux à deux conjuguées. On note t et t' les tangentes issues de I, $\bar{t}$ et $\bar{t}'$ celles Issues de J. Le quadrilatère complet, ainsi formé, admet pour sommets :



- outre I et J :
- deux points réels
  $$F = t \cap \bar{t} \quad \text{et} \quad F' = t' \cap \bar{t}'$$
- deux points imaginaires conjugués
  $$G = t \cap \bar{t}' \quad \text{et} \quad G' = t' \cap \bar{t}.$$

Les diagonales (FF′) et (GG′) sont deux droites réelles. Elles se coupent en O. Le triangle OIJ étant autopolaire, ce point est le centre de Γ et il est immédiat que (FF′) et (GG′) en sont les axes.

Considérons le point F, les tangentes t et t' sont les droites isotropes (FI) et (FJ) du faisceau F*. Considérons deux points M et M′ de Γ, on note T le point commun aux tangentes en M et M′, U le point commun à (MM′) et (FT) et V le point commun à (MM′) et la polaire F° de F. Comme :



$$V = F^\circ \cap T^\circ$$

(FT) est la polaire de V. On en déduit d'une part que :

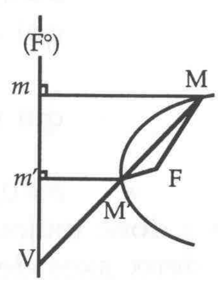
$$[M, M', U, V] = -1.$$

d'autre part que :

$$[FI, FJ, FT, FV] = -1.$$

Il s'ensuit que (FU) et (FV) sont perpendiculaires, puis que (FU) et (FV) sont les bissectrices de l'angle $M\hat{F}M'$.

Revenons à une vision classique des choses. La propriété précédente entraîne, en particulier, que :



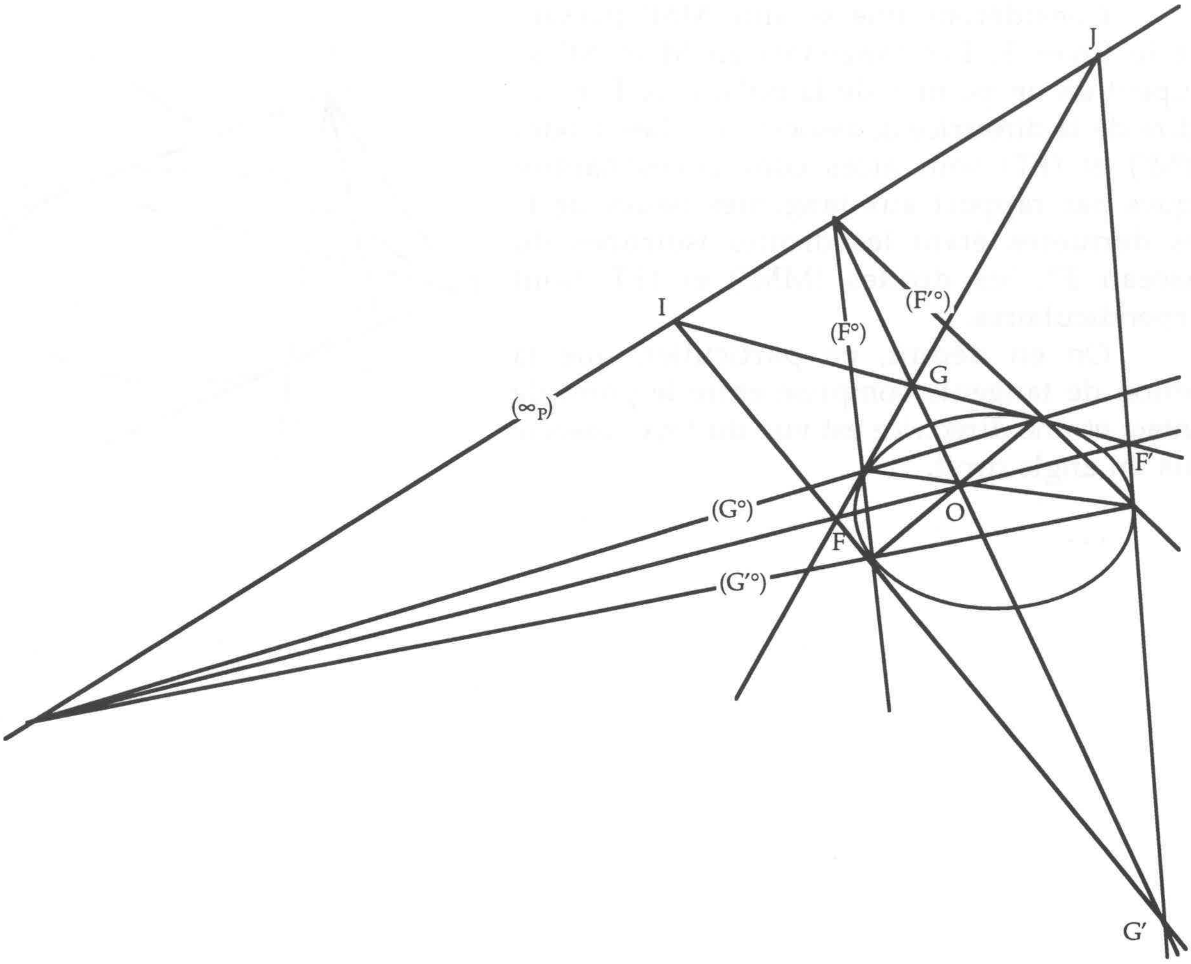
$$\frac{FM}{FM'} = \frac{VM}{VM'}.$$

Désignons par m et m' les projections orthogonales de M et M′ sur la droite F°, il vient :

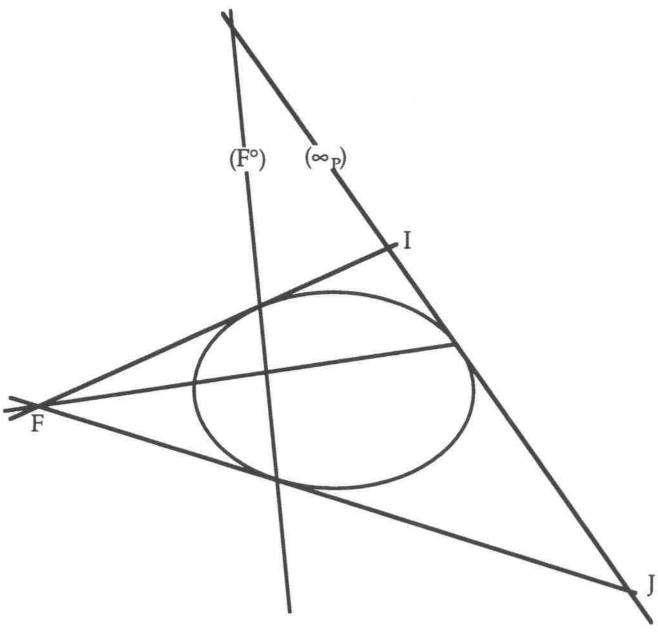
$$\frac{FM}{FM'} = \frac{VM}{VM'} = \frac{Fm}{Fm'}.$$

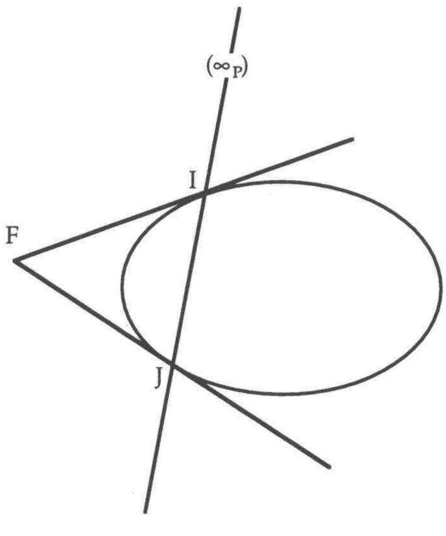
On en conclut que le rapport $\frac{FM}{Fm}$ est indépendant du point M.

On retrouve ainsi les deux foyers réels F et F′, auquels se joignent les deux foyers imaginaires conjugués G et G′. Les directrices associées étant les polaires de ces points par rapport à Γ.



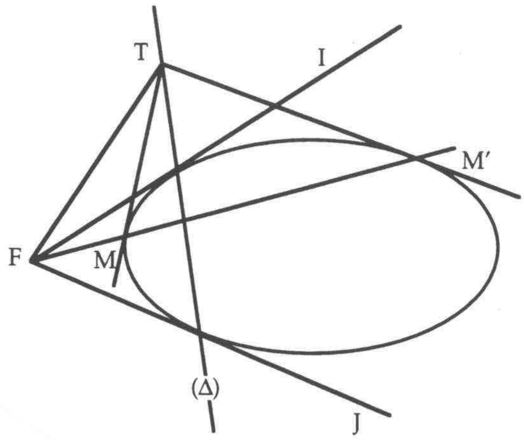
Dans le cas de la parabole, une des tangentes isotropes est la droite de l'infini, il n'y a donc plus qu'un seul foyer, il est réel. De son côté le cercle admet lui aussi un seul foyer, son centre, et sa directrice est la droite de l'infini.





Afin d'illustrer, la fécondité de ce nouveau point de vue, démontrons, d'une phrase, une propriété laborieusement justifiée, en exercice, par des voies plus traditionnelles.

Considérons une sécante MM′ passant par le foyer F. Les tangentes en M et M′ se coupent en un point T de la polaire de F, c'est-à-dire de la directrice Δ, associée à F. Les droites (MM′) et (FT) sont alors conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes issues de F. Ces dernières étant les droites isotropes du faisceau F*, les droites (MM′) et (FT) sont perpendiculaires.



On en déduit, en particulier, que la portion de tangente comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

. . .

Guide de travail pour L6

Droites et plans – point de vue empirique

Le chapitre I entend donner aux points à l'infini un statut autre que purement combinatoire, il est à parcourir rapidement. Les sections 5 à 8 du chapitre II donnent corps à la notion de transformation projective. On peut, dans un premier temps, se contenter d'une assimilation superficielle – notamment on peut passer rapidement sur les questions techniques relatives aux homographies – on retiendra tout particulièrement le théorème fondamental 8-5, il ouvre immédiatement de nombreuses applications. La section 9 en donne un échantillon significatif, illustrant, notamment, le rôle essentiel de la notion de repère projectif.

Produits de perspectives

Dans les exercices qui suivent, le cadre est le plan usuel complété de ses point à l'infini et d en désigne une droite donnée.

Des considérations de nature purement géométrique donnent un certain nombre d'informations sur les homographies de d. On trouvera des explications théoriques, plus loin dans le cours (cf. § 11, 12 et 18).

I

On considère trois points distincts A, B et C de d,

@ 1) Justifier l'existence d'une homographie f de d, unique, qui laisse A invariant et échange B et C.

@ 2) Donner une construction de l'image par f d'un point M, quelconque. En déduire que f est une involution ([1]).

@ 3) Montrer qu'il existe un second point, distinct de A, invariant par f.

II

@ 1) Montrer que toute homographie de d, laissant deux points invariants, est le produit de deux perspectives.

@ 2) Montrer que parmi les homographies laissant invariants deux points distincts, donnés, une seule est involutive.

III

1) Étant donnés cinq points A, B, B′, C, C′ de d, composant deux repères projectifs distincts (A, B, C) et (A, B′, C′), on considère l'homographie f qui transforme B en B′, C en C′ et laisse A invariant.

a) Montrer que f est le produit de deux perspectives.

b) Montrer que f admet, en général, un second point invariant. Préciser les cas d'exception.

2) Déduire de ce qui précède qu'une homographie f de d, admettant un point invariant, et un seul, est bien déterminée par la donnée de celui-ci et de l'image arbitraire d'un autre point arbitrairement choisi ([2]).

3) Montrer que les homographies laissant invariant un point **donné, et un seul**, auxquelles on ajoute l'application identique de d, forment un groupe.

---

1 Quand on parle d'involution de d, il s'agit d'homographie involutives, c'est-à-dire telle que $f^2 = \mathrm{Id}_d$.

2 Il apparaît ainsi qu'un unique point invariant compte pour deux. Ce qui reflète l'aspect algébrique de la question

IV

@ Faire un bilan des informations obtenues, dans les exercices précédents, après avoir établi que toute homographie de d se décompose en un produit de trois perspectives.

Retour sur les théorèmes de Pappus et de Desargues

V

@ Démontrer le théorème de Pappus en composant deux perspectives bien choisies.

VI

Démontrer le théorème de Pappus et le théorème de Desargues en utilisant leurs formes affines (cf. exercices 12 et 13 de géométrie affine)

Birapport – abscisse projective

Un retour les mécanismes justifiant l'intervention des homographies dans ce cadre ne sera peut être pas inutile, ne serait-ce que pour se persuader qu'une bonne part de ce qui semblait ardu, en première lecture, est devenu naturel.

VII

@ Un repère projectif d'une droite, du plan affine réel, étant donné, construire le point d'abscisse projective x, donnée [1].

VIII

@ Étant données deux droites d et d', soit O leur point commun, on considère le produit f des deux perspectives :

- π de centre A de d sur d'
- π' de centre B de d' sur d

On suppose que A et B ne sont pas alignés avec O. Montrer que f laisse invariant un point C, autre que O. Soit M le point courant de d, M' son image par f, évaluer le birapport $[O, C, M, f(M)]$ en fonction du birapport de droite $[d, d', (OA), (OB)]$.

IX

On considère une homographie f de d.

@ 1) Démontrer que f est une involution si, et seulement si, elle échange deux points distincts (proposition 12-3) par une autre voie que celle proposée dans le cours.

@ 2) Démontrer que f est soit une involution soit le produit de deux involutions (proposition 12-4), autrement que dans le cours.

X

@ Étant donnés un triangle de côtés a, b, c et trois points P, Q, R situés sur ses trois côtés. On considère les perspectives suivantes :

- $\pi : a \longrightarrow b$, de centre R,
- $\pi' : b \longrightarrow c$, de centre P,
- $\pi'' : c \longrightarrow a$, de centre Q,

1) Montrer que leur composition donne une involution.
2) Examiner le cas particulier où P, Q et R sont alignés.

---

1 On peut s'appuyer sur les définitions ou utiliser l'invariance du birapport par les perspectives et constater que le premier point de vue justifie le second.

Dualité

Le concept de dualité est essentiel, y compris du point de vue pratique. On s'en tient provisoirement au point de vue rudimentaire présenté à la section 3. Il sera justifié dans les formes dans le cadre de la section 20.

XI

@ 1) Qu'entend-on par perspective entre deux faisceaux de droites ?
Énoncer le théorème qu'on obtient en appliquant au dual le théorème 9-1.

@ 2) Étant données, deux droites d et d', un point O qui n'appartient à aucune d'elles, deux points A et B alignés avec O, une droite quelconque, passant par O et coupant d en P et d' en Q, on considère l'intersection M de (AQ) et de (BP). Déterminer le lieu de M.

3) Énoncer le résultat obtenu en appliquant ce qui précède au dual de P.

XII

@ Qu'entend-on par le centre d'une homographie entre deux faisceaux ?

XIII

Théorème de Pappus dual

@ 1) Justifier l'énoncé suivant – qu'on retiendra.
Si deux triangles ABC et A'B'C' sont en perspective de deux points, avec les correspondances suivantes :

ABC , B'C'A' et ABC , C'A'B',

ils le sont d'un troisisème avec la correspondance :

ABC, A'B'C'.

Autrement dit, si (AB'), (BC') et (CA') sont concourantes, ainsi que (AC'), (BA') et (CB'), alors (AA'), (BB'), et (CC') sont concourantes.

@ 2) A quelle condition le troiseme centre de perspective est-il aligné avec les deux premiers ?

@ 3) Donner une démonstration utilisant des arguments qui, exception faite de l'intervention de points à l'infini, sont à la portée d'un élève de quatrième.

Involution de Desargues

Compléter la lecture du chapitre II. Nous n'en n'exploitons pas toutes les possibilités dans l'immédiat.

XIV

@ 1) Étant donnés deux triangles ABC et PQR, on note :

- p, q, r les parallèles à (QR), (RP) et (PQ) passant respectivement par A, B et C,
- a, b, c les parallèles à (BC), (CA) et (AB) passant respectivement par P, Q et R.

Montrer que p, q et r sont concourantes si, et seulement si, a, b et c le sont.

2) Énoncer les théorèmes obtenus en appliquant au dual le deuxième Desargues (12-5), ainsi que son corollaire (12-6).

@ 3) Étant donnés un triangle ABC et une droite coupant (BC), (CA) et (AB) en P, Q et R, on note a, b, c, p, q et r des droites parallèles passant par A, B, C, P, Q et R. Un triangle P'Q'R' a ses trois sommets respectivement situés sur p, q et r. Montrer que les points respectivement communs à a et (Q'R'), b et (P'Q'), c et (P'Q') sont alignés.

XV

@ Étant donné un point S et un triangle ABC dont aucun côté ne passe par S, les perpendiculaires en S à (SA) (SB) et (SC) coupent respectivement (BC), (CA) et (AB) aux points A', B' et C' qu'on suppose ces points distincts des sommets A, B et C. Montrer que A'B' et C' sont alignés.

XVI

@ Étant donné un triangle ABC et un point H, on note A', B', C' les pieds de ses céviennes et H' son symétrique par rapport à A'. Les parallèles, en H', à (BB') et (CC') coupent respectivement (AC) en B" (AB) en C". Montrer que A', B" et C" sont alignés.

XVII

Étant donné deux triangles ABC et A'B'C', montrer que si les perpendiculaires abaissées de A, B et C respectivement sur (B'C'), (C'A') et (A'B') sont concourantes, il en est de même des perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur (BC), (CA) et (AB).

XVIII

@ Déduire le premier théorème de Desargues du second.

Deux reformulations

XIX

@ On dit que trois triangles forment un *cycle* s'ils sont inscrits l'un dans l'autre, comme suit :

- le deuxième dans le premier,
- le troisième dans le deuxième,
- le premier dans le troisième.

Étant donné un triangle A'B'C' inscrit dans un triangle ABC, montrer que tout point d'un côté de A'B'C' est sommet d'un triangle venant compléter un cycle.

XX

@ Montrer que si cinq sommets d'un quadrilatère complet sont situés sur cinq côtés d'un quadrangle, le sixième sommet du premier appartient au sixième côté du second.

La théorie

Modifier les règles d'incidence en décidant que des droites parallèles "se coupent à l'infini" est une idée féconde. Cependant, cette opération n'a de sens que si l'on est en mesure de banaliser le statut des nouveaux venus, comme nous avons pu le faire pour la droite. La gènéralisation de la notion d'homographie ne peut se concevoir,– raisonnablement – sans recours explicite à l'algèbre linéaire. Tel est le fil conducteur du chapitre III.

Qu'il soit bien clair que la notation $p(\#)$ est quelque peu abusive mais elle a le mérite d'être claire et d'éviter des circonlocutions désagréables. L'argument #, désigne un objet de l'algèbre linéaire, tantôt vecteur, espace vectoriel, sous-espace ou isomorphisme. On gardera présent à l'esprit que, s'appliquant à des vecteurs ou des isomorphismes, on a :

$$p(\#) = p(\$) \Leftrightarrow \exists\lambda \ \lambda \neq 0 \text{ et } \# \neq \lambda \$.$$

ce qui n'a de sens que si $\$$ est différent de 0.

XXI

Les six valeurs du birapport

@ En utilisant les acquis du chapitre III, jutifier la règle (6-5), sur l'échange des arguments d'un birapport.

Le plan pour lui-même

Les connaissances théoriques utiles sont clairement rappelées au debut de la section 19. Il est possible d'en admettre l'essentiel, pourvu qu'on ait compris les définitions.

XXII

1) Étant donné un repère projectif du plan, on est en présence d'un quadrangle. Déterminer :

a) les équations de ses côtés,

b) les coordonnées de ses trois points diagonaux,

c) les équations des droites passant par ces trois points, ainsi que les coordonnées de leurs points d'intersection avec les côtés.

2) Expliquer la construction d'un point donné par ses coordonnées homogènes relativement à un repère donné.

XXIII

Étant donnés trois points non alignés A, B, C et une droite d ne passant par aucun d'eux, montrer qu'il existe un point D, unique, tel que (A, B, C, D) soit un repère projectif et d admette pour équation, relativement à celui-ci :

$$X+Y+Z=0 \text{ (1)}.$$

XXIV

@ Étant donnés trois points non alignés A, B, C, on considère les points suivants :

• P et P′ de (BC) • Q et Q′ de (CA) • R et R′ de (BC),

différents de A, B et C. On note

$$p=[B,C,P,P'] \;,\; q=[C,A,Q,Q'] \text{ et } r=[A,B,R,R'].$$

et l'on suppose que p, q et r sont autres que 0, 1 ou ∞.

1) Montrer que si $\boldsymbol{pqr=1}$, alors :

(AP), (BQ) et (CR) concourantes $\Leftrightarrow$ (AP′), (BQ′) et (CR′) concourantes

P, Q et R alignés $\Leftrightarrow$ P′, Q′, R′ alignés

2) Montrer que si $\boldsymbol{pqr=-1}$, alors :

(AP), (BQ) et (CR) concourantes $\Leftrightarrow$ P′, Q′, R′ alignés

XXV

@ On considère un quadrilatère complet, on convient de noter A′, B′, C′ trois de ses sommets alignés et A, B, C les sommets opposés. Une droite d coupe les diagonales (AA′), (BB′) et (CC′) respectivement en P, Q et R. Soit P' le conjugué harmonique de P par rapport à A et A′ ; Q′ et R′ les points définis de façon analogue. Montrer que P′, Q′ et R′ sont alignés.

XXVI

@ Étant donnés cinq points A, B, C, D et E, d'un plan projectif P, tels que quatre quelconques d'entre eux forment un repère projectif de P, on pose :

$$a=[AB,AC,AD,AE] \;,\; b=[BA,BC,BD,BE] \text{ et } c=[CA,CB,CD,CE]$$

Déterminer une relation entre ces trois nombres.

1 On retiendra cette propriété.

Homologie

XXVII

Donner la construction de l'image d'un point quelconque par une :

- homologie définie par la donnée de son centre, de son axe et de l'image d'un point arbitrairement choisi.
- élation définie par la donnée de son axe et de l'image d'un point arbitrairement choisi.

XXVIII

@ Montrer que toute élation d'axe d est le produit de deux homologies de même axe dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Toute élation est le produit de deux homologies harmoniques.

XXIX

@ 1) Soit $f = p(\varphi)$ une homographie du plan caractériser, en termes de valeurs propres et de sous-espaces propres, le fait que :

- f laisse trois point invariants et trois seulement,
- f soit une homologie,
- f soit une élation.

2) Montrer qu'une homographie de P admettant trois points invariants A, B et C est le produit de deux homologies, l'une de centre A et d'axe (BC) et l'autre de centre B et d'axe (AC).

Caractérisation projective de polygones réguliers

On peut se poser la question :
qu'est-ce qu'une propriété projective ?
et trouver quelques éléments de réponse à partir de cas d'espèces simples.

XXX

@ Quelles sont toutes les images possibles par les homographies :

- d'un triangle équilatéral,
- d'un carré,
- d'un hexagone régulier,
- d'un pentagone régulier.

La complexification n'est pas un sujet d'application en soi, il convient néanmoins de se familiariser avec les éléments imaginiaires des objets réels. La dernière section du cours sur les coniques Reposera sur les réponses aux questions posée ci-dessous.

XXXI

@ On considère un quadrilatère complet dont les côtés, pris deux à deux, sont des droites imaginaires conjuguées. Combien possède-t-il :

- de sommets réels ?
- de diagonales réelles ?

La droite projective complexe

La droite projective complexe est le cadre adapté pour traiter nombre de problèmes élémentaires où des points se caractérisent par la propriété d'être cocycliques **ou** alignés.

XXXII

L'identification usuelle du corps des nombres complexes au plan affine euclidien, via le choix d'un repère orthonormé, se prolonge au plan doté d'un point à l'infini, **unique** et à la droite projective complexe $p(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$. Il est ainsi possible de faire agir le groupe projectif de la droite complexe sur le plan.

@ 1) Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument du birapport de quatre points du plan. En déduire une propriété remarquable des homographies de $GP(\hat{\mathbb{C}})$ ([1]).

2) Donner une interprétation classique du groupe des tranformations affines de $\hat{\mathbb{C}}$.

XXXIII

On dit que quatre points du plan forment un *quadrangle harmonique* s'ils forment un division harmonique dans $\hat{\mathbb{C}}$.

@ 1) Étant donnés quatre points A, B, C et D, on note a, b, c et d leur affixes respectives. Montrer que ABCD est un quadrangle harmonique si, et seulement si :

$$(a-m)^2 = (c-m)(d-m),$$

où m désigne l'affixe du milieu de AB.

2) Qu'est-ce qu'un quadrangle harmonique dont trois points sont alignés ?

@ 3) Construire le quatrième sommet d'un quadragle harmonique dont les trois premiers sont donnés distincts.

@ 4) Soit a un nombre complexe donné par son image A, contruire les images de racines carrées de a.

5) Les deux nombres complexes a et b étant donnés par leurs images, construire les images des racines de l'équation :

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$

XXXIV

1) Quels sont les éléments d'ordre fini du groupe $GP(\hat{\mathbb{C}})$.

@ 2) Donner une construction géometrique de l'image d'un point quelconque par l'homographie $z \mapsto z'$ décrite par la relation suivante :

$$\frac{(z'-1)}{(z'+1)} = \frac{(z-1)}{(z+1)} e^{i\alpha},$$

où α désigne un nombre réel donné.

---

1 Penser aux lieux des points M tels que $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$ ou encore tels que $\frac{MA}{MB} = k$, où A et B sont deux points donnés, α et k sont des réels donnés.

Coniques

Prendre connaissance du contenu des sections 24 à 27. Oon retiendra tout spécialement le théorème 25-3 caractérisant la conjugaison en termes de division harmonique et le corollaire 25-6 caractérisant la polaire d'un point comme étant la droite joignant les points de contact des tangentes qui en sont issues. La section 27 doit être étudiée avec la plus grande attention.

XXXV

Rapprocher les résultats des exercices 8 et 21 sur les coniques (cf. fascicule d'exercices). En tirer une relation entre un foyer et sa directrice associée.

XXXVI

@ Étant donnés une conique et quatre de ses tangentes issues de deux points donnés, montrer que les quatre points de contact et les deux points donnés appartiennent à une même conique.

XXXVII

@ Le plan étant donné affine, on considère deux points A, B et une droite d ne passant par aucun d'eux. Soit I un point de d, on note N le point courant de d et N' son symétrique par rapport à I.

@ 1) Montrer que le lieu du point commun à (AN) et (BN') est, généralement une conique propre $\mathscr{C}$, passant par A et B. Déterminer sles tangentes en ces points. A Préciser les cas d'exception ?

@ 2) Déterminer les points à l'infini de $\mathscr{C}$.

XXXVIII

Énoncer la forme duale des Théorèmes de Chasles-Steiner.

Interpréter le résultat de l'exercice VIII-18 du fascicule d'exercices, à la lumière des acquis de nature projective.

XXXIX

@ 1) Une conique étant donnée par trois points A, B, C et ses tangentes en A et B, construire la tangente en C et plus généralement la tangente en un point quelconque.

2) Construire le point courant d'une conique donnée par cinq de ses points. En construire aussi la tangente.

XL

Homographies d'une conique

On considère une conique propre $\mathscr{C}$.

@ 1) Démontrer le théorème suivant en s'inspirant de la démonstration directe du théorème de Pappus, traitée en exercice. (cf exercice 6).

<u>Théorème de Pascal</u> : si un hexagone est inscrit dans une conique, ses côtés opposés se coupent en trois points alignés.

Justifier l'énoncé qui suit.

<u>Théorème de Brianchon</u> : si un hexagone est circonscrit à une conique, les qui en joignent les sommets opposés sont concourantes.

@ 2) Donner une définition des homographies de $\mathscr{C}$. Etablir l'existence d'un axe d'homographie, dans un sens analogue à celui mis en évidence pour les homographies entre droites (cf. théorème 9-2).

3) Caractériser les involutions de $\mathscr{C}$.

Etudier les sections 28 à 30 elles ne constiuent en rien une conclusion car, en fait, ce cours se termine sur une porte ouverte.

XLI

@ Le plan étant donné affine, on considère deux points distincts A et B et deux droites d et d', passant par B mais pas par A. On note U et U' les points d'intersection d'une droite passant par A avec d et d'. Déterminer le lieu du milieu M de UU', en préciser les branches infinies.

XLII

@ Étant donnée une hyperbole $\mathscr{H}$ et deux de ses points A et B, on note M son point courant. Montrer que les droites (MA) et (MB) découpent sur une asymptote un segment de longueur constante.

XLIII

Étant données deux droites perpendiculaires d et e, on note H leur point commun. On considère deux points A de d et B de e, distincts de H.

@ 1) Montrer qu'il existe une parabole $\mathscr{P}$ tangente à d en A et à e en B. En déterminer le foyer, la directrice et l'axe.

2) On note B' et A' les points où les droites passant respectivement par A et B et parallèles à e et d recoupent $\mathscr{P}$. Montrer que (A'B') est l'image de (AB) par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

XLIV

@ 1) Redémontrer la propriété de l'exercice 36 en recourant à une homographie bien choisie du plan. Puis montrer que la conique obtenue est l'ensemble des points M tels que les tangentes à la conique donnée, issues de M sont conjuguées harmoniques par rapport à (MA) et (MA').

2) A quelle condition cette dernière est-elle une hyperbole équilatère, dans le cas où la conique donnée est une parabole ?

Aides

I 1) L'existence et l'unicité résultent du théorème fondamental.

2) Il est possible de décomposer f en un produit de deux perspectives la première est arbitraire le centre de la seconde est déterminé par le résultat attendu.

3) L'existence est facile à établir, mais il est malaisé de justifier l'unicité à partir de considérations portant exclusivement sur l'incidence. On peut être concis et convaincant en se ramenant au cas affine - on supprime une droite bien choisie ...

II 1) On notera que le produit de deux perspectives entre deux droites d et d' laisse invariant leur point d'intersection et le point situé sur la droite qui joint les centres.

2) Enlever une droite, bien choisie, tout devient élémentaire.

IV Se reporter à la remarque qui suit la démonstration du théorème sur l'axe d'homographie.

V Avec les notations, du cours aller de (AB') sur (AB) puis sur (CB') de façon à obtenir une perspective de centre B" ... qui transforme C" en A".

VII On choisit arbitrairement une perspective qui transforme le point A en un point à l'infini.

VIII Il s'agit d'une application de la conservation du birapport et de la définition du birapport de quatre droites.

IX 1 & 2) Expliciter l'application et traduire les l'hypothèse relativement à un repère, bien choisi.

X On applique la propriété revue dans le cadre de l'exercice précédent.

XI 1) S'aider, au besoin, du tableau de la page 10 qu'on pourra compléter par soi-même au fur et à mesure qu'on avancera.

2) Penser au principe d'incidence (cf 8-6), on l'applique plusieurs fois, ce qui permet de caractériser l'application (AQ) $\mapsto$ (BP).

XII Traduire le théorème 9-2.

XIII 1) Rechercher des perspectives duales dans la version classique du théorème de Pappus.

2) Le troisième centre de perspective peut être regardé comme le centre d'une homographie entre deux faisceaux. Que signifie son alignement avec les points de base de ceux-ci ?

3) Si des centres des perspectives sont situés à l'infini, le spectre de Thalès n'est pas loin.

XIV 1) On considère l'involution de Desargues définie sur la droite de l'infini.

3) L'étude de la version duale de l'involution de Desargues n'était pas gratuite.

XV On extrait un quadrilatère complet, l'involution de Desargues définie sur le faisceau S* est bien particulière.

XVI Considérer la symétrie oblique d'axe (BC) qui échange H et H'. Elle induit une involution de la droite de l'infini ...

XVIII On reprend les notations du cours, OABC et OA'B'C' sont deux quadrangles. Considérer leurs involutions de Desargues sur une droite bien choisie. La conclusion de façon immédiate.

XIX Si A"B"C" est inscrit dans A'B'C' et ABC est inscrit dans A"B"C", A" est sur (B'C'), (A"C") passe par B et C" est sur (A'B') ... il s'agit alors alors bien d'une reformulation d'un classique.

XX La difficulté est de "lire" la figure indépendamment de la définition donnée.

XXI Appliquer la définition de l'abscisse projective, en tenant compte de la remarque qui la suit.

1) Une des relations est évidente, deux autres s'obtiennent sans difficulté et la quatrième se déduit des trois premières.

2) Appliquer ce qui précède, afin de déterminer l'effet des autre transpositions possibles. Le résutat est alors immédiat.

XXIV Un choix judicieux du repère nous ramène à une situation analogue à celle des théorèmes de Céva et de Ménélaüs. S'inspirer de l'exercice 4 de géométrie affine.

XXV Si l'on choisit judicieusement le repère, en tenant compte, notamment, du résultat de l'exercice 23, la question se règle en quelques mots.

XXVI C'est bête ! mais pas méchant.

XXVIII On pourra commencer par se persuader que le produit de deux homologies de même axe est, généralement, une homologie – les trois centres étant alignés. Le cas d'exception est celui qui nous intéresse ici.

XXIX Penser que point fixe de f et vecteur propre de φ, c'est la même chose – ou presque. Quelles sont les éventualités qui font que φ est diagonalisable ou pas ?

XXX Pour le triangle et le carré c'est évident. Pour l'hexagone régulier penser en termes de triangles en perspective. On tombe alors sur un cas particulier de l'exercice 13. Penser qu'une symétrie centrale est une homologie harmonique particulière. Quant au pentagone régulier il est en perspective du pentagone défini par ses diagonales, à la fois de son centre et de la droite de l'infini. On peut conclure en utilisant ce qui a été établi en géométrie affine.

XXXI Un élément est réel s'il est invariant par conjugaison.

XXXII 1) Les droites et les cercles du plan affine ont ici un statut commun les premières sont les lignes de la famille qui contiennent le point à l'infini.

XXXIII 1) Se déduit de l'une des relations qui caractérisent les divisions harmoniques.

3) Utiliser le résultat du point a.

4) Penser à faire intervenir de point d'affixe 1.

XXXIV 2) Faire intervenir les lieux géométriques suivant :

- $\mathscr{C}_k$ des points M teles que $\frac{MA}{MB} = k$
- Γ_θ des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \pmod{\pi}$,

où A et B sont des points, bien choisis, et k, θ sont deux nombres réels.

XXXVI Considérer le quadrangle formé par les points de contact. Ses points diagonaux ont même polaire par rapport à la conique donnée et celle dont on veut établir l'existence.

XXXVII 1) Il s'agit d'une application directe du théorème de Chasles-Steiner. La conique dégénère dans deux cas.

2) Un des cas où (AN) et (BN') sont parallèles est évident. L'autre n'est pas très difficile à trouver. Il se peut que ces deux cas coïncident.

XXXIX Le quadrangle formé par les trois points donnés et le point commun aux deux tangentes met à notre disposition un certain nombre de divisions harmoniques. En outre, la polaire d'un point coupe la conique aux points de contact des tangentes issues de celui-ci.

XL 1) Une perspective d'une conique sur sur droite est une homographie dans la mesure où le centre est situé sur la conique.

2) Aller au plus simple. Ce n'est pas le fait du hasard, si le théorème de Pascal est apparu avant l'axe d'homographie.

3) La droite qui joint deux points homologues passe alors par le pôle de l'axe d'homographie. Ne pas oublier la réciproque !

XLI Une certaine involution de la droite de l'infini induit une homographie entre les faisceaux A* et B* ... Le centre d'une conique est le pôle de la droite de l'infini.

XLII Une perspective d'une conique sur une droite ... y compris si cette droite est une tangente. Or, les asymptotes d'une hyperbole sont les tangentes en ses points à l'infini. Une homographie d'une droite dont le seul point fixe est à l'infini est ...

XLIII 1) Au départ, les arguments sont ceux, classiques, déjà utilisés dans l'étude des coniques.

2) Commencer par montrer que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles. On peut faire intervenir la polaire du point D, commun à (AA') et (BB'), penser que la parabole est tangente à la droite de l'infini.

Une fois cette propriété acquise, on dispose, sur la droite (HD), de plusieurs divisions harmoniques dont certaines englobent le point à l'infini de la parabole ... On pensera à la caractérisation d'une division harmonique qu'on obtient en prenant pour origine le milieu de deux de ses points.

XLIV Une conique passant par les points cycliques est un cercle. Ce constat permet de ramener le problème à un exercice de géométrie élémentaire classique. Il suffit de choisir judicieusement les points de la conique qu'on échange avec les points cycliques ([1]).

---

1 Sans aller jusqu'à parler de "grand art", il s'agit là d'une gymnastique intellectuelle qui illustre bien la maxime :"les mathématiques sont faites par des paresseux, pour des paresseux !".

Ébauches de solutions

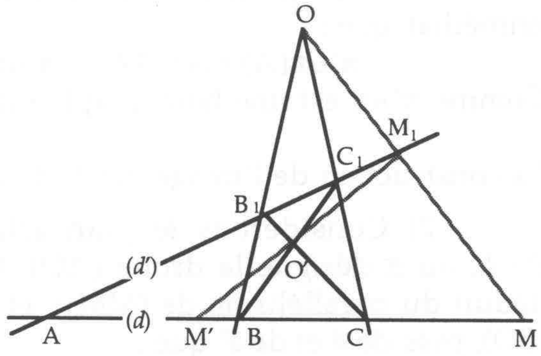
I

1) Les points considérés étant distincts, (A , B , C) et (A , C , B) sont deux repères projectifs. Il existe donc une homographie f de D qui tranforme :

A en A, B en C et C en B.

Elle est unique.

2) Considérons une droite arbitraire d', passant par A et un point O qui n'appartient ni à d ni à d', soit π la perspective de centre O de d sur d', B_1 et C_1 les images de B et C par cette application. Soit π' la perspective de d' sur d dont le centre est O', l'intersection de (BC_1) et (CB_1). Il est immédiat que :



$$\pi' \circ \pi(A) = A \ , \ \pi' \circ \pi(B) = C \text{ et } \pi' \circ \pi(C) = B.$$

et comme $\pi' \circ \pi$ est une homographie de d, on sait que :

$$\pi' \circ \pi = f.$$

La construction de l'image d'un point quelconque M de d est alors immédiate. Notons $M_1 = \pi(M)$, on a $f(M) = \pi'(M_1)$.

Soit π_1 et π_1' les deux perpectives obtenues en échangeant les centres de π et π', on vérifie que :

$$\pi_1' \circ \pi_1(A) = A \ , \ \pi_1' \circ \pi_1(B) = C \text{ et } \pi_1' \circ \pi_1(C) = B.$$

Il s'ensuit que :

$$\pi_1' \circ \pi_1 = \pi' \circ \pi = f.$$

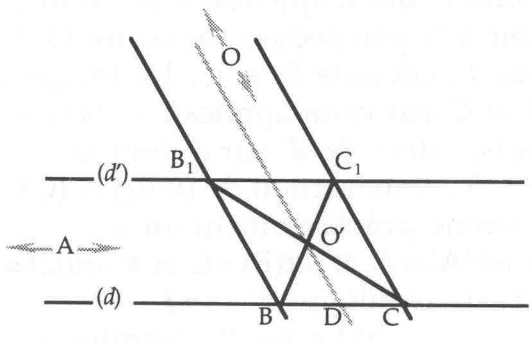
On a donc toujours :

$$f(M') = \pi_1' \circ \pi_1(M') = \pi_1(M_1) = M.$$

Ce qui montre que f est une involution.

3) Il est évident que le point D, commun à d et (OO'), est invariant par f. Montrons que ce point est différent de A

Soit Δ la droite (AO), $P - \Delta$ est un plan affine où les points B, C, B_1 et C_1 sont les sommets d'un parallélogramme et (OO') est la parallèle au côté (BB_1), passant par l'intersection des diagonales. Ce qui montre que D est le milieu de BC. Ce point est bien différent de A.

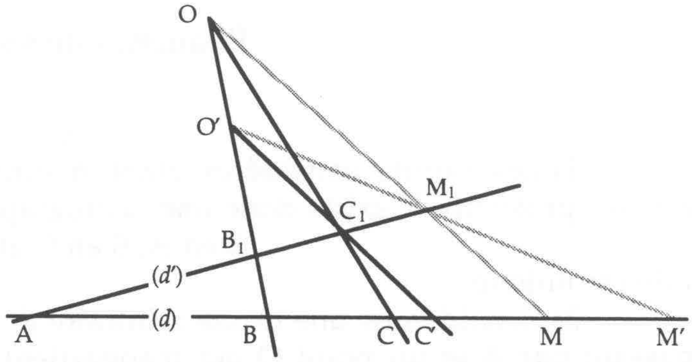


<u>Remarque</u> : f s'interprète comme la symétrie de centre D pour la droite affine $d - \{A\}$.

II

Étant donnée une homographie f, laissant invariants deux points A et B, soit C un point distinct de A et de B, on note C′ son image par f.

Considérons une droite arbitraire d', passant A, et un point O qui n'appartient ni à d ni à d', soit π la perspective de centre O de d sur d'. On note B_1 et C_1 les images respectives de B et C par cette application. Soit π' la perspective de d' sur d dont le centre est O′, l'intersection de (BB_1) et $(C'C_1)$. Il est immédiat que :



$$\pi' \circ \pi(A) = A = f(A) \;\; , \;\; \pi' \circ \pi(B) = B = f(B) \;\text{ et }\; \pi' \circ \pi(C) = C' = f(C).$$

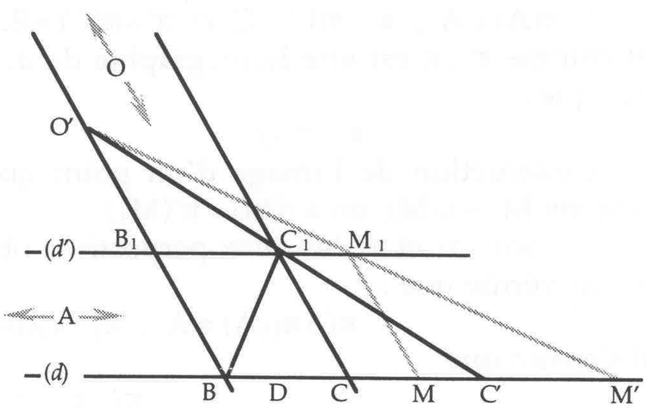
Comme $\pi' \circ \pi$ est une homographie de D et (A , B , C) est un repère projectif, on a :

$$\pi' \circ \pi = f.$$

La construction de l'image par f d'un point quelconque est alors immédiate.

2) Considérons le plan affine $P - \Delta$, où Δ désigne la droite (AO). On déduit du parallélisme de (MM_1) et de (BO), puis de d et de d' que :

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}} = \frac{\overline{BO'}}{\overline{MM_1}} = \frac{\overline{BO'}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} = k.$$



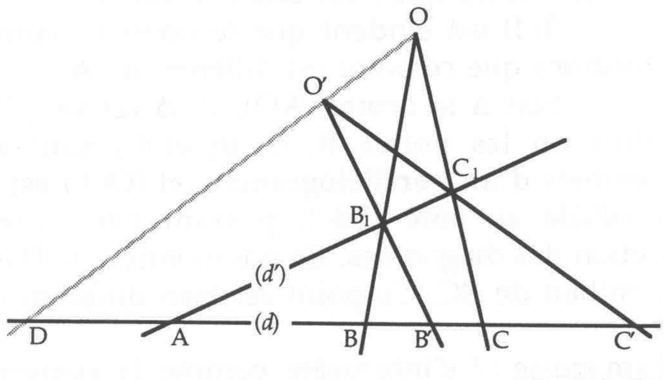
Ce qui montre que f induit l'homothétie de centre B, de rapport k, de la droite affine $d - \{A\}$. Pour C donné, il existe donc un seul choix de C′ qui donne une involution. L'application obtenue : la symétrie de centre O de $d - \{A\}$, est indépendante de C.

III

1) a) Considérons une droite arbitraire d', passant par A, et un point O qui n'appartient ni à d ni à d', soit π la perspective de centre O de d sur d'. On note B_1 et C_1 les images de B et C par cette application. Soit π' la perspective de d' sur d dont le centre est O′, l'intersection de $(B'B_1)$ et $(C'C_1)$. Comme précédemment on a :

$\pi' \circ \pi(A) = A$, $\pi' \circ \pi(B) = C$ et $\pi' \circ \pi(C) = B$.

On en déduit que $\pi' \circ \pi = f$.



b) Le point commun à d et (OO′) est évidemment invariant par f. Il est distinct de A si (OO′) ne passe pas par ce point.

On retient que si f admet A pour seul point invariant, c'est que O′ est aligné avec A et O.

2) Dans ces conditions, pour un choix donné de π, O′ est entièrement déterminé par la donnée de A, de B et de B′. En conséquence, il est établi que

> étant donnés trois points distincts A, B et B′, il existe **au plus** une homographie f, de d, admettant A pour unique point invariant et telle que $f(B) = B'$.

Reste à montrer l'existence. On choisit la perpective π comme ci-dessus et le point O′ à l'intersection des droites (AO) et (B_1B'). On note π' la perspective de centre O′ de d' sur d. Il est immédiat que $\pi' \circ \pi$ est une homographie qui remplit les conditions. On a donc justifié que :

> étant donnés trois points distincts A, B et B′, il existe une homographie f, de d, et une seule, admettant A pour unique point invariant et telle que $f(B) = B'$.

3) Soit f et g deux telles homographies et A leur point double commun. Si $g \circ f$ laisse invariant un point B distinct de A, on a :

$$f(B) = B' \quad \text{et} \quad g(B') = B.$$

Il résulte alors de la question précédente que $g = f^{-1}$ et que $g \circ f = \mathrm{Id}_d$. Il est alors immédiat de vérifier que les homographies en question forment un sous-groupe de GP(d).

<u>Suggestion</u> : interpréter ceci pour la droite affine $d - \{A\}$.

IV

Soit f une homographie de d et π une perspective arbitraire de d sur une droite d', $f \circ \pi^{-1}$ est une homographie de d' sur d. La démonstration du théorème sur l'axe d'homographie montre que $f \circ \pi^{-1}$ est le produit de deux perspectives. Il s'ensuit que f est bien le produit de trois perspectives dont la première peut être choisie arbitrairement.

Si f admet A pour point invariant, on choisit d' passant par A, L'homographie $f \circ \pi^{-1}$ laisse aussi A invariant, c'est donc une perspective π'. Dans ces conditions, on a $f = \pi' \circ \pi$, cette transformation laisse un ou deux points invariants selon que les centres de π et π' sont, ou ne sont pas, alignés avec A.

Si f ne laisse aucun point invariant, ce n'est pas un produit de deux perpectives, c'est donc un produit de trois perspectives.

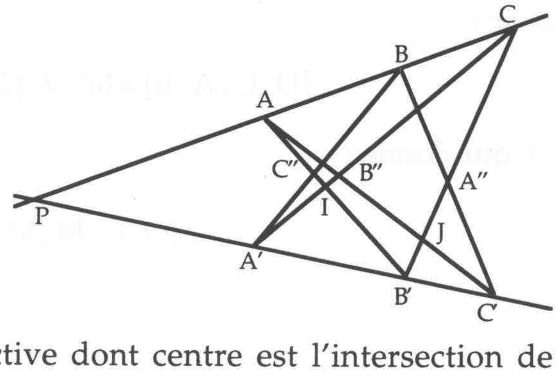
V

On reprend les notations utilisées dans le cours. Soit P, I et J les points communs respectivement aux droites :

(AB) et (A′B′), (AB′) et (CA′), (AC′) et (CB′),

en composant la perspective de centre A′, de (AB′) sur (AB) avec la perspective de centre C′ de (AB) sur (CB′), on obtient l'homographie de (B′A) sur (B′C) qui transforme :

B′ en B′, I en C, C″ en A″ et A en J.



Comme B′ est invariant, il s'agit d'une perpective dont centre est l'intersection de (IC) et de (AJ), c'est-à-dire B″. Ce point est donc aligné avec A″ et C″.

VI

On conserve les données précédentes et l'on note Δ la droite (B″C″). Dans le plan affine $P-\Delta$, les droites (AB′) et (BA′) sont parallèles ainsi que (AC′) et (CA′). L'exercice 13 (de géométrie affine), montre que (BC′) et (CB′) sont parallèles. Autrement dit, le point A″ appartient à la droite Δ.

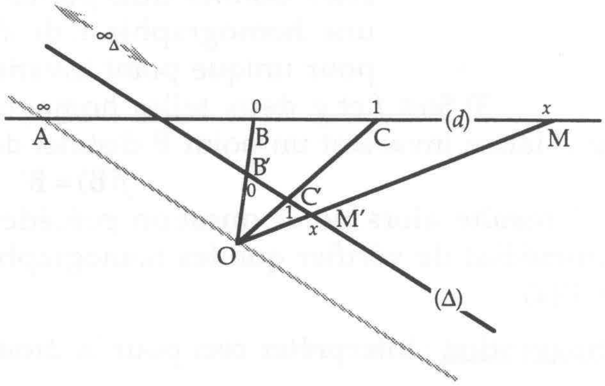
On conserve les notations du théorème (9-4). Ici encore on note Δ la droite (B″C″), on applique le résultat de l'exercice 12 (de géométrie affine) dans le plan affine $P-\Delta$.

VII

Soit (A,B,C) le repère donné de d, on choisit un point O n'appartenant pas à d, une droite Δ parallèle à (OA). La perpective π, de centre O, de d sur Δ, transforme A en ∞_Δ, B en B′ et C en C′. Soit M le point cherché, M′ son image par π, on a :

$$[\infty,B',C',M']=[A,B,C,M']=x.$$

Le nombre x, donné, est l'abscisse de M′, dans le repère affine (B′,C′) de Δ. On sait construire ce point. la perspective π^{-1} donne le point M.



VIII

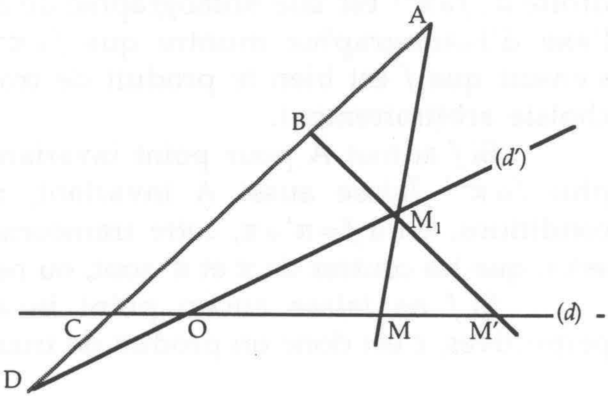
Le début reprend ce qui a été vu à l'exercice 1. Le second point invariant C est l'intersection de d et de (AB). On note D le point commun à d' et (AB) et M_1 le point intermédiaire $\pi(M)$. La perspective de centre M_1 de d sur (AB) transforme :

O en D, C en C, M en A et M′ en B.

On a donc :

$$[O,C,M,M']=[D,C,A,B].$$

Ce birapport est celui des droites du faisceau O* passant par D, C, A et B. On a donc :



$$[D,C,A,B]=[d',d,(OA),(OB)]=\frac{1}{[d,d',(OA),(OB)]}.$$

Ce qui donne :

$$[O,C,M,M']=\frac{1}{[d,d',(OA),(OB)]}.$$

IX

1) La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est sufisante. Si f échange deux points distincts A et B, on complète A et B d'un point C pour former un repère de d. Dans ces conditions f s'exprime :

$$x \mapsto \mathrm{F}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Les hypothèses se traduisent :

- $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $\frac{a}{c} = \mathrm{F}(\infty) = 0$, ce qui entraîne que $a = 0$ et $c \neq 0$
- $f(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, $\frac{b}{d} = \mathrm{F}(1) = \infty$, ce qui entraîne $d = 0$ et $b \neq 0$

Il existe donc un scalaire α, non nul, tel que :

$$\mathrm{F}(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Il est alors immédiat que $f^2 = \mathrm{Id}_d$. On est donc bien en présence d'une involution.

Remarque : vérifier qu'il est toujours possible de choisir le point C de façon que f soit décrite par $x \mapsto \frac{\varepsilon}{x}$, où $\varepsilon = \pm 1$. Notons que la forme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est celle des involutions hyperboliques et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est celle des involutions elliptiques.

Pour une droite complexe, il est clair que toute involution peut se présenter sous la forme $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2) On commence comme dans le cours. On considère une homographie f, d'une droite D, autre que l'application identique. On choisit un point A, tel que $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A}) \neq \mathrm{A}$, on note $\mathrm{A}'' = f(\mathrm{A}')$. Alors, si $\mathrm{A}'' = \mathrm{A}$, f alors une involution (cf. 12-3), Sinon $(\mathrm{A}', \mathrm{A}, \mathrm{A}'')$ est un repère projectif. Relativement à celui-ci, f s'exprime :

$$x \mapsto \mathrm{F}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Les conditions $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{A}') = \mathrm{A}''$ se traduisent :

$$\infty = \mathrm{F}(0) \quad \text{et} \quad 1 = \mathrm{F}(\infty).$$

Ce qui entraine que :

$$d = 0 \quad \text{et} \quad a = c.$$

Il existe donc un scalaire non nul k tel que :

$$\mathrm{F}(x) = 1 - \frac{k}{x}.$$

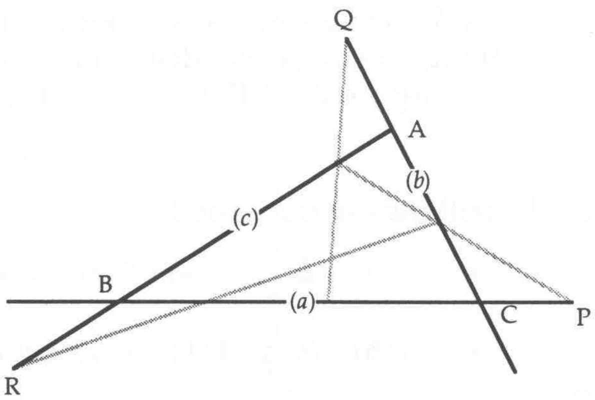
On en déduit immédiatement que f se décompose comme suit :

$$f = h \circ g$$

où g et h sont les involutions qui, relativement au repère choisi, s'expriment :

$$g : x \mapsto \frac{k}{x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto 1 - x.$$

X



L'application $f = \pi'' \circ \pi' \circ \pi$ est une homographie de a. On note que

$$f(B) = C \text{ et } f(C) = B.$$

C'est donc une involution. On a, en effet :

$$f(B) = \pi'' \circ \pi' \circ \pi(B) = \pi'' \circ \pi'(A) = \pi''(A) = C$$
$$f(C) = \pi'' \circ \pi' \circ \pi(C) = \pi'' \circ \pi'(C) = \pi''(B) = B$$

Si P, Q et R sont alignés, P en est un point fixe. Le second point invariant est alors le conjugué harmonique de ce point par rapport à B et C ([1]).

N.B. Cette propriété est équivalente au théorème de Pappus dual (cf. exercice 13).

XI

1) Étant donnés deux faisceaux de droites D* et D'* dont les points de base D et D' sont distincts. On considère une droite o ne passant ni par D, ni par D', on note M son point courant. L'application :

$$\pi : (DM) \mapsto (D'M)$$

est la*perspective* (duale), d'*axe o*, de D* sur D'*.

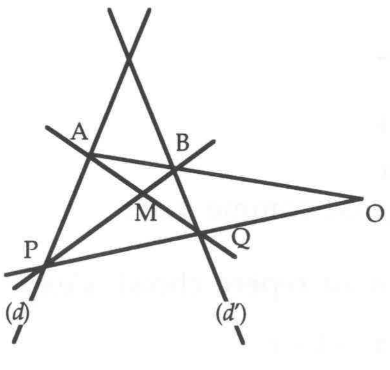
Avec ces conventions, le théorème 9-1, appliqué à P* s'énonce comme suit.

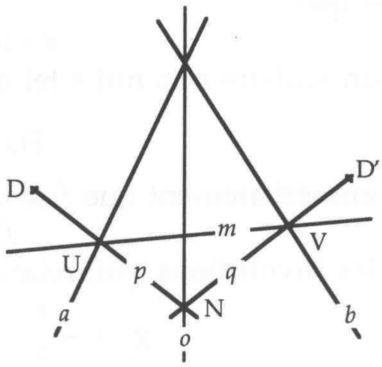
<u>Théorème</u> : étant donnés deux faisceaux de droites D* et D'*, toute homographie de D* sur D'* qui transforme la droite (DD') en elle-même est une perpective.

2) Le principe d'incidence (cf. 4-2) montre que les applications suivantes sont des homographies :

$$\begin{array}{ccccccccc} A^* & \longrightarrow & d' & \longrightarrow & O^* & \longrightarrow & d & \longrightarrow & B^* \\ (AQ) & \mapsto & Q & \mapsto & (OQ) = (OP) & \mapsto & P & \mapsto & (BP) \end{array}$$

Leur composition donne donc une homographie. Il est immédiat que le rayon commun aux deux faisceaux est est sa propre image. On est donc en présence d'une perspective duale. Le lieu du point M en est l'axe.





3) Appliqué à P*, ce résultat devient. Étant donnés deux points D et D', une droite o ne passant par aucun d'eux et deux droites a et b, concourantes avec o, on note N le point courant de o. On convient que (DN) coupe a en U et (D'N) coupe b en V. Dans ces conditions, les droites (UV) forment un faisceau ([2]).

---

1 Si P, Q et R sont alignés sur la droite de l'infini, on reconnaît la figure familièrement nommée : "tourniquette".

2 Il est commode de dire que ces droites enveloppent un point.

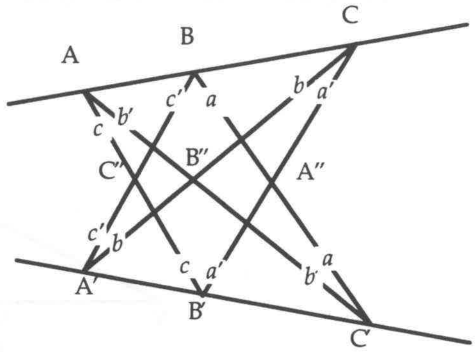
XII

Étant donnés deux faisceaux de droites D* et D′* dont les points de base D et D′ sont distincts, pour toute homographie f, de D* sur D′*, il existe un point Ω, tel que si m et n sont deux droites quelconques de D* et m' et n' sont leurs images par f, la droite qui joint les points $m \cap n'$, $n \cap m'$ passe Ω. Ce point est l'intersection de l'image et de l'image inverse de (DD′) par f.

XIII

1) Reportons nous à l'énoncé du théorème de Pappus, tel qu'il est proposé dans le cours et notons :

$$a = (BC'),\ b = (CA'),\ c = (AB'),\ a' = (B'C),\ b' = (C'A),\ c' = (A'B)$$



L'alignement de A, B, C sur une droite qu'on note d se traduit :

abc et $c'a'b'$ sont en perspective de d.

De même, l'alignement de A′, B′, C′ sur d' se traduit :

abc et $b'c'a'$ sont en perspective de d'.

Comme on a :

$$A'' = a \cap a' \ ,\ B'' = b \cap b' \ ,\ A'' = c \cap c',$$

l'alignement de ces points se traduit :

abc et $a'b'c'$ sont en perspective d'une droite.

Le théorème de Pappus peut donc s'énoncer comme suit.

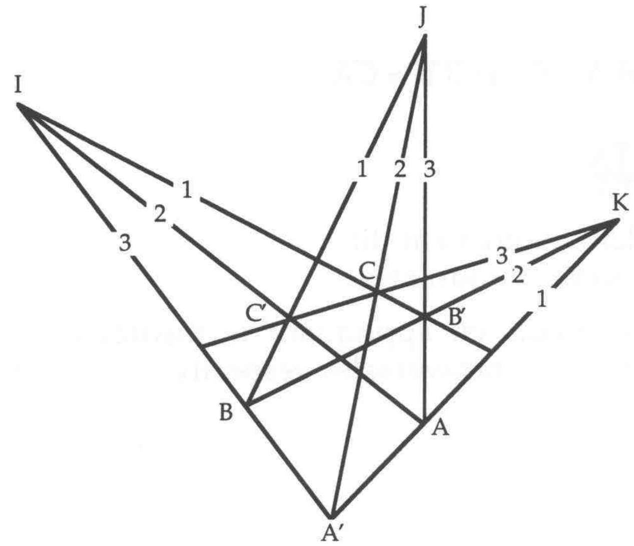
<u>Théorème</u> : si deux triangles abc et $a'b'c'$ sont en perspective de deux droites avec les correspondances suivantes :

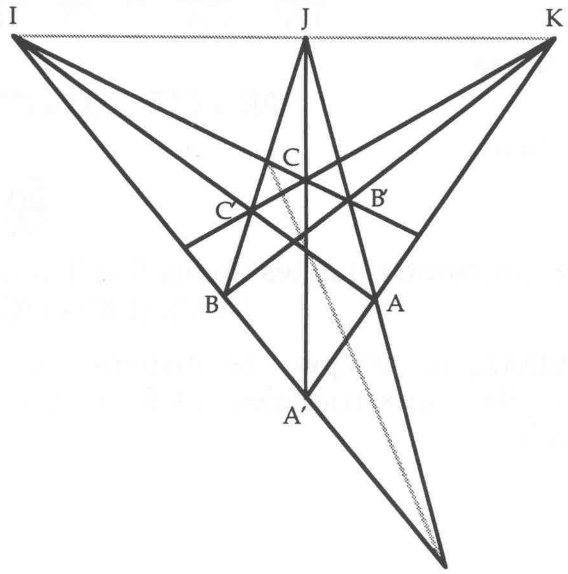
$$abc\ ,\ b'c'a' \text{ et } abc\ ,\ c'a'b',$$

ils le sont d'une troisième avec la correspondance :

$$abc\ ,\ a'b'c'.$$

Appliqué au dual, il justifie l'énoncé proposé.





2) Notons I, J les centres des perspectives données et K le centre de la perspective obtenue. Ce dernier point est le centre de l'homographie f, de I^* sur J^* qui transforme (IA) en (JA'), (IB) en (JB') et (IC) en (JC'). Dans ces conditions, K est aligné avec I et J si, et seulement si, f est une perspective (duale) – autrement dit si les points :

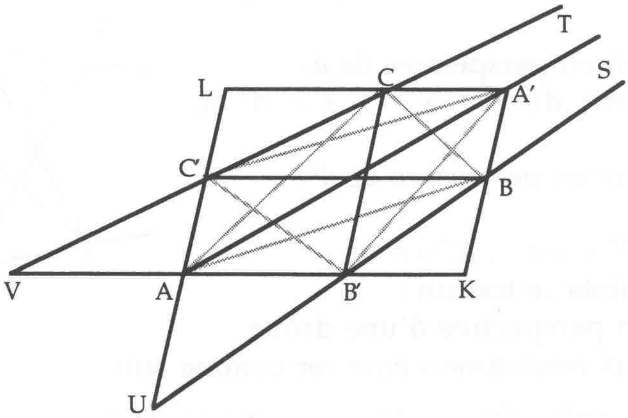
$$(BC')\cap(CB'),\ (CA')\cap(AC'),\ (AB')\cap(BA'),$$

sont alignés.

3) Soit Δ la droite (IJ), $P-\Delta$, est alors un plan affine, notons :

$$S=(AA')\cap(BB'),\ T=(AA')\cap(CC'),$$

$$K=(AB')\cap(BA'),\ L=(AC')\cap(CA'),\ U=(AC')\cap(BB') \text{ et } V=(AB')\cap(CC'')$$



On vérifie qu'on a, d'une part :

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}=\frac{\overline{UA}}{\overline{BA'}} \text{ et } \frac{\overline{UA}}{\overline{BK}}=\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'K}} \text{ d'où } \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}=\frac{\overline{BK}}{\overline{BA'}}\cdot\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'K}},$$

d'autre part :

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TA'}}=\frac{\overline{VA}}{\overline{CA'}} \text{ et } \frac{\overline{VA}}{\overline{CL}}=\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'L}} \text{ d'où } \frac{\overline{TA}}{\overline{TA'}}=\frac{\overline{CL}}{\overline{CA'}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'L}}.$$

Comme :

$$\overline{BK}=\overline{C'A},\ \overline{BA'}=\overline{C'L},\ \overline{B'A}=\overline{CL} \text{ et } \overline{B'K}=\overline{CA'},$$

il vient :

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}=\frac{\overline{TA}}{\overline{TA'}}.$$

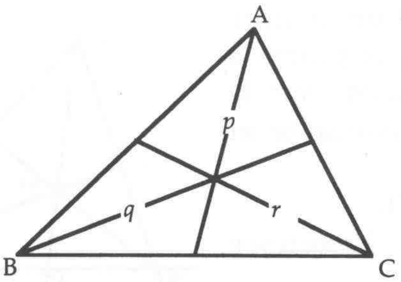
Ce qui montre que les points S et T coïncident. Autrement dit :

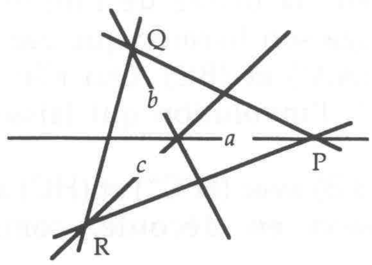
(AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

<u>Remarque</u> : on peut se dispenser de ces calculs en appliquant le théorème de Ménélaüs aux triangles AA'S et BB'T et à leurs transversales respectives (BB') et (CC')

XIV

1)





Si p, q, r sont concourantes en D, l'involution de Desargues du quadrangle ABCD échange les points à l'infini de a et p, b et q, c et r. On applique le corollaire. Notons que ce résultat coïncide avec sa réciproque.

2) Appliqué au plan dual, le second théorème de Desargues s'énonce :

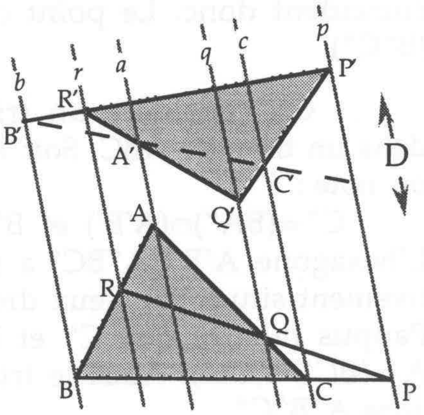
> Étant donné un quadrilatère complet et un point P qui n'est situé sur aucun des côtés de celui-ci, les droites, joignant P aux sommets opposés du quadrilatère, sont échangées par une même involution du faisceau P*.

Le corollaire devient :

> Étant donné un triangle ABC et un point P qui n'est situé sur aucun de ses côtés, soit A', B' et C' des points situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB). Les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, il existe une involution du faisceau D* qui échange :
> (PA) avec (PA') , (PB) avec (PB') et(PC) avec (PC').

<u>Remarque</u> : le quadrilatère complet est formé des trois côtés du triangle ABC, auquels vient s'ajouter la droite qui joint A' et B'

3) On est en présence de deux quadrilatères qui sont en perpective d'un point à l'infini D. C'est tout simplement la version duale de la situation traitée en 1. Le faisceau D* tenant ici le rôle de la droite de l'infini.



XV

En adjoignant (B'C') aux côtés du triangle ABC, on est en présence d'un quadilatère complet. L'involution de Desargues qu'il définit sur le faisceau S* échange deux paires de droites perpendiculaires :

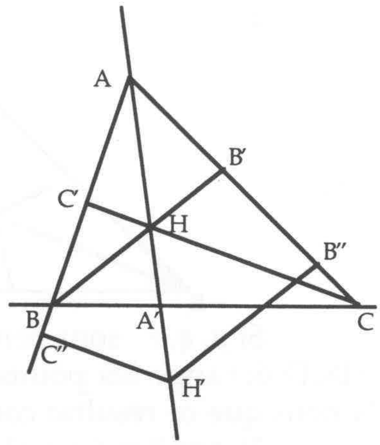
(SB) et (SB') , (SC) et (SC')

Cette application associe donc à toute droite de S* sa perpendiculaire [1]. Ainsi (SA') est l'image de (SA). Le point C' est donc le sixième sommet du quadrilatère. Autrement dit C' est aligné avec A' et B'.

---

1 Toute rotation d'un faisceau est une homographie. Elle induit une homographie sur la droite de l'infini. En praticulier le quart de tour induit une involution qui, plus loin, se caractérisera par ses points fixes : les points cycliques.

XVI



La symétrie oblique d'axe (BC) qui échange H et H' induit, sur la droite de l'infini, l'involution définie par la conjugaison harmonique par rapport aux points à l'infini de (AA') et (BC). Qui elle même induit sur le faisceau H'*, l'involution qui laisse (H'A) invariante et échange :

(H'B) avec (H'C″) et (HC) avec (H'B″).

La conclusion en découle, comme pour l'exercice précédent.

Remarque : si H est l'orthocentre, (B″C″) est alors la droite de Simson de H'. On en déduit que ce point est sur le cercle circonscrit.

XVII

On note P le point de concours donné, a le point à l'infini de (BC), b, c, a', b' et c' étant définis de façon analogue. Soit σ l'involution de la droite de l'infini induite par l'orthogonalité. Il est clair que :

$$(a,\sigma(a')) \ , \ (b,\sigma(b')) \ , \ (c,\sigma(c'))$$

sont trois couples de l'involution de Desargues δ, définie par le quadrangle de sommets ABCP. Les couples :

$$(a',\sigma(a)) \ , \ (b',\sigma(b)) \ , \ (c',\sigma(c))$$

sont liés par l'involution :

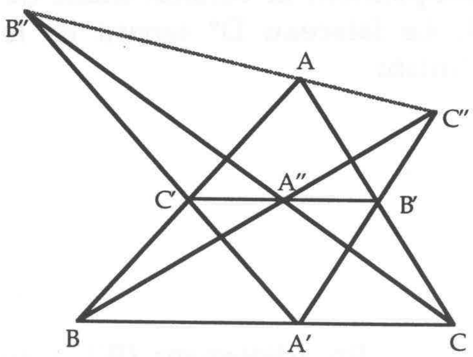
$$\sigma \circ \delta \circ \sigma.$$

La conclusion en découle comme dans les exercices précédents.

XVIII

Avec les notations habituelles, les involutions de Desargues sur la droite B″C″ des quadrangles OABC et OA'B'C', ont deux couples communs, elles coïncident donc. Le point commun aux droites (BC) et (B'C') appartient donc à (B″C″).

XIX



On considère un triangle A'B'C', inscrit dans un triangle ABC. Soit A″ un point de (B'C'), on note :

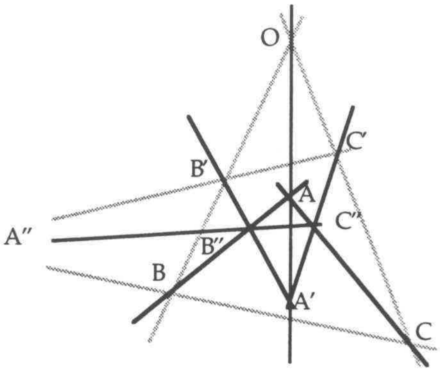
C″ = (BA″)∩(A'B') et B″ = (CA″)∩(A'C')

L'hexagone A'B'CA″BC' a ses sommets alternativement situés sur deux droites. Le théorème de Pappus montre que C″ et B″ sont alignés avec A = (BC')∩(CB'). Ainsi le triangle ABC est inscrit dans A″B″C″.

XX

Étant donné un quadrangle, on choisit cinq points, sur cinq de ses côtés. On les note O, B, B′, C, C′, en convenant que (BB′), (CC′), se coupent en O. On peut toujours noter les sommets du quadrangle A, A′, B″ et C″, de sorte que :

- le côté (AA′) passe par O,
- B″ (respectivement C″) soit le sommet commun aux côtés passant par B et B′ (respectivement C et C′). Les triangles ABC et A′B′C′ sont alors en perspective de O. Le théorème de Desargues montre que (BC) et (B′C′) se coupent en un point A″ qui appartient à la droite (B″C″).



XXI

1) Les points A, B, C et D étant distincts, on rappelle que :

$$[A,B,C,D]=\frac{X}{Y}$$

signifie qu'il existe deux vecteurs e_0, e_1 tels que :

$$A=p(e_0),\ B=p(e_1),\ C=p(e_0+e_1)\ \text{et}\ D=p(Xe_0+Ye_1).$$

On en déduit immédiatement la première relation :

$$[B,A,C,D]=\frac{Y}{X}=\frac{1}{[A,B,C,D]}.$$

Comme X et Y sont non nuls, on pose désormais $x=\frac{X}{Y}$. On peut écrire :

$$A=p(xe_0),\ B=p(e_1),\ D=p(xe_0+e_1).\ C=p(e_0+e_1)=p(\frac{1}{x}.xe_0+e_1).$$

ce qui prouve que :

$$[A,B,D,C]=\frac{1}{x}.$$

On a aussi :

$$A=p(-e_0),\ C=p(e_0+e_1),\ B=p[-e_0+(e_0+e_1)]\ \text{et}$$
$$D=p(xe_0+e_1)=p[(-x+1)(-e_0)+(e_0+e_1)].$$

de sorte que :

$$[A,C,B,D]=1-x.$$

En échangeant A avec B et C avec D, le birapport reste inchangé, on a donc :

$$[B,A,D,C]=x\ ,\ [B,D,A,C]=1-x,$$

On en déduit que :

$$[D,B,C,A]=1-x.$$

2) On a déjà montré que :

$$[A,B,C,D]=[B,A,D,C].$$

On applique ce qui vient d'être acquis, on obtient :

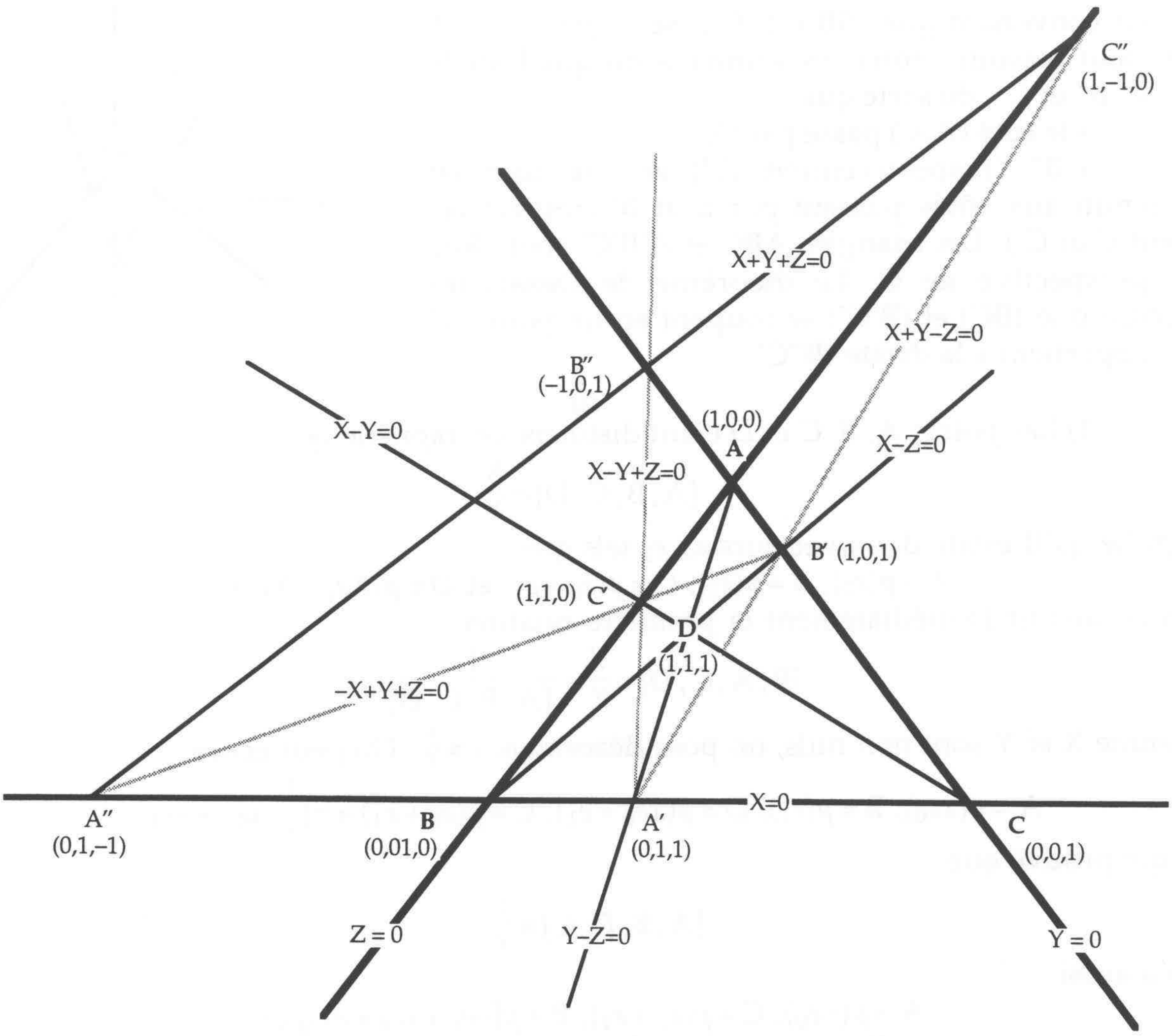
$$[D,C,B,A]=1-[D,B,C,A]=1-(1-x)=x.$$

Enfin, on en déduit que :

$$[C,D,A,B]=[D,C,B,A]=[A,B,C,D].$$

XXII

1) Sans commentaire …



sinon que les points non mentionnés, faute de place, ont pour coordonnées :

$$(2,1,1)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (1,1,2)$$

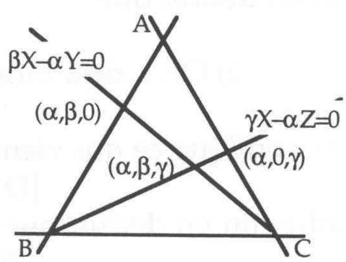
et que les trois autres points en question sont alignés sur la droite d'équation :

$$X+Y+Z=0.$$

2) Étant donnés trois nombres, α, β et γ, non tous nuls, si deux d'entre eux sont nuls ce sont les coordonnées d'un sommet, si un seul est nul, on est reporté à l'exercice 12. Si aucun n'est nul, on sait construire les points de coordonnées $(\alpha,\beta,0)$ et $(\alpha,0,\gamma)$, ce qui permet de tracer les droites d'équations :

$$\beta X-\alpha Y=0 \text{ et } \gamma X-\alpha Z=0.$$

Il est immédiat que leur intersection est le point cherché.



XXIII

Pour un choix arbitraire d'une base (e_0,e_1,e_2) telle que :

$$A=p(e_0)\ ,\ B=p(e_1) \text{ et } C=p(e_2),$$

d, admet pour équation:

$$uX+vY+wZ=0.$$

Comme cette droite ne contient pas les points de coordonnées $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$, aucun des trois coefficients de son équation n'est nul. On peut donc choisir pour nouvelle base :

$$\frac{1}{u}e_0\,,\,\frac{1}{v}e_1\,,\,\frac{1}{w}e_2,$$

ce qui n'affecte pas les points A, B et C. Les nouvelles coordonnées (X',Y',Z') vérifient alors :

$$X=\frac{1}{u}X' \quad , \quad Y=\frac{1}{v}Y' \text{ et } Z=\frac{1}{w}Z'$$

et l'équation de d prend la forme attendue :

$$X'+Y'+Z'=0.$$

Remarque

Notons :

- P, Q et R les points où la droite coupe (BC), (CA) et (AB),
- P′ le conjugué harmonique de P par rapport à B et C,
- Q′ et R′ les points définis de façon analogue.

Les droites (AP′), (BQ′) et (CR′) concourent au quatrième sommet du repère ainsi choisi.

XXIV

a) Si les droites (AP), (BQ) et (CR) concourent en D, on choisit pour repère (A, B, C, D), P′, Q′ et R′ admettent alors pour coordonnées respectives :

$$(0,p,1) \quad , \quad (1,0,q) \text{ et } (r,1,0).$$

Dans ces conditions, suivant que $pqr=1$ ou $pqr=-1$, les droites (AP′), (BQ′) et (CR′) sont concourantes ou les points P′, Q′, R′ sont alignés.

b) Si les points P, Q, R sont alignés, on choisit D tel que la droite admette pour équation $X+Y+Z=0$ (cf. l'exercice précédent). Les points P, Q et R ont alors pour coordonnées respectives :

$$(0,1,-1) \quad , \quad (-1,0,1) \text{ et } (1,-1,0)$$

On vérifie que les coordonnées de P′, Q′ et R′ sont alors respectivement :

$$(0,-p,1) \quad , \quad (1,0,-q) \text{ et } (-r,1,0)$$

Dans ces conditions, suivant que $pqr=1$ ou $pqr=-1$, les points P′, Q′, R′ sont alignés ou les droites (AP′), (BQ′) et (CR′) sont concourantes.

Comme l'échange simultané de P avec P′, Q avec Q′ et de R avec R′ change :

$$p \text{ en } \frac{1}{p}\,,\; q \text{ en } \frac{1}{q}\,,\; r \text{ en } \frac{1}{r}\,,$$

On peut conclure comme il est demandé.

XXV

On choisit le repère tel que les diagonales (AA′), (BB′) et (CC′) admettent pour équations $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ et le côté contenant A′, B′ et C′ ait pour équation $X+Y+Z=0$. Dans ces conditions, les coordonnées de A′, B′, C′ sont respectivement :

$$(0,-1,1) \quad , \quad (1,0,-1) \quad , \quad (-1,1,0)$$

Les sommets A, B et C étant les conjugués harmoniques de ces points relativement aux sommets du repère, ils ont pour coordonnées :

$$(0,1,1) \quad , \quad (1,0,1) \quad , \quad (1,1,0).$$

On note les coordonnées respectives de P, Q et R :

$$(0,p,1) \quad , \quad (1,0,q) \text{ et } (r,1,0)$$

et celle de P′, Q′, R′ :

$$(0,p',1) \quad , \quad (1,0,q') \text{ et } (r',1,0)$$

Comme P′ est le conjugué harmonique de P, par rapport à A et A′, on a :

$$(p-1)(p'+1) = -(p+1)(p'-1).$$

On en déduit que :

$$pp' = 1.$$

La conclusion découle immédiatement de l'exercice précédent.

Remarque : on retrouve ainsi la droite de Newton du quadrilatère complet (Cf "Cours de géométrie élémentaire" § 13).

XXVI

On choisit pour repère (A, B, C, D), on note P, Q, R et P′, Q′, R′ les pieds de céviennes respectives de D et de E. On pourrait appliquer le résultat de l'exercice 23 mais il est plus instructif de procéder directement.

On note (e_0, e_1, e_2) la base associée au repère et (X, Y, Z) les coordonnées homogènes de E. On a :

$$B = p(e_1) \ , \ C = p(e_2) \ , \ P = p(e_1 + e_2) \ , \ P' = p(Ye_1 + Ze_2)$$

On en déduit :

$$a = [AB, AC, AD, AE] = [B, C, P, P'] = \frac{Y}{Z}.$$

On procède de même pour les deux autres birapports :

$$A = p(e_0) \ , \ C = p(e_2) \ , \ Q = p(e_0 + e_2) \ , \ P' = p(Xe_0 + Ze_2),$$

$$b = [BA, BC, BD, BE] = [A, C, Q, Q'] = \frac{X}{Z} \ ;$$

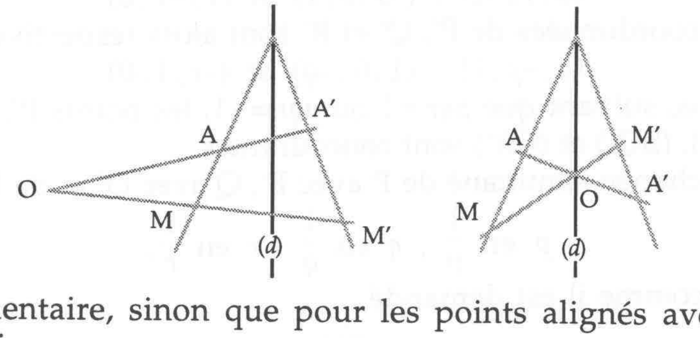
$$A = p(e_0) \ , \ B = p(e_1) \ , \ R = p(e_0 + e_1) \ , \ R' = p(Xe_0 + Ye_1),$$

$$c = [CA, CB, CD, CE] = [A, B, R, R'] = \frac{X}{Y}.$$

On en déduit que :

$$ac = b.$$

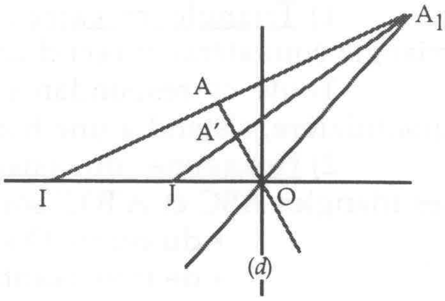
XXVII



Sans commentaire, sinon que pour les points alignés avec O, A et A′, on procède en deux fois.

XXVIII

On considère l'élation h, d'axe d qui transforme un point donné A en A'. Son centre O est donc le point commun à d et (AA'). On choisit arbitrairement deux points I et A_1, non situés sur d, et alignés avec A. On note J, le point commun à (IO) et $(A'A_1)$. On considère les deux homologies d'axe d :



- f de centre I qui transforme A en A_1,
- g de centre J qui transforme A_1 en A.

Comme $g \circ f$ laisse invariants les points de d, il s'agit d'une homologie ou d'une élation. De plus, la droite (IJ) est invariante par f et g, elle est donc stable par $g \circ f$; ainsi que la droite (AA'), le centre de cette transformation est donc le point O. Il est sur l'axe, on en conclut que $g \circ f = h$.

XXIX

a) Soit A, B et C les trois points invariants, considérons trois vecteurs e_0, e_1 e_2 tels que $A = p(e_0)$, $B = p(e_1)$ et $C = p(e_2)$. Il existe trois sacalaires λ, μ et ν, non nuls et tels que :

$$\varphi(e_0) = \lambda e_0 \text{ , } \varphi(e_1) = \mu e_1 \text{ , } \varphi(e_2) = \nu e_2$$

e_0, e_1, e_2 donc des vecteurs propre de φ et λ, μ, ν les valeurs propres qui leurs sont associées. Si deux d'entre elles étaient égales, par exemple λ et μ, notant F le sous-espace vectoriel engendré par e_0 et e_1, on aurait :

$$\varphi|_F = \lambda \mathrm{Id}_F.$$

Tout point de (AB) serait alors invariant par f. Les trois valeurs propres sont donc distinctes. On sait alors que e_0, e_1, e_2 forment une base de E, ce qui montre que A, B et C ne sont pas alignés.

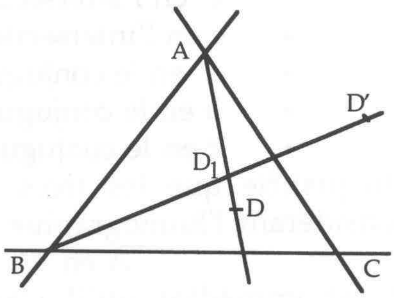
b) Si f admet une droite de points invariants, on sait que f est une homologie ou une élation, soir $D = p(F)$ son axe. On a $f|_D = \mathrm{Id}_F$. Il existe donc un scalaire λ tel que $\varphi|_F = \lambda \mathrm{Id}_F$.

Dans ces conditions, ou bien :

- f est diagonalisable s'il existe un vecteur propre e_2 qui n'appartient pas à F et tel que $\varphi(e_2) = \mu e_2$ et alors :
  - si $\lambda = \mu$, f serait l'application identique,
  - si $\lambda \neq \mu$, $p(e_2)$ est un point invariant qui n'appartient pas à D, f est donc une homologie.
- f 'n'est pas diagonalisable, on sait alors que f est une élation.

2) Soit f l'homographie considérée, on complète A, B, C d'un quatrième point D, pour former un repère projectif. Soit D' l'image de D et D_1 l'intersection des droite (AD) et (BD'). On note :

- g l'homologie de centre A, d'axe (BC), qui transforme D en D_1,
- h l'homologie de centre B, d'axe (AC), qui transforme D_1 en D'.



Il est immédiat que $h \circ g$ laisse A, B, C invariants et transforme D en D'. Ce qui suffit à prouver que $h \circ g = f$.

XXX

1) <u>Triangle et carré</u> : il est immédiat que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral et ceci d'une infinité de façons.

Toute correspondance bijective entre les sommets d'un carré et ceux d'un quadrilatère, s'étend à une homographie du plan.

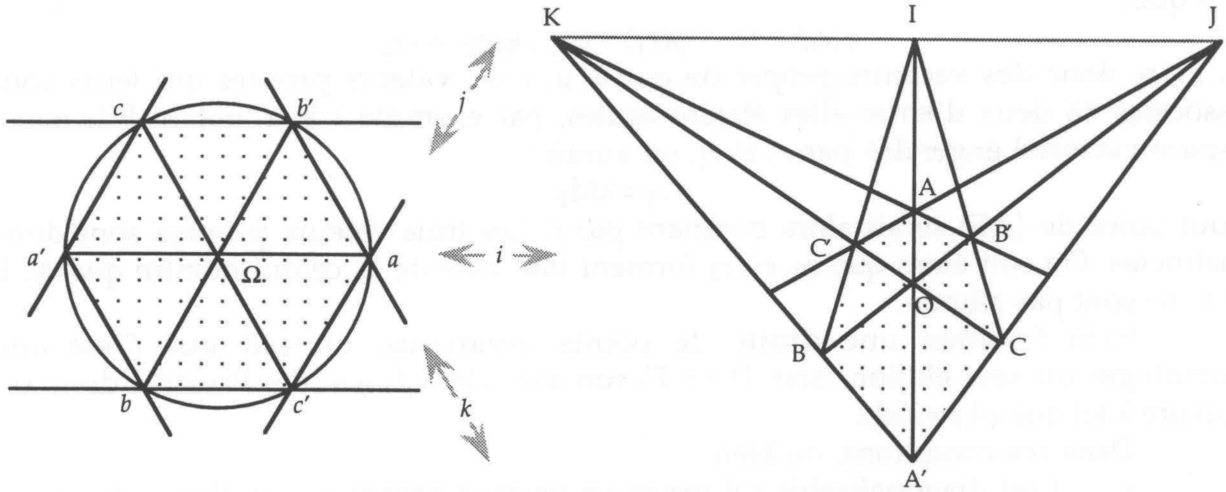
2) <u>Hexagone</u> : on considère un hexagone régulier AB'CA'BC', il est clair que les triangles ABC et A'B'C' sont en perpective de quatre points :

- du centre O avec la correspondance ABC $\mapsto$ A'B'C'
- de trois points à l'infini I, J et K, avec les correspendances suivantes

I : ABC $\mapsto$ A'C'B' , J : ABC $\mapsto$ C'B'A' et K : ABC $\mapsto$ B'A'C'

On en déduit que toute image d'un hexagone régulier par une homographie est un hexagone dont les sommets opposés sont en perspective de quatre points dont trois sont alignés.

On pourra déduire des considérations de l'exercice 13 qu'il suffit d'avoir la conjonction de la perspective de centre O et de deux des trois autres. On pourrait encore raffiner en remplaçant la perspective de centre O par deux des alignements sur les trois qu'elle suppose.



Considérons un hexagone AB'CA'BC' qui remplit les conditions, ci-dessus et un hexagone régulier *ab'ca'bc'*. On note Ω le centre de ce dernier, *i*, *j* et *k* les points à l'infini des droites (Ω*a*), (Ω*b'*) et (Ω*c'*). Considérons l'homographie *f* qui transforme Ω en O, *a* en A, *j* en, J et *k* en K.

Elle transforme

- *b'* en l'intersection des droites (OJ) et (KA), c'est-à-dire B',
- *c'* en l'intersection des droites (OK) et (JA), c'est-à-dire C',
- *i* en l'intersection (OA) et (IK), c'est-à-dire I,
- *a'* en le conjugué harmonique de A par rapport O et I.
- *b* en le conjugué harmonique de B' par rapport O et J.
- *c* en le conjugué harmonique de C' par rapport O et I.

On justifie que les trois derniers points mentionnés sont bien A', B et C en considérant l'homographie du plan, qui transforme :

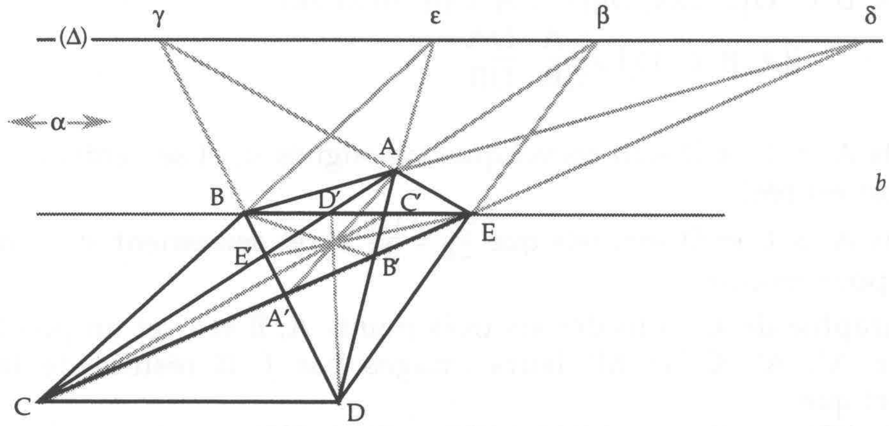
A en A', B en B' et C en C' et laisse O invariant.

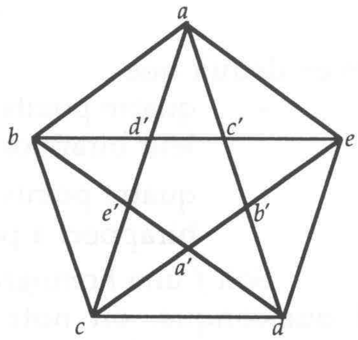
Il est immédiat qu'il s'agit d'une homologie et qu'elle est involutive. C'est l'homologie harmonique de centre O et d'axe (JK).

<u>Remarque</u> : si l'on considère l'action de GP(P) sur les figures planes, les alignements en question caractérisent l'orbite des hexagones réguliers.

3) <u>Pentagone</u> : on considère un pentagone régulier ABCDE. Ses diagonales déterminent un pentagone A'B'C'D'E' avec une relation d'opposition évidente entre A et A' etc ... Il découle des propriétés de symétrie que ces deux pentagones sont homothétiques. Nous retiendrons simplement que leurs côtés homologues sont deux à deux parallèles. Ce qui, en tant que propriété projective, se traduit :

ABCDE et A'B'C'D'E' sont en perspective d'une droite.





En fait, il suffit que quatre des points communs à un côté et à la diagonale opposées soient alignés sur une droite qu'on note Δ. Pour s'en convaincre, se reporter à l'exercice correspondant de géométrie affine (cf exercice 15).

XXXI

Le point commun à deux droites imaginaires conjuguées est invariant par conjugaison, c'est donc un élément réel. Pour la même raison, une droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle.

Notons D et $\overline{D}$, Δ et $\overline{\Delta}$ les côtés du quadrilatère les sommets réels sont :

$$D \cap \overline{D} \text{ et } \overline{\Delta} \cap \Delta$$

Les quatre autres :

$$D \cap \Delta \ , \ \overline{D} \cap \overline{\Delta} \ , \ D \cap \overline{\Delta} \text{ et } \overline{D} \cap \Delta \text{ et } \overline{D} \cap \overline{\Delta}.$$

sont imaginaires. En effet chacun d'eux est distinct de son conjugé.

Les diagonales joignent respectivement :

$$D \cap \overline{D} \text{ à } \overline{\Delta} \cap \Delta \ , \ D \cap \Delta \text{ à } \overline{D} \cap \overline{\Delta} \text{ et } D \cap \overline{\Delta} \text{ à } \overline{D} \cap \Delta.$$

Elles sont, toutes les trois invariantes par conjugaison, elles sont donc réelles.

XXXII

1) Étant donnés quatre points A, B, C et D, on note a, b, c et d, leurs affixes. On a :

$$[\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}]=[a,b,c,d]=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$$

Ce qui s'exprime :

$$\operatorname{Arg}[\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}]=(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})-(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}}) \pmod{2\pi}$$

$$|[\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}]|=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}:\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}.$$

On en déduit que :

- quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, leur birapport est réel,
- quatre points A, B, C et D sont tels que $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$ si, et seulement si, leur birapport a pour module 1.

Soit f une homographie de $\hat{\mathbb{C}}$, considérons trois points A, B et C et un point M quelconque, on note A', A', C' et M' leurs images par f. Il résulte de la conservation du birapport que :

$$(\mathrm{MA},\mathrm{MB})=(\mathrm{CA},\mathrm{CB}) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\mathrm{M'A'},\mathrm{M'B'})=(\mathrm{C'A'},\mathrm{C'B'}) \pmod{\pi}$$

Ce qui montre que :

- si M décrit le cercle (resp. la droite) contenant A, B et C, M' décrit alors le cercle (resp. la droite) passant par leurs images.
- l'image du cercle (resp. de la droite), lieu des points M tels que $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$ est le cercle (resp. la droite), lieu de points M' tels que $\frac{\mathrm{M'A'}}{\mathrm{M'B'}}=\frac{\mathrm{C'A'}}{\mathrm{C'B'}}$.

2) Les tranformations affines s'expriment au moyen de la relations :

$$z\mapsto z'=az+b$$

où a et b sont deux nombres complexes non nuls. Il est classsique de montrer que ces applications sont les similitudes du plan.

XXXIII

1) Le fait que $[\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}]=-1$ s'exprime :

$$(a+b)(c+d)=2(ab+cd).$$

En choisissant pour origine le milieu M de AB, il vient $b-m=-(a-m)$. La relation précédente devient :

$$(a-m)^2=(c-m)(d-m).$$

2) Nous savons déjà que les sommets d'un quadrangle harmonique sont cocycliques ou alignés. Si trois des points sont alignés, on vérifie qu'on est en présence d'une division harmonique au sens réel du terme.

3) Étant donnés trois points A, B et C, s'ils sont alignés, on sait compléter la division harmonique, notamment en utilisant les propriétés du quadrilatère complet. Dans le cas contraire, nous savons que D est un point du cercle ciconscrit à ABC. La relation du point précédent montre qu'alors :

$$2\operatorname{Arg}(a-m)=\operatorname{Arg}(c-m)+\operatorname{Arg}(d-m).$$

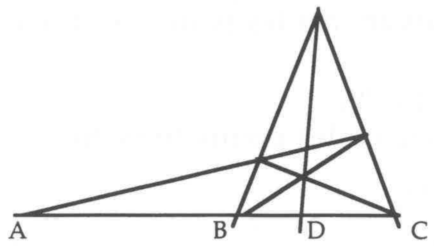
Ce qui se traduit :

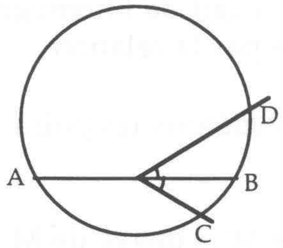
$$\operatorname{Arg}(c-m)-\operatorname{Arg}(a-m)+\operatorname{Arg}(d-m)-\operatorname{Arg}(a-m)=0.$$

Autrement dit

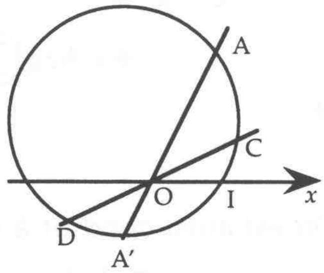
$$(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MD}})=-(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}) \pmod{2\pi}.$$

Ce qui montre que (AB) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{CAD}}$. La construction demandée en découle immédiatement.





Le point ainsi construit existe, il est unique, c'est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B.



4) Si a est réel, la construction relève de la géométrie du collège, laissons ce cas de côté. On suppose donc que a est imaginaire. Soit C et D les deux points à construire et I le point d'affixe 1, IACD est un quadrangle harmonique. Ses sommets sont situés sur un même cercle centré sur la bissectrice extérieure de l'angle AOB. Les points C et D étant sur la bissectrice intérieure de ce même angle. La construction est immédiate.

Réciproquement les points C et D, ainsi construits, sont bien symétriques par rapport à l'origine et comme La droite (CD) est bissectrice intérieure de l'angle AOB. Le quadrangle ABCD est harmonique. On a donc :

$$c^2 = a \,.\, 1 = a.$$

5) On met le trinôme sous forme canonique :

$$(X - a)^2 = a^2 - b^2.$$

On peut toujours considérer qu'on est ramené au problème précédent. En effet, on sait construire à la règle et au compas les images des carrés de deux complexes d'affixe données. Cependant, il est possible de faire beaucoup mieux. En effet, on a :

$$\Delta = a^2 - b^2 = (b - a)(-b - a),$$

de sorte que si C, D sont les points à construire et c, d leurs affixes, ces points sont symétriques par rapport à A et l'on a ;

$$(c - a)^2 = (d - a)^2 = \Delta = (b - a)(-b - a).$$

Ainsi, désignant par B' le point d'affixe $-b$, le quadrangle BB'CD est harmonique et (CD) est la bissectrice intérieure de l'angle BAB'. Pour construire ces points, il suffit de remarquer qu'il sont aussi sur le cercle passant par B, B' et centré sur la bissectrice extérieure de l'angle BAB'.

XXXIV

1) Soit f une homographie d'ordre n, il est montré dans le cours (cf 11-13) que f admet deux points fixes A et B, distincts et que l'image M' d'un point quelconque M, autre que A et B est donné par la relation

$$[A, B, M, M'] = k,$$

où k est un nombre complexe donné. Cette condition s'exprime :

$$\frac{z - a}{z - b} = \frac{z' - a}{z' - b} k^p.$$

Sous cette forme il est immédiat de montrer que si $M_p = f^p(M)$, on a :

$$[A, B, M, M_p] = k^p,$$

On en déduit que f est d'ordre n si, et seulement si, k est une racine $n^{ème}$ primitive de l'unité.

2) Il s'agit de l'homographie laissant invariants les points A et B, d'affixe 1 et -1 et décrite par la relation :

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}, \mathrm{M}'] = e^{i\alpha},$$

Considérons un point M d'affixe z, distinct des points fixes. Si :

$$\frac{z-1}{z+1} = ke^{i\theta},$$

l'affixe z' de M', l'image de M par f, vérifie :

$$\frac{z'-1}{z'+1} = ke^{i\theta+\alpha},$$

On a :

$$\theta = \mathrm{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = (\mathrm{O}x, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) - (\mathrm{O}x, \overrightarrow{\mathrm{BM}}) = (\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \pmod{2\pi}$$

et :

$$k = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}.$$

On est ainsi conduit à noter :

- Γ_θ le lieu des points M, tels que $(\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) = \theta \pmod{2\pi}$,
- $\mathscr{C}_k$ le lieu des points M tels que $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k$.

Pour tout point M du plan, autre que A et B, il existe θ et k, uniques, tels que M soit l'intersection de Γ_θ et de $\mathscr{C}_k$. Ce qui précède montre M' est l'intersection de $\Gamma_{\theta+\alpha}$ et de $\mathscr{C}_k$. La construction ne met en œuvre que des opérations classiques.

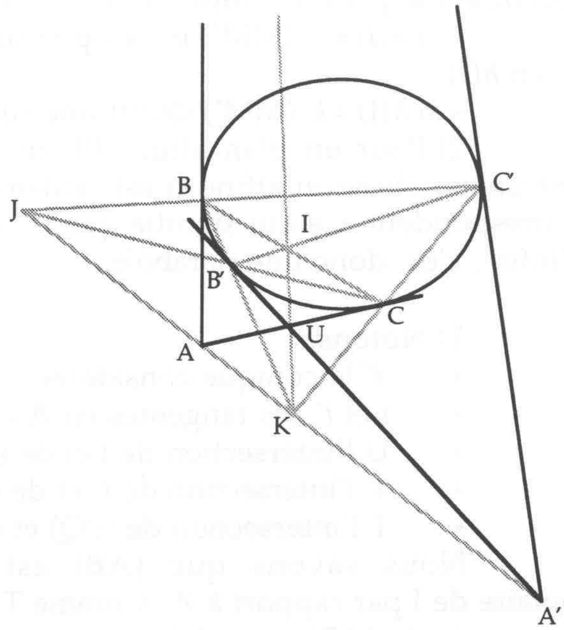
Remarque : on pourrait encore s'intéresser au cas où cette application est involutive, ABMM' est alors un quadrangle harmonique.

Coniques

XXXV

Une directrice est la polaire du foyer auquel elle est associée.

XXXVI



On désigne par A et A′ les deux points donnés, par B et C, B′ et C′, les points de contact des tangentes issues de A et A′. Les droites (BC) et (B′C′) étant les polaires respectives de A et A′, leur point commun, noté I, est le pôle de (AA′). Les deux autres points diagonaux du quadrangle de sommets BCB′C′, notés J et K, sont sur la polaire de I, ils sont donc alignés avec A et A′. Les points I, J et K étant deux à deux conjugués par rapport à la conique, (IK) est la polaire de J. Comme (B′C) passe par J, le pôle de cette droite appartient à (IK), ce qui montre que les tangentes (AC) et (A′B′) concourent avec (IK) au point noté U. On en déduit que les droites (UI) et (UJ) sont conjuguées harmoniques par rapport à (UB′) et (UC). Il est alors prouvé que A et A′ sont conjugués harmoniques par rapport à J et K. Dans ces conditions, (IK) est la polaire de J par rapport à toute conique passant par B, C, B′ et C′. Celle d'entre elles qui passse par A recoupe (AA′) au point conjugué harmonique de A par rapport à J et K, c'est-à-dire A′. Ce qui justifie la propriété avancée.

XXXVII

1) La symétrie par rapport à I étant une homographie de d , l'application :

$$h : A^* \longrightarrow B^*$$
$$(AN) \mapsto (BN')$$

est une homographie. Le point M, commun aux droites homologues, décrit donc une conique $\mathscr{C}$ qui passe par A, B. Si $h(AB) \neq (AB)$, il s'agit d'une conique propre tangente en A et B aux deux droites joignant ces points au symétrique, par rapport à I, du point commun à d et (AB).

On a $h(AB) = (AB)$ si le point commun à (AB) et d est invariant par la symétrie de centre I, ce qui a lieu dans deux cas.

1 Si I appartient à (AB), h est une perspective duale et $\mathscr{C}$ est la conique dégénére formée par (AB) et la droite parallèle à d.qui passe par le conjugué harmonique de I par rapport à A et B.

2 Si d est parallèle à (AB), h est la perspective duale dont l'axe joint I au milieu de AB.

2) Les parallèles à d passant par A et B se correspondent par h, Le point à l'infini D de d appartient donc à $\mathscr{C}$. On vérifie que le second point à l'infini est celui de la droite joignant I au milieu J de AB. On aura donc généralement une hyperbole et une parabole si J appartient à d.

XXXVIII

<u>Théorème direct</u> : étant données une conique propre et deux de ses tangentes notées a et b, une tangente quelconque coupe a en M et b en M′. L'application $M \mapsto M'$ est une homographie de a sur b, telle que les points de contacts avec a et b soient l'image inverse et l'image du point commun à a et b.

<u>Réciproque</u> : étant données deux droites distinctes a et b, et une homographie :

$$\begin{array}{rcl} h : a & \longrightarrow & b \\ M & \mapsto & M' \end{array}$$

On note I le point commun à a et b. Dans ces conditions :

• si $h(I) \neq I$, (MM′) enveloppe une conique propre tangente à a en à $h^{-1}(I)$ et à b en $h(I)$;

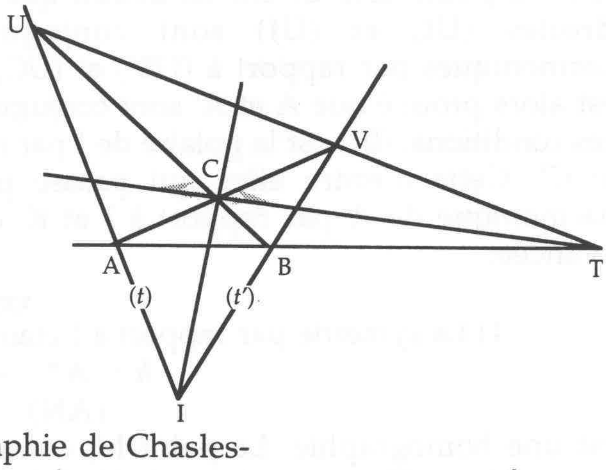
• si $h(I) = I$, (MM′) décrit une conique duale dégénérée qui contient I*.

2) Pour un plan affine, l'homographie des théorèmes de Chasles et Steiner est une application affine si est seulement si, les points à l'infini des deux droites se correspondent. Ce qui signifie que la conique en question est tangente à la droite de l'infini, c'est donc une parabole.

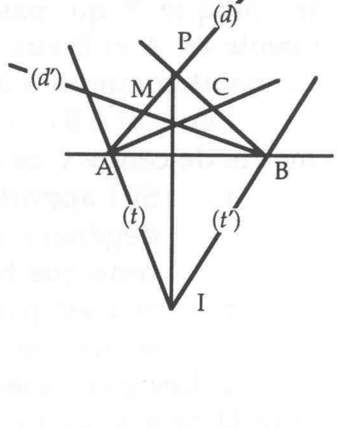
XXXXIX

1) Notons :

- $\mathscr{C}$ la conique considérée,
- t et t' ses tangentes en A et B, I leur point commun.
- U l'intersection de t et de (BC),
- V l'intersection de t' et de (AC),
- T l'intersection de (PQ) et de (AB),



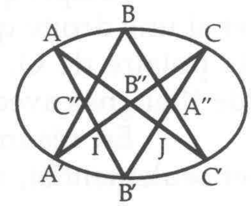
Nous savons que (AB) est la polaire de I par rapport à $\mathscr{C}$. Comme T est un point de (AB), sa polaire passe par I, elle passe aussi par le conjugué harmonique de T par rapport à A et B. Ainsi, cette droite est aussi la polaire de T par rapport à t et t', il s'agit donc de la droite (IC). Comme C est un point de $\mathscr{C}$, (TC) est la tangente cherchée. La construction demandée en découle immédiatement.



Comme I est le centre de l'homographie de Chasles-Steiner, la construction d'un point quelconque est immédiate. Partant d'une droite d, passant par A, on joint le point P, commun à d et (BC), à I. L'image d' de d, par l'homographie en question, passe par B et le point commun à (IP) et (AC). Le point M, commun à d et d' appartient à $\mathscr{C}$. La tangente en M s'obtient comme on l'a vu plus haut.

2) On choisit deux points A et B parmi les cinq donnés. On construit à l'aide des trois autres le centre de l'homographie de Chasles-Steiner entre A* et B*. Ce qui nous ramène au problème précédent.

XL



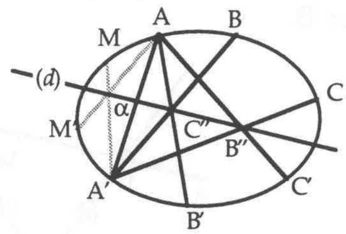
1) On reprend des notations analogues à celles utilisées pour le théorème de Pappus. L'hexagone AB'CA'BC' est inscrit dans $\mathscr{C}$, on désigne respectivement par I et J les points communs aux droites (AB') et (A'C), (AC') et (CB'). On compose les perspectives : π, de centre A', de (AB') sur $\mathscr{C}$ et π', de centre C', de $\mathscr{C}$ sur (B'C), on obtient l'homographie de (AB') sur (B'C) qui transforme :

B' en B', I en C, C" en A" et A en J.

Comme B' est invariant, il s'agit d'une perpective dont le centre est l'intersection de (IC) et de (AJ), c'est-à-dire B". Ce point est donc aligné avec A" et C".

Le théorème de Brianchon s'obtient en appliquant le théorème de Pascal au plan dual de P.

2) On appelle homographie toute application de $\mathscr{C}$ sur elle même qui conserve le birapport.



Soit f une homographie de $\mathscr{C}$, différente de l'application identique. On considère trois points distincts A, B et C, on note A', B' et C' leurs images par f, on définit A", B" et C" comme précédemment, soit d la droite (C"B"). La composition des perspectives π de centre A' de $\mathscr{C}$ sur d et π' de centre A de d sur $\mathscr{C}$ donne une homographie de $\mathscr{C}$ qui transforme A en A', B en B' et C en C'. on a donc :

$$f = \pi' \circ \pi.$$

Il s'ensuit que, si M est un point quelconque de $\mathscr{C}$ et M' est son image par f, les droites (AM') et (MA') se coupent sur d.

Il reste à établir que la droite d est indépendante de A. Notons

$$\alpha = (\mathrm{MA'}) \cap (\mathrm{AM'}) \ , \ \beta = (\mathrm{MB'}) \cap (\mathrm{BM'}).$$

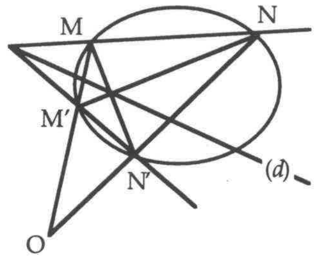
Nous savons que α appartient à d. Le théorème de Pascal, appliqué à AB'MA'BM', nous assure que α, β et C" sont alignés, ainsi β appartient à d, ce qui établit que cette droite est indépendante du choix de A et justifie l'énoncé qui suit.

<u>Théorème</u> : si f est une homographie de $\mathscr{C}$, il existe une droite d, telle que pour tous points M et N de $\mathscr{C}$, d'images M' et N' par f, les droites (MN') et (NM') se coupent sur d.

La droite en question s'appelle l'*axe* de f.

<u>Remarque</u> : on notera :

- que les points invariants de f, s'ils existent, sont les points communs à $\mathscr{C}$ et d.
- qu'une homographie de $\mathscr{C}$ est bien définie par la donnée de son axe et de l'image d'un point arbitraire.



3) Étant donnée une involution f de $\mathscr{C}$, d'axe d, on considère deux points M et N de $\mathscr{C}$ et l'on note M' et N' leurs images par f. Si N est différent de M et de M', nous savons que (MN') et (NM') se coupent sur d et comme N est aussi l'image de N', il en va de même de (MN) et de (M'N'). Il découle des propriétés du quadrilatère complet que les droites (MM') et (NN') se rencontrent au pôle de d par rapport à $\mathscr{C}$. Ce point est indépendant de M.

Réciproquement, on vérifie aisément que si O est un point non situé sur $\mathscr{C}$, et si une droite qui passe par O rencontre $\mathscr{C}$ en A et A′, l'homographie, dont l'axe est la polaire de O, qui transforme A en A′ est une involution. Elle échange les points de $\mathscr{C}$ alignés avec O.

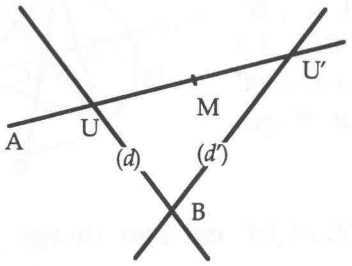
En résumé une homographie $M \mapsto M'$ d'une conique est une involution si, et seulement si, la droite (MM′) passe par un point indépendant de M.

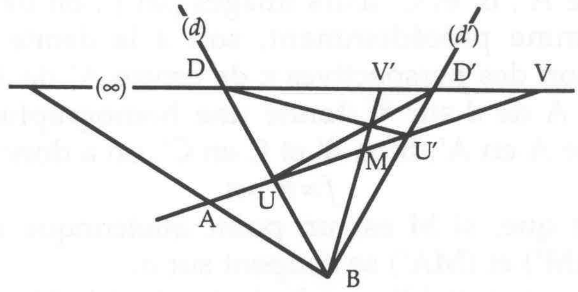
XLI

On note D, D′, V et V′ les points à l'infini de d, d', (AM) et (BM). Comme M est le milieu de UU′, M est le conjugué harmonique de V par rapport à U et U′, il s'ensuit que V et V′ sont conjugués harmoniques par rapport à D et D′. Ainsi, l'application $V \mapsto V'$ est l'involution de la droite de l'infini dont les points fixes sont D et D′. On en déduit que :

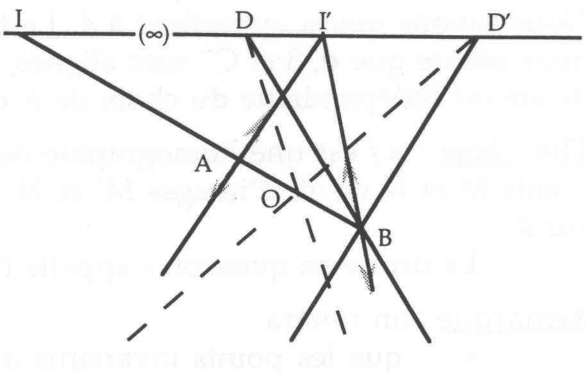
$$\begin{array}{rccc} h : & A^* & \longrightarrow & B^* \\ & (AM) & \mapsto & (BM) \end{array}$$

est une homographie. On sait alors que le lieu de M est une conique passant par A et B.





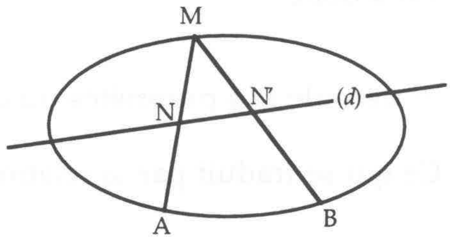
On en précise la nature. Ses points à l'infini sont évidemment D et D′. Ses tangentes en A et B sont les droites passant par I′, le conjugué harmonique du point à l'infini I de (AB), par rapport à D et D′. Il apparaît ainsi que la polaire de I′ est (AB). La polaire de I passe par I′ et le conjugué harmonique de I par rapport à A et B. Autrement dit, la polaire de I est la parallèle aux tangentes en A et B, passant par le milieu O de AB. Comme ce point est l'intersection des polaires de I et I′, c'est le pôle de la droite de l'infini, c'est-àdire le centre de la conique.



En conclusion, le lieu demandé est l'hyperbole passant par A et B admettant pour assymptotes les parallèles à d et d' passant par le milieu de AB.

XLII

De façon générale, si A et B sont deux points d'une conique $\mathscr{C}$ et d une droite donnée, nous savons que l'application :



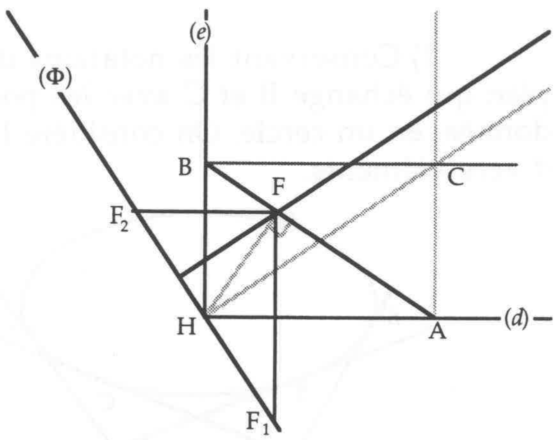
$$h: \; A^* \longrightarrow B^*$$
$$(AM) \mapsto (BM)$$

est une homographie. Notons N et N' les points de rencontre de d avec (AM) et (BM). Il découle du théorème d'incidence que l'application $M \mapsto M'$ est une homographie de d dont les points fixes sont évidemment les points communs à $\mathscr{C}$ et d.

Dans le cas étudié, d est l'asymptote choisie, c'est-à-dire une tangente à $\mathscr{H}$ dont le point de contact est à l'infini. L'homographie ci-dessus admet alors un point fixe unique, il est à l'infini, on est donc en présence d'une translation. Ce qui justifie la conclusion attendue.

XLIII

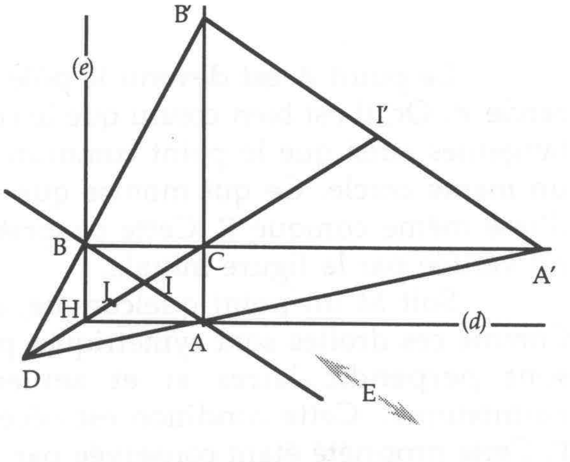
1) Il résulte de considérations développées, par ailleurs, que H appartient à la directrice de $\mathscr{P}$, que le foyer F est la projection de ce point sur (AB) et que les symétriques F_1 et F_2 de ce point par rapport à d et e sont sur la directrice qu'on note Φ (cf. VIII–2, 7, 8 du fascicule d'exercices). On vérifie que cette droite est perpendiculaire à (HC), où C désigne le quatrième sommet du rectangle dont les autres sommets sont H, A et B. Ce qui fait que l'axe de $\mathscr{P}$ est la parallèle à (HC) qui passe par F.



2) On note :

$$D = (AA') \cap (BB') \text{ et } E = (AB) \cap (A'B').$$

Soit α le point à l'infini de (AB), comme H est le pôle de (AB), la polaire de α passe par H. Elle passe aussi par le point à l'infini de $\mathscr{P}$, c'est donc la parallèle à l'axe qui passe par H. On a vu que cette droite passe par C, il s'ensuit que α appartient à la polaire de C. Or, il résulte des propriétés du quadrilatère complet que cette droite est (DE), ainsi α et E coïncident. Autrement dit, (AB) et (A'B') sont parallèles et l'homothétie de centre D qui transforme A en A' transforme aussi B en B'. On en détermine le rapport.



On note :

- I et I' les intersections de (DC) avec les droites (AB) et (A'B'),
- J le point où (HC) coupe $\mathscr{P}$ – cette droite est parallèle à l'axe.

Comme (AB) est la polaire de H, J est le conjugué harmonique du point à l'infini de $\mathscr{P}$ par rapport à H et I, c'est-à-dire le mileu de HI. Pour une raison analogue, J est aussi le milieu de DC. On en déduit que :

$$HD = IC = HI.$$

On a donc :

$$JD = JC = \frac{3}{4} DI.$$

Il découle des propriétés du quadrilatère complet que :

$$[D, C, I, I'] = -1.$$

Ce qui se traduit par la relation :

$$JC^2 = JD^2 = \overline{JI} . \overline{JI'}.$$

On peut alors effectuer le calcul suivant :

$$\frac{9}{16} DI^2 = JC^2 = \overline{JI} . \overline{JI'} = \frac{1}{4} \overline{DI}(\overline{DI'} - \overline{DJ}),$$

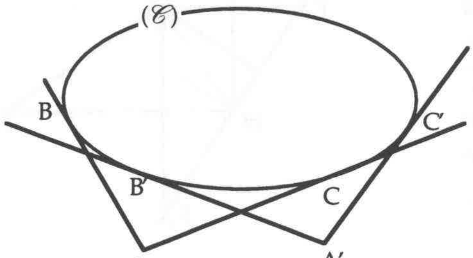
$$\frac{9}{4} \overline{DI} = \overline{DI'} - \overline{DJ} = \overline{DI'} - \frac{3}{4} \overline{DI},$$

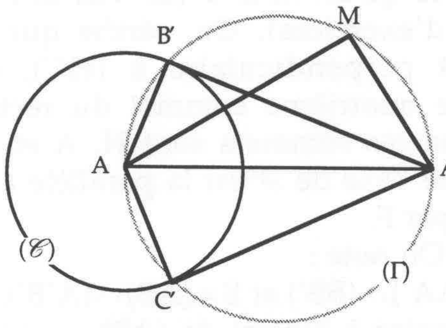
$$\overline{DI'} = 3\overline{DI}.$$

On en conclut que c'est l'homothétie de centre D et de rapport 3 transforme A en A' et B en B'.

XLIV

1) Conservant les notations de l'exercice 36, on considère l'homographie du plan qui échange B et C avec les points cycliques I et J. Elle transforme la conique donnée, en un cercle. On considère la figure ainsi obtenue sans changer le nom des divers éléments.





Le point A est devenu le pôle de la droite de l'infini, c'est donc le centre du cercle 𝒞. Or, il est bien connu que le centre d'un cercle, les points de contact de deux tangentes ainsi que le point commun de ces dernières sont quatre points situés sur un même cercle. Ce qui montre que les points considérés sont devenus six points d'une même conique Γ. Cette propriété étant conservée par les homographies, elle est vérifiée par la figure initiale.

Soit M un point quelconque, on note t et t' les tangentes à 𝒞, issues de M.. Comme ces droites sont symétriques par rapport à (AM). Les droites (AM) et (A'M) sont perpendiculaires si et seulement si (MA, MA', t, t') est un faisceau harmonique. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que M appartienne à Γ. Cette propriété étant conservée par les homographies, elle caractérise les points de la conique Γ de la figure initiale.

2) Si M est un point à l'infini, de Γ, comme 𝒞 est désormais une parabole, l'une des tangentes issues de M est la droite de l'infini, l'autre passe donc par le milieu O de AA'. Ce qui établit que les directions asymptotiques de Γ sont celles des tangentes à la parabole, issues du milieu de AA'. Nous avons montré qu'elles sont perpendiculaires si et seulement si ce point appartient à la directrice.

Titre : Complément de géométrie 2 – Géométrie projective

Édition : IREM des Pays de la Loire

Auteurs : Bernard TRUFFAULT

Date : mai 1999

Public Étudiants de licence de mathématiques, candidats à l'agrégation de mathématiques, professeurs de mathématiques

Mots-clefs perspective, affine, projectif, point à l'infini, dualité, birapport, division harmonique, coordonnées homogènes, homographie, involution, homologie, complexification, similitude, conique, pôle, polaire

Résumé Conçue à l'origine pour un enseignement de licence à distance, cette brève introduction à la géométrie projective affiche pour objectif de traiter des problèmes dans le cadre du plan usuel, notamment l'étude des coniques : génération (théorèmes de Chasles-Steiner) et polarité.
Comporte 46 exercices avec ébauches de solutions. Les cinq chapitres ont pour titres : I. les points à l'infini, II. géométrie projective des droites, III. les espaces projectifs, IV. le plan projectif, V. géométrie projective des coniques.

Numéro ISBN : 2-86300-029-2 Prix : 35 F