

PARTIE 3  
CINEMATIQUE PLANE

## S O M M A I R E

2.3.1	Définition du centre instantané de rotation (C.I.R)	137
2.3.2	Détermination du C.I.R	138
2.3.3	Distribution des vitesses des points appartenant à $(P_2)$	141
2.3.4	Enveloppe d'une courbe du plan mobile	144
2.3.5	Théorème des trois plans glissants	145
2.3.6	Exercice général	150
2.3.7	Centre de courbure des enveloppes des courbes $\mathcal{C}$ ( $P_2$ ) Centre de courbure des trajectoires des points du plan ( $P_2$ )	158
2.3.8	Distribution des accélérations des points du plan mobile	172
2.3.9	Construction de Bobiller	179
2.3.10	Construction de Bresse. Formule de Bresse	186

3ème partie

MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

2.3.1 DEFINITION DU CENTRE INSTANTANE DE ROTATION

Soient deux plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  constamment en coïncidence

- à  $(P_1)$  on lie le repère  $(R_1) : (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $(P_1)$  est confondu avec  $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$
- à  $(P_2)$  on lie le repère  $(R_2) : (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ,  $(P_2)$  est confondu avec le plan  $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$

On repère l'origine de  $(R_2)$  sur  $(R_1)$  par

$$\overrightarrow{O_1 O_2} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

On repère l'orientation de  $(R_2)$  par rapport à  $(R_1)$  par  $\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Les deux repères  $(R_1)$  et  $(R_2)$  sont animés d'un mouvement plan. Le mouvement est une rotation instantanée d'axe perpendiculaire à  $(P_1)$  et  $(P_2)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_2^1 &= \psi' \vec{z}_1 \\ &= \psi' \vec{z}_2 \end{aligned}$$

A/ 1ère définition du C.I.R

On appelle centre instantané de rotation (en abrégé C.I.R.) le point où  $\Delta_{21}$  perce les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

B/ 2ème définition du C.I.R.

Si  $I \in \Delta_{21}$  on a  $\vec{V}_2^1(I) = 0$  D'où

Le centre instantané de rotation à l'instant  $t$  est le point géométrique coïncidant à  $t$  avec le point  $\theta$   $(P_2)$  dont la vitesse par rapport à  $(P_1)$  est nulle à cet instant.

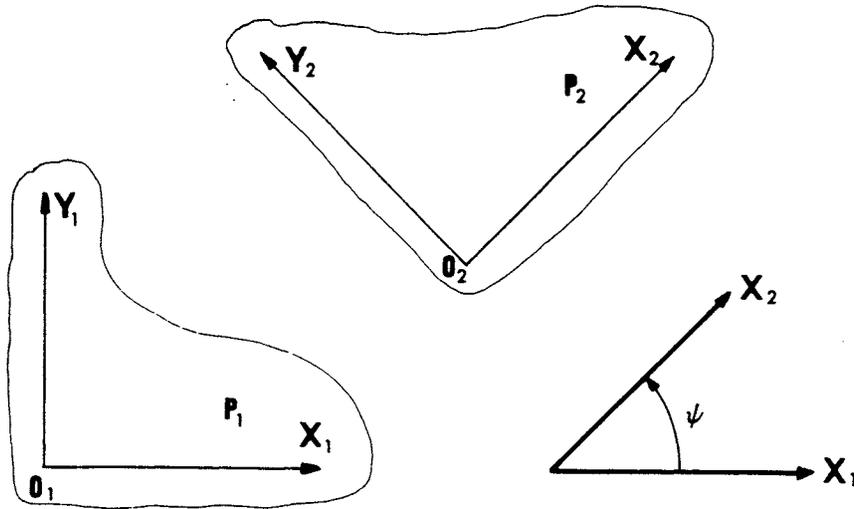


Figure 1

exemple :

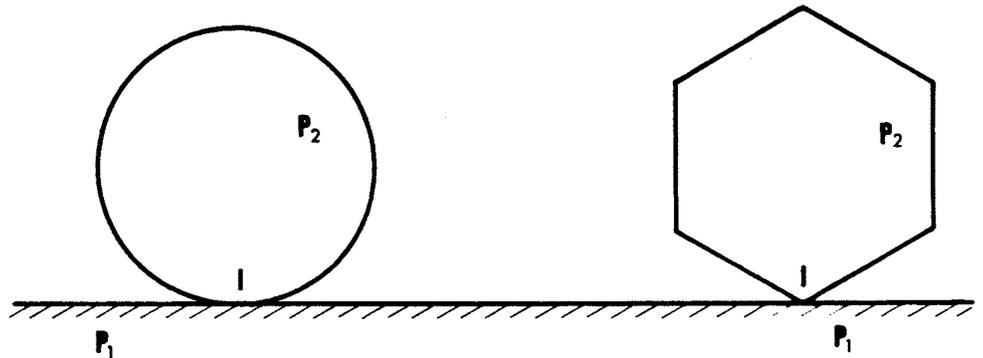


Figure 2

Si  $\vec{V}_2^1(I) = 0$  le centre instantané de rotation est le point de contact.

### 2.3.2 DETERMINATION DU C.I.R.

#### A/ Détermination vectorielle

Soient  $\vec{V}_2^1(O_2)$  et  $\vec{\Omega}_2^1$  les éléments de réduction en  $O_2$  du torseur des vitesses. On peut appliquer la théorie générale faite précédemment. Le C.I.R. du mouvement de  $(P_2)$  par rapport à  $(P_1)$  est le point  $I = I^*$ , pied de la perpendiculaire abaissée de  $O_2$  sur  $\Delta_{21}$ .

$$\text{On a donc} \quad \vec{O_2 I} = \frac{\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{V}_2^1(O_2)}{(\vec{\Omega}_2^1)^2}$$

$$\vec{O_2 I} = \frac{\psi' \vec{z}_1 \wedge \vec{V}_2^1(O_2)}{\psi'^2}$$

$$\vec{O_2 I} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{V}_2^1(O_2)}{\psi'} \quad (\vec{z}_1 = \vec{z}_2)$$

Remarque. Si  $\psi' = 0$  le C.I.R. est à l'infini, le mouvement est une translation instantanée.

B/ Détermination analytique

Donnons nous les éléments du torseur distributeur des vitesses dans les repères (R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>) réduit en O<sub>2</sub>

$$\text{Dans (R}_1\text{)} \quad \vec{\Omega}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix}_{R_1} \quad \vec{V}_2^1(O_2) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\text{Dans (R}_2\text{)} \quad \vec{\Omega}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix}_{R_2} \quad \vec{V}_2(O_2) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

Remarque : (x', y', 0) et (V<sub>x</sub>, V<sub>y</sub>, 0) sont les composantes du même vecteur respectivement dans (R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>). Et l'on a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

1°/ Coordonnées de I dans (R<sub>2</sub>)

Désignons par (X<sub>2</sub>, Y<sub>2</sub>, 0) les coordonnées de (I) dans (R<sub>2</sub>)

$$\vec{O_2 I} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}}{\psi'^2}$$

$$X_2 = -\frac{V_y}{\psi'}$$

$$Y_2 = \frac{V_x}{\psi'}$$

2°/ Coordonnées de I dans (R<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1 I} &= \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 I} \\ &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_2 I} \end{bmatrix}_{R_1} \\ \overrightarrow{O_2 I} &= \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 0 \end{bmatrix}}{\psi'^2} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{O_2 I} = \begin{bmatrix} -\frac{y_0'}{\psi'} \\ \frac{x_0'}{\psi'} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$X_1 = x_0 - \frac{y_0'}{\psi'}$$

$$Y_1 = y_0 + \frac{x_0'}{\psi'}$$

X<sub>1</sub> et Y<sub>1</sub> sont les coordonnées de I dans (R<sub>1</sub>)

### C/ Propriétés : Base et roulante

#### 1°/ Définition

Au cours du mouvement I se déplace sur (P<sub>1</sub>) et sur (P<sub>2</sub>). La trajectoire de I sur (P<sub>1</sub>) est appelée la base (B). La trajectoire de I sur (P<sub>2</sub>) est appelée roulante (R).

On définit donc les coordonnées paramétriques de la base et de la roulante.

#### 2°/ Propriétés

*Théorème : Au cours du mouvement la roulante roule sans glisser sur la base et les deux courbes sont tangentes.*

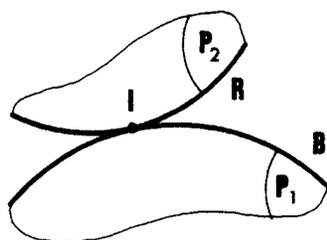


Figure 3

D'après la définition

$$\vec{V}_2^1(I) = 0$$

Soit I point géométrique (mobile fictif se trouvant toujours en coïncidence avec le C.I.R.)

$$\vec{V}^1(I) = \vec{V}^2(I) + \vec{V}_2^1(I)$$

$$\vec{V}^1(I) = \vec{V}^2(I) \quad (I : \text{C.I.R.})$$

$\vec{V}^1(I)$  et  $\vec{V}^2(I)$  sont portés respectivement par les tangentes à (B) et (R). Par suite les deux courbes sont tangentes. Comme  $\vec{V}_2^1(I) = 0$  elles roulent sans glisser l'une sur l'autre.

On peut donc restituer le mouvement de la manière suivante :

- à (P<sub>1</sub>) on lie (B)
- à (P<sub>2</sub>) on lie (R)

et l'on fait rouler (R) sur (B) sans glisser.

### 2.3.3 DISTRIBUTION DES VITESSES DES POINTS APPARTENANT AU PLAN (P<sub>2</sub>)

Soit I le C.I.R. et  $M \in (P_2)$

$$\vec{V}_2^1(M) = \vec{V}_2^1(I) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM}$$

$$\vec{V}_2^1(M) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM}$$

D'où : à l'instant t la distribution des vitesses est la même que si l'on avait une rotation autour du point I à la vitesse angulaire  $\psi' (\vec{\Omega}_2^1 = \psi' \vec{z}_1)$ . C'est ce que l'on connaissait déjà d'après la théorie du mouvement plan d'un solide.

#### A/ Conséquence. Normales aux trajectoires des points du plan mobile

D'après la formule précédente  $\vec{IM}$  est perpendiculaire à  $\vec{V}_2^1(M)$  : il est donc porté par la normale à la trajectoire du point  $M \in (P_2)$ .

D'où le théorème : à l'instant t toutes les normales aux trajectoires des différents points de (P<sub>2</sub>) passent par le centre instantané de rotation.

#### B/ Application. Détermination du C.I.R de certains systèmes.

Exemple 1 : détermination du C.I.R de la bielle S<sub>2</sub> par rapport au bâti S<sub>1</sub> dans un système bielle-manivelle.

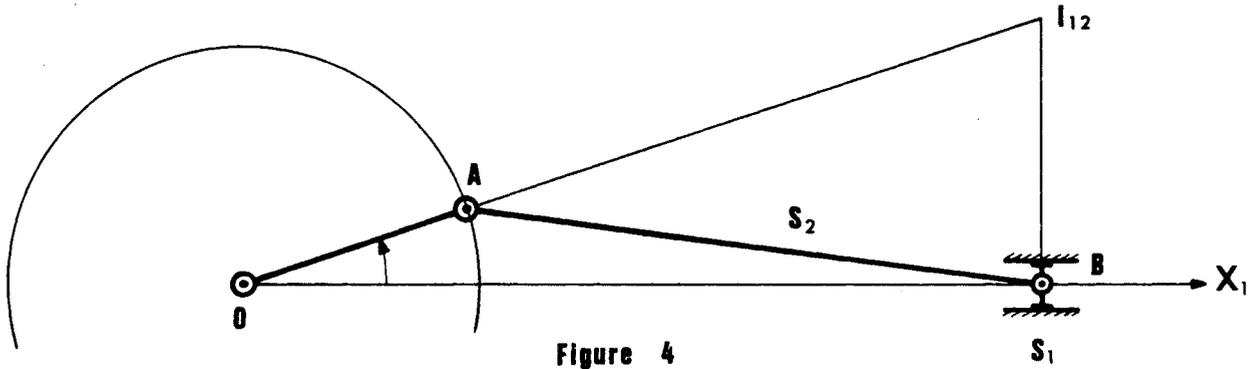


Figure 4

Le point  $A$  de  $S_2$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . Le C.I.R se trouve sur le rayon  $OA$  (normale à la trajectoire)

Le point  $B$  de  $S_2$  décrit la droite  $(OX_1)$  le C.I.R se trouve donc sur la normale en  $B$  à cette droite.

Conclusion : le C.I.R se trouve à l'intersection de  $OA$  et de la normale en  $(B)$  à la trajectoire de  $B$ .

Exemple 2 : détermination du C.I.R de la barre  $AB$  (solide  $S_2$ ) dans son mouvement par rapport au bâti (solide  $S_1$ ) dans le système ci-dessous.

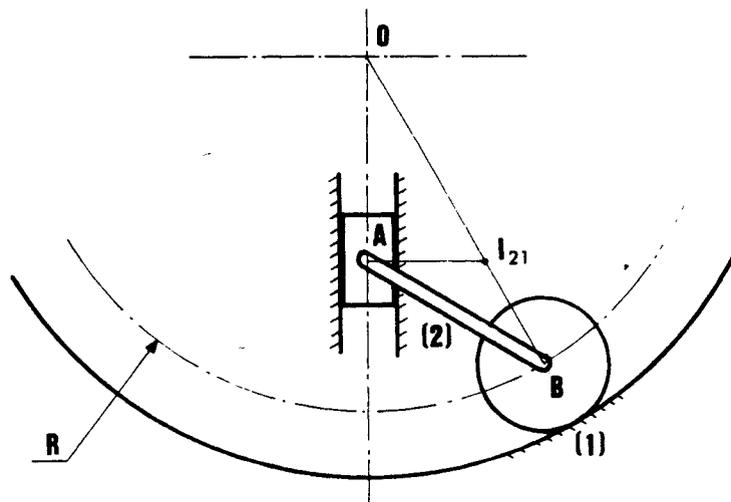


Figure 5

Le point B de  $S_2$  décrit le cercle de centre O et de rayon R et le point A de  $S_2$  décrit un diamètre de ce cercle.

Conclusion : le C.I.R se trouve à l'intersection de OB et de la normale en A à la trajectoire de A.

### 2.3.4 ENVELOPPE D'UNE COURBE DU PLAN MOBILE

A ( $P_2$ ) on lie une courbe ( $C_2$ ). Au cours du mouvement ( $C_2$ ) reste tangente à ( $C_1$ ) liée à ( $P_1$ ).

#### A/ Théorème

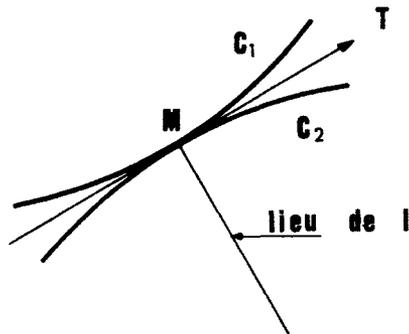


Figure 6

Soit M le point de contact : calculons sa vitesse dans le repère ( $R_1$ ) à l'aide du théorème de composition des vitesses

$$\vec{V}^1(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^1(M)$$

mais  $\vec{V}_2^1(M)$  est perpendiculaire à  $\vec{IM}$  ( $\vec{V}_2^1(M) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM}$ ), donc  $|\vec{V}^1(M) - \vec{V}^2(M)|$  est porté par la tangente commune à  $C_1$  et  $C_2$ , il est donc colinéaire à  $\vec{V}_2^1(M)$ .

Donc  $\vec{IM}$ , perpendiculaire à  $\vec{V}^1(M) - \vec{V}^2(M)$ , est porté par la normale commune à  $C_1$  et  $C_2$ .

D'où le théorème

*Le centre instantané de rotation est sur la normale commune aux deux courbes.*

#### B/ Applications

1°/ *Tracé de la tangente à certaines courbes*

*Exemple : tracé de la tangente aux conchoïdes*

Le solide  $S_2$  est une barre AB astreinte à passer par un point O du solide fixe  $S_1$  et dont l'extrémité A décrit une droite  $O_1Y_1$  du solide  $S_1$ .

Le point A décrit  $Oy_1$ . Le C.I.R  $I_{21}$  se trouve sur la normale en A à  $Oy_1$ .

La droite AB enveloppe le point O. Le C.I.R se trouve sur la normale aux deux courbes, donc sur la normale en O à AB.

Le C.I.R est donc à l'intersection des deux normales : la tangente à la conchoïde est normale à  $I_{21}$ .



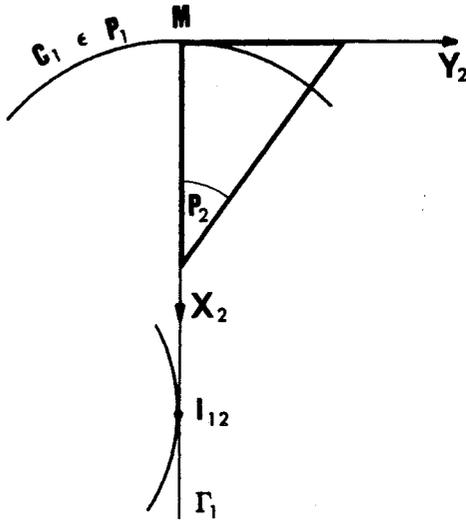


Figure 9

- $M y_2$  enveloppe la courbe  $(C_1)$ . Le C.I.R  $I_{12}$  est sur la normale commune  $M x_2$
  - la roulante est donc  $M x_2$  puisque cette courbe est le lieu de  $I$  dans le plan mobile.
  - la normale  $M y_2$  enveloppe la développée  $(\Gamma_1)$  de  $(C_1)$  Or la courbe  $\Gamma_1$  est la base du mouvement car  $M x_2$  est la roulante.
- Le point de contact  $I_{12}$  est donc à la fois
- point caractéristique de l'enveloppe de la normale, c'est à dire aussi centre de courbure
  - centre instantané de rotation du mouvement de  $(P_2)$  par rapport à  $(P_1)$ .

2.3.5 THEOREME DES TROIS PLANS GLISSANTS

A/ Théorème :

Soient trois plans  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ ,  $(P_3)$  glissant l'un sur l'autre. Pour chaque mouvement relatif  $(P_i)/(P_j)$  on peut définir un C.I.R  $I_{ij}$ . Le nombre de C.I.R est

$$n = C_3^2 = 3$$

A chaque mouvement  $(P_i)/(P_j)$  on fait correspondre le C.I.R  $I_{ij}$

$(P_2)/(P_1)$	→	$I_{21}$	$(I_{21} \equiv I_{12})$
$(P_3)/(P_2)$	→	$I_{32}$	$(I_{32} \equiv I_{23})$
$(P_1)/(P_3)$	→	$I_{13}$	$(I_{13} \equiv I_{31})$

Soit  $M \in (P_3)$

$$\begin{aligned} \vec{V}_3^1(M) &= \vec{\Omega}_3^1 \wedge \overrightarrow{I_{31}M} \\ &= \omega_3^1 \vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{31}M} \quad [\vec{z} \text{ normal à } (P_1), (P_2), (P_3)] \\ \vec{V}_3^1(M) &= \vec{V}_3^2(M) + \vec{V}_2^1(M) \\ &= \vec{\Omega}_3^2 \wedge \overrightarrow{I_{32}M} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{I_{21}M} \\ &= \vec{z} \wedge [\omega_3^2 \overrightarrow{I_{32}M} + \omega_2^1 \overrightarrow{I_{21}M}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} \wedge \omega_3^1 \overrightarrow{I_{31}M} &= \vec{z} \wedge [\omega_3^2 \overrightarrow{I_{32}M} + \omega_2^1 \overrightarrow{I_{21}M}] \\ \omega_3^1 \overrightarrow{I_{31}M} &= \omega_3^2 \overrightarrow{I_{32}M} + \omega_2^1 \overrightarrow{I_{21}M} \\ \omega_3^1 \overrightarrow{MI_{31}} &= \omega_3^2 \overrightarrow{MI_{32}} + \omega_2^1 \overrightarrow{MI_{21}} \end{aligned}$$

ou 
$$0 = \omega_3^2 \overrightarrow{I_{31}I_{32}} + \omega_2^1 \overrightarrow{I_{31}I_{21}}$$

on obtient donc le double résultat suivant :

*Théorème : Les C.I.R  $I_{31}$ ,  $I_{32}$  et  $I_{21}$  sont alignés et  $I_{31}$  est le barycentre de  $I_{32}$  et  $I_{21}$  affectés des coefficients  $\omega_3^2$  et  $\omega_2^1$ .*

B/ Exemple

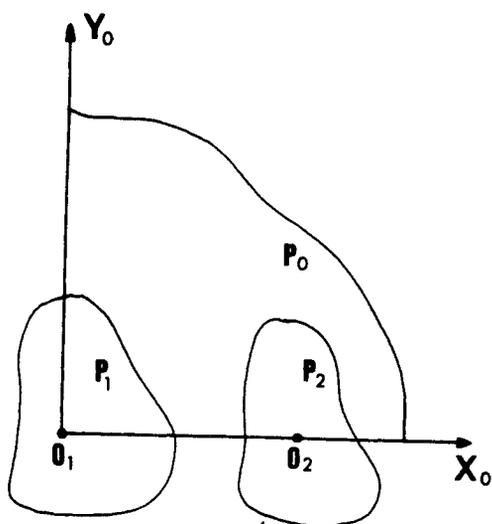


Figure 10

Trouver la base et la roulante (trajectoire de  $I_{12}$ ) dans le repère  $(R_1)$  et dans le repère  $(R_2)$  respectivement.

$P_1$  tourne autour de  $O_1$  de  $P_0$

$P_2$  tourne autour de  $O_2$  de  $P_0$

On impose de plus que  $\frac{\vec{\Omega}_2^0}{\vec{\Omega}_1^0} = k = \text{constante}$

A  $P_0$ , on lie  $(R_0)$   $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  tel que

$$\vec{X}_0 = \frac{O_1O_2}{d}$$

$\vec{Z}_0$  porté par l'axe de rotation de  $(P_1)/(P_0)$

$$\vec{Y}_0 = \vec{Z}_0 \wedge \vec{X}_0$$

$I_{10} \equiv O_1$        $I_{20} \equiv O_2$       On se propose de chercher  $I_{21}$

$I_{21}$  est aligné avec  $I_{20}$  et  $O_1 \equiv I_{10}$  et l'on a

$$\omega_2^0 \overrightarrow{I_{21}I_{20}} + \omega_1^0 \overrightarrow{I_{21}I_{10}} = 0$$

mais  $\overrightarrow{I_{10}I_{20}} = d \vec{x}_0$

$$\omega_2^0 (\overrightarrow{I_{21}I_{10}} + \overrightarrow{I_{10}I_{20}}) + \omega_1^0 \overrightarrow{I_{21}I_{10}} = 0$$

$$\omega_2^0 d \vec{x}_0 + \overrightarrow{I_{21}I_{10}} (\omega_1^0 + \omega_2^0) = 0$$

$$\overrightarrow{I_{10}I_{21}} = d \frac{\omega_2^0}{\omega_1^0 + \omega_2^0} \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{O_1 I_{21}} = d \frac{k}{k-1} \vec{x}_0$$

Le point  $I_{21}$  est un point fixe de  $O_1 O_2$ . Par suite la base est un cercle de centre  $O_1$  et de rayon  $r_1 = |\overrightarrow{O_1 I_{21}}|$  et la roulante un cercle de centre  $O_2$  et de rayon  $r_2 = |\overrightarrow{O_2 I_{21}}|$

C/ Application du théorème des trois plans glissants à la détermination de certains C.I.R d'un système formé de N plans glissants (N > 3)

1°/ Nombre de C.I.R

Soit un système formé de N plans glissant les uns sur les autres. Le nombre de C.I.R est égal au nombre de combinaisons que l'on peut faire en prenant deux plans parmi les N plans formant le système.

$$n = C_N^2$$

$$n = \frac{N(N-1)}{2}$$

2°/ Table et cercle des C.I.R : exemple

Soit un système formé de quatre plans glissants, par exemple le système articulé formé de quatre barres ci-dessous

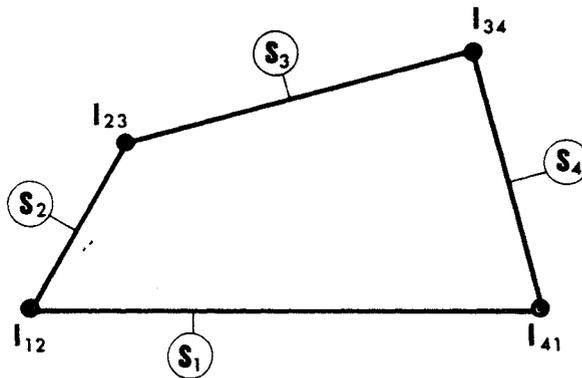


Figure 11

Il y a  $n = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  C.I.R

a) Table des C.I.R

1	2	3	4
$I_{12}$	$I_{23}$	$I_{34}$	
$I_{13}$	$I_{24}$		
$I_{14}$			

On trace autant de colonnes qu'il y a d'éléments. On commence par un élément quelconque et on le combine avec les éléments successifs.

b) Cercle des C.I.R

Le nombre de C.I.R étant égal au nombre de combinaisons que l'on peut faire en prenant deux éléments parmi N ce nombre est égal au nombre de segments que l'on peut tracer en joignant deux à deux N points tracés sur un cercle.

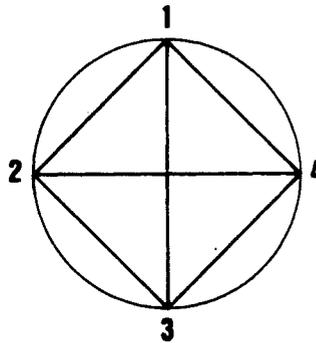


Figure 11 bis

3°/ Localisation des C.I.R inconnus

Certains C.I.R sont connus directement. On les barre sur la table des C.I.R ou on réunit les indices correspondants par un trait fort sur le cercle des C.I.R

1	2	3	4
<del><math>I_{12}</math></del>	<del><math>I_{23}</math></del>	<del><math>I_{34}</math></del>	
$I_{13}$	$I_{24}$		
<del><math>I_{14}</math></del>			

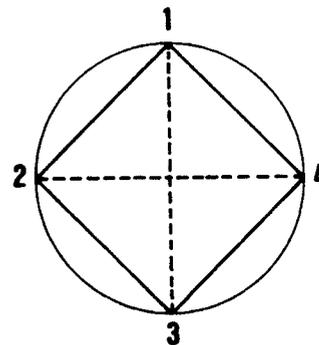


Figure 12

On va obtenir les C.I.R inconnus à l'intersection de deux lignes droites portant des C.I.R alignés avec celui que l'on recherche.

a) Détermination de  $I_{13}$

$I_{13}$  appartient au mouvement de  $(P_1)/(P_3)$ . Afin de pouvoir appliquer le théorème des trois plans glissants combinons les éléments (1) et (3) avec respectivement (2) et (4)

(1), (3) combinés avec (2)

1	2	3
$I_{12}$ $I_{13}$	$I_{23}$	

(1), (3) combinés avec (4)

1	3	4
$I_{13}$ $I_{14}$	$I_{34}$	

D'après le théorème des trois plans glissants appliqué successivement

$I_{13}$  est aligné avec  $I_{12}$  et  $I_{23}$

$I_{13}$  est aligné avec  $I_{14}$  et  $I_{34}$

Le C.I.R  $I_{13}$  se trouve donc à l'intersection des droites  $I_{12}I_{23}$  et  $I_{14}I_{34}$ .

Barrons  $I_{13}$  sur la table des C.I.R ou joignons les points 1 et 3 sur le cercle des C.I.R

1	2	3	4
<del><math>I_{12}</math></del> <del><math>I_{13}</math></del> <del><math>I_{14}</math></del>	<del><math>I_{23}</math></del> $I_{24}$	<del><math>I_{34}</math></del>	

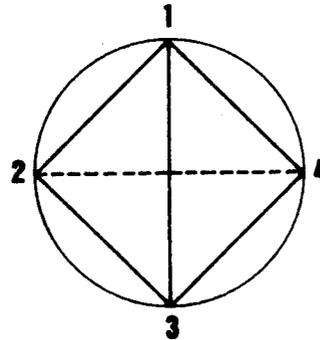


Figure 13

b) Détermination de  $I_{24}$

On combine les éléments (2) et (4) avec les éléments (1) et (3)

1	2	4
$I_{12}$ $I_{14}$	$I_{24}$	

2	3	4
$I_{23}$ $I_{24}$	$I_{34}$	

$I_{24}$  est aligné avec  $I_{12}$  et  $I_{14}$

$I_{24}$  est aligné avec  $I_{23}$  et  $I_{34}$

Le C.I.R  $I_{24}$  est donc à l'intersection des droites  $I_{12}I_{14}$  et  $I_{23}I_{34}$ .

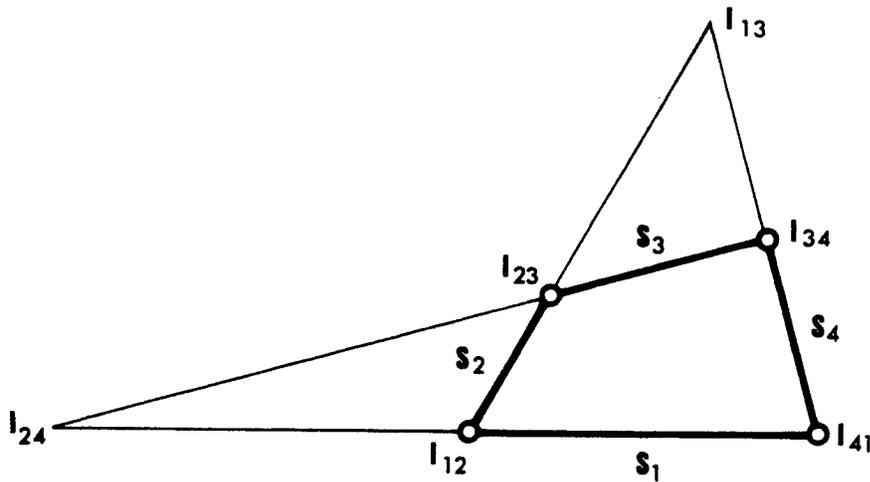
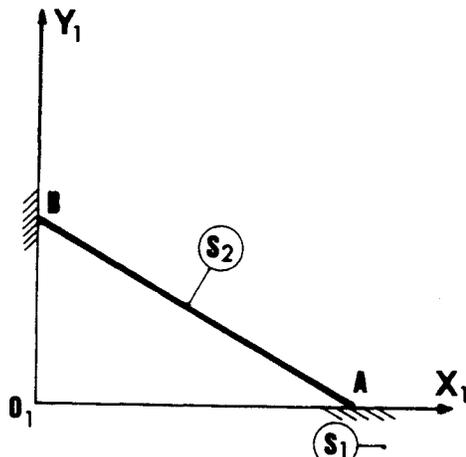


Figure 14

Tous les C.I.R sont donc maintenant connus.

2.3.6 EXERCICE GENERAL



Les extrémités A et B d'une barre AB de longueur  $2l$  sont assujetties à rester sur deux axes  $O_1x_1$  et  $O_1y_1$  rectangulaires

Déterminer :

- la base et la roulante
- l'enveloppe de AB
- la trajectoire d'un point appartenant à AB
- la trajectoire d'un point quelconque appartenant à la roulante
- la trajectoire d'un point quelconque du plan mobile.

Figure 15

La barre AB constitue un plan (P<sub>2</sub>) mobile se déplaçant sur un plan fixe (P<sub>1</sub>) (O<sub>1</sub> x<sub>1</sub> y<sub>1</sub> z<sub>1</sub>)

A/ Base et roulante

1°/ Méthode graphique

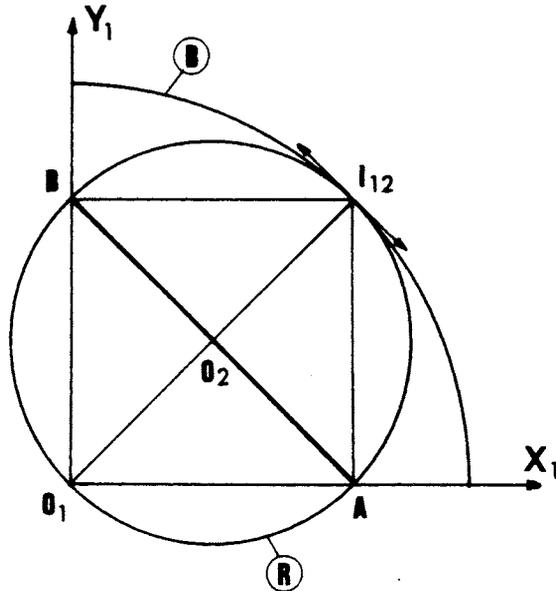


Figure 16

A et B appartiennent au plan (P<sub>2</sub>)

- A décrit O<sub>1</sub>x<sub>1</sub>. I<sub>12</sub> est sur la normale en A à O<sub>1</sub>x<sub>1</sub>
- B décrit O<sub>1</sub>y<sub>1</sub>. I<sub>12</sub> est sur la normale en B à O<sub>1</sub>y<sub>1</sub>.

Base

On lie I aux éléments du plan (P<sub>1</sub>)

$$O_1 I = 2l \text{ (rectangle)}$$

I décrit sur (P<sub>1</sub>) le cercle de centre O<sub>1</sub> et de rayon 2l.

Roulante

On relie I aux éléments du plan mobile de I. On voit AB sous un angle droit. I décrit sur (P<sub>2</sub>) le cercle de φ AB (rayon l) et de centre O<sub>2</sub> milieu de AB.

2°/ Méthode analytique

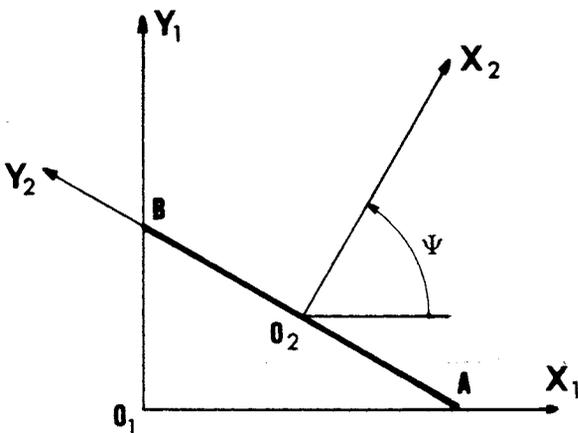


Figure 17

On prend un système d'axes liés à (R<sub>2</sub>) d'origine O<sub>2</sub> milieu de AB, tel que

$$\vec{Y}_2 = \frac{\vec{AB}}{2l}$$

$$\vec{X}_2 = \vec{Y}_2 \wedge \vec{Z}_2$$

$$(\vec{Z}_2 = \vec{Z}_1 = \vec{X}_1 \wedge \vec{Y}_1)$$

On repère O<sub>2</sub> par la relation

$$\vec{O_1 O_2} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

On repère la rotation par

$$\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

a) Base : équation dans  $(P_1)$  du lieu de I

$$\begin{aligned} X_1 &= x_0 - \frac{y_0'}{\psi} \\ Y_1 &= y_0 + \frac{x_0'}{\psi} \end{aligned}$$

Il faut alors trouver la relation entre  $\psi'$ ,  $x_0'$ ,  $y_0'$  qui caractérise le mouvement particulier auquel nous avons affaire ici. C'est ce que l'on appelle l'équation de liaison. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} x_0 &= l \sin \psi \\ y_0 &= l \cos \psi \\ x_0' &= \psi' l \cos \psi \\ y_0' &= -\psi' l \sin \psi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_1 &= 2l \sin \psi & X_1^2 + Y_1^2 &= 4 l^2 \\ Y_1 &= 2l \cos \psi \end{aligned}$$

On reconnaît le cercle de centre  $O_1$  et de rayon  $2l$

b) Roulante : équation dans  $(P_2)$  du lieu de I

$$\begin{aligned} X_2 &= -\frac{V_y}{\psi} \\ Y_2 &= \frac{V_x}{\psi} \end{aligned}$$

avec  $\vec{V}_2^1(O_2) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \psi' l \cos 2\psi \\ V_y &= -\psi' l \sin 2\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= -l \cos 2\psi & \text{cercle de centre } O_2 \text{ et de rayon } l \\ Y_2 &= -l \sin 2\psi & X_2^2 + Y_2^2 = l^2 \end{aligned}$$

B/ Enveloppe de AB

1°/ *Méthode géométrique*

La droite AB est une courbe  $(C_2)$  du plan  $(P_2)$ . Le point de contact de AB avec son enveloppe est le point M pied de la perpendiculaire abaissée de I sur AB.

Le point M est sur le cercle de diamètre  $O_2I$  qui roule sans glisser sur le cercle de centre  $O_1$  et de rayon  $O_1I$ .

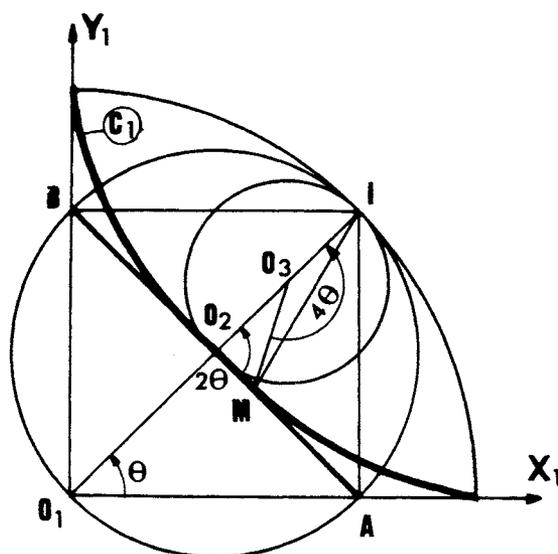


Figure 18

Le point M décrit donc une hypocycloïde à quatre rebroussements ou astroïde.

2°/ Méthode analytique

On écrit l'équation de AB dans  $R_1$  et on cherche son enveloppe  
L'équation est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

$$a = \cos \psi \quad (\text{composantes d'un vecteur normal})$$

$$b = \sin \psi$$

Elle passe par le point  $O_2$ . D'où

$$1 \cos \psi \sin \psi + 1 \sin \psi \cos \psi = c$$

L'équation de la droite est donc :

$$x \cos \psi + y \sin \psi - 1 \sin 2\psi = 0$$

Dérivons par rapport au paramètre  $\psi$

$$-x \sin \psi + y \cos \psi - 2 \cos \psi = 0$$

On obtient l'équation paramétrique de l'enveloppe en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} x \cos \psi + y \sin \psi - 1 \sin 2\psi = 0 \\ -x \sin \psi + y \cos \psi - 2l \cos \psi = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 \sin 2\psi & \sin \psi \\ 2l \cos 2\psi & \cos \psi \end{vmatrix}}{1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \psi & 1 \sin 2\psi \\ -\sin \psi & 2l \cos 2\psi \end{vmatrix}}{1}$$

$$x = 1 \sin 2\psi \cos \psi - 2l \sin \psi \cos 2\psi$$

$$x = 2l \sin \psi \cos^2 \psi - 2l \sin \psi \cos^2 \psi + 2l \sin^3 \psi$$

$$x = 2l \sin^3 \psi$$

$$y = 2l \cos \psi \cos 2\psi + 1 \sin \psi \sin 2\psi$$

$$y = 2l \cos^3 \psi - 2l \cos \psi \sin^2 \psi + 2l \cos \psi \sin^2 \psi$$

$$y = 2l \cos^3 \psi$$

On reconnaît l'équation d'une astroïde que l'on peut écrire en coordonnées cartésiennes

$$\frac{x^{2/3}}{2l^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{2l^{2/3}} = 1$$

C/ Trajectoire d'un point appartenant à AB

C'est la génération classique de l'ellipse par la bande de papier. D'où le nom de mouvement elliptique donné à ce mouvement.

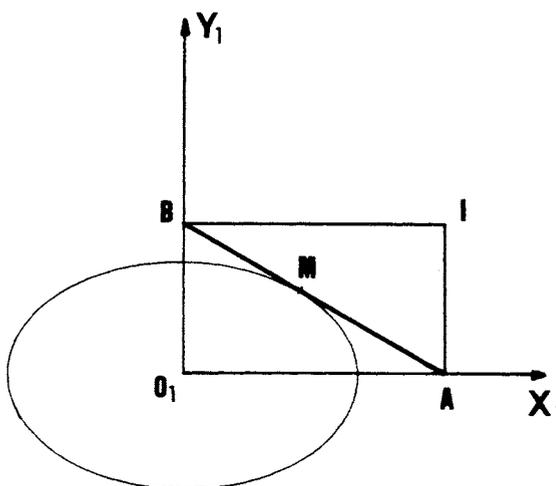


Figure 19

D/ Trajectoire d'un point quelconque de la roulante

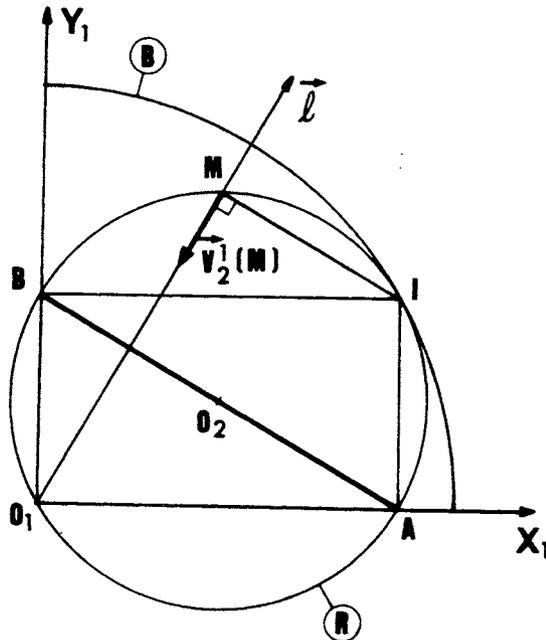


Figure 20

Soit  $M \in (R)$

$$\vec{V}_2^1(M) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM}$$

$\vec{V}_2^1(M) \perp IM$  passe donc par  $O_1$ . Or si la vitesse passe constamment par un point fixe la trajectoire est une droite passant par ce point.

En effet repérons le point  $M$  dans  $(R_1)$  en coordonnées polaires

$$\vec{O_1M} = \rho \vec{i}$$

$$\vec{V}_2^1(M) = \rho' \vec{i} + \rho \frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$\text{mais } \vec{V}_2^1(M) = \lambda \vec{i}$$

On a donc  $\frac{d\vec{i}}{dt} = 0$   $\vec{i}$  est donc un vecteur fixe et la trajectoire du point  $M$  est une droite. Donc tout point de la roulante décrit un diamètre de la base. (C'est un résultat déjà connu : une hypo cycloïde à deux rebroussements est une droite).

*Application* : mécanisme à décrire la ligne droite (mécanisme de Cardan)

Le solide  $(S_1)$  fixe est constitué par une roue dentée à contact intérieur de centre  $O_1$  et de rayon  $2l$ . (base)

Le solide  $(S_2)$  est constitué par une roue dentée à contact extérieur de centre  $O_2$  et de rayon  $l$  (roulante).

Une bielle  $S_3$  est destinée à assurer le mouvement de  $O_2$ .

Lorsque  $(S_2)$  roule sans glisser sur  $(S_1)$  un point  $B_2$  de la roulante  $(S_2)$  a une trajectoire rectiligne dans  $(S_1)$  (diamètre du cercle de base).

La bielle  $(S_4)$  est donc animée d'un mouvement rectiligne alternatif.

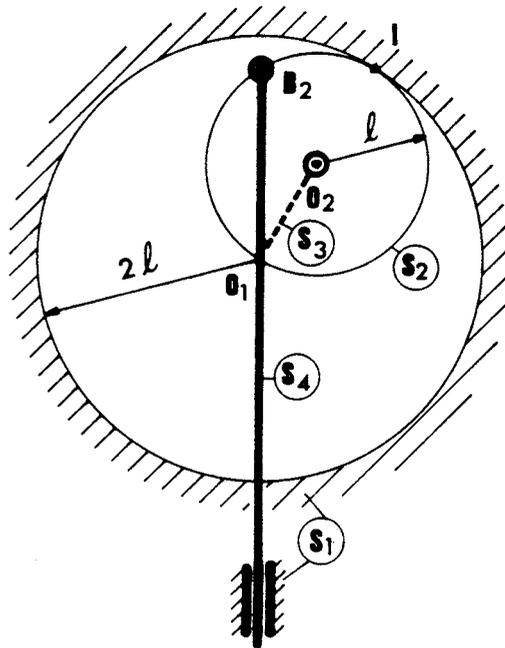


Figure 21

E/ Trajectoire d'un point quelconque du plan mobile

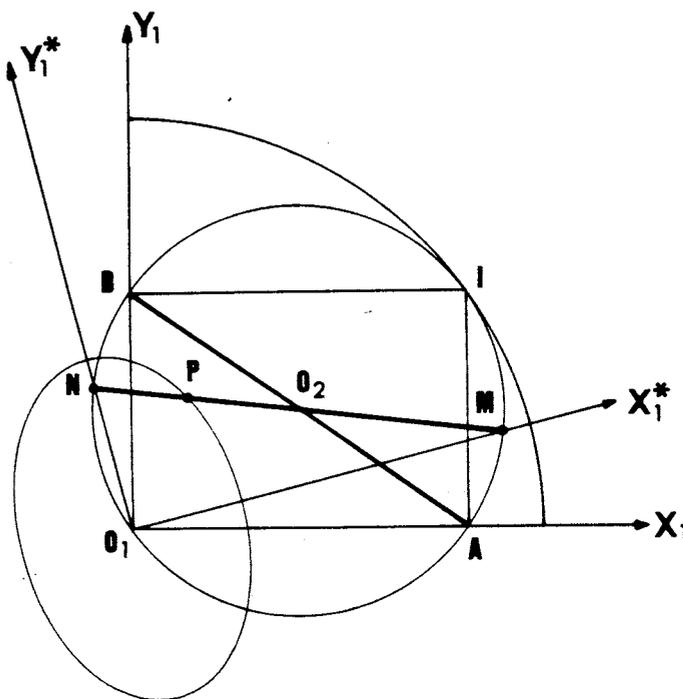


Figure 22

Soit P appartenant au plan mobile.  $O_2P$  coupe la roulante en M et N points appartenant au plan mobile.

M et N points de la roulante décrivent les diamètres  $O_1X_1^*$  et  $O_1Y_1^*$  de la base. P décrit donc une ellipse d'axes  $O_1X_1^*$  et  $O_1Y_1^*$ .

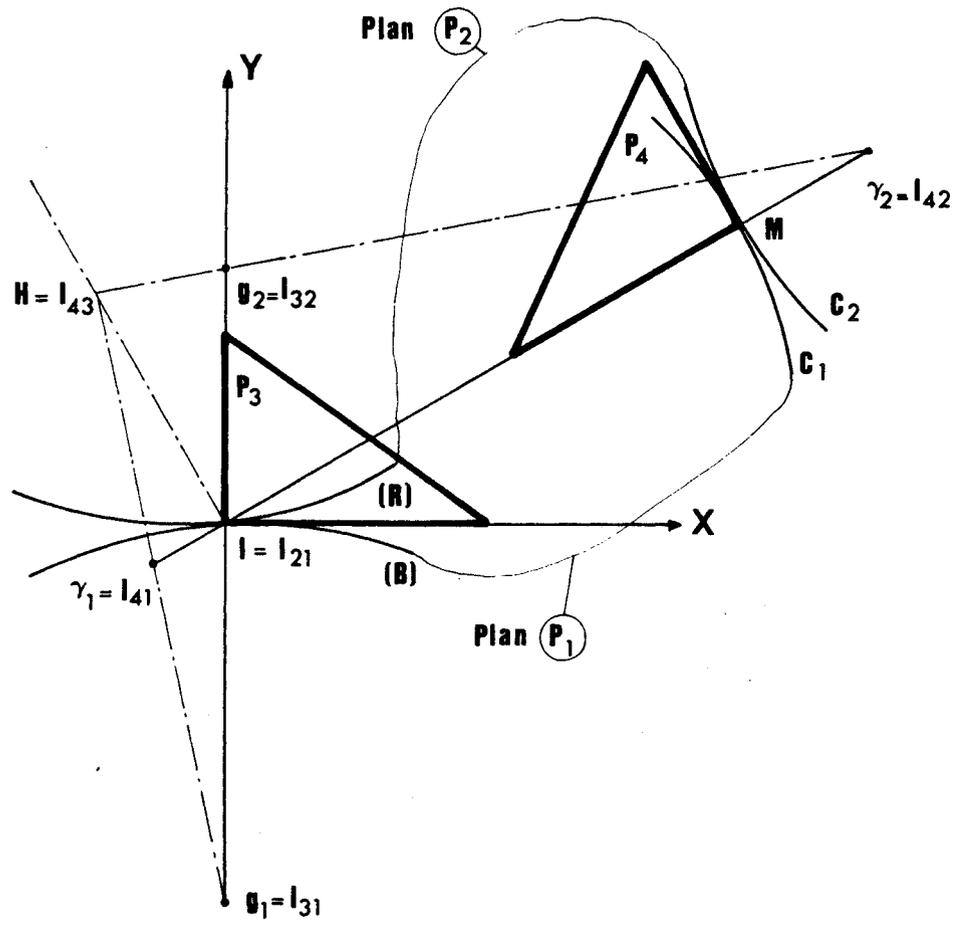


Figure 23

F/ Vitesse du point A

$$\vec{V}_2^1(A) = \vec{V}_2^1(O_2) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{O_2A}$$

$$\overrightarrow{O_1A} = 2l \sin \psi \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_2^1(A) = 2l \psi' \cos \psi \vec{x}_1$$

Le mouvement du point A est un mouvement harmonique.

2.3.7 CENTRE DE COURBURE DES ENVELOPPES DES COURBES e (P<sub>2</sub>).  
CENTRE DE COURBURE DES TRAJECTOIRES DES POINTS DU PLAN (P<sub>2</sub>).

A/ Construction d'Euler Savary

1°/ *Centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe de (P<sub>2</sub>)*

a) construction

Le problème est le suivant : on connaît la base (B) et la roulante (R) ainsi que leur centre de courbure en tout point (G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub> centres de courbure de B et R respectivement en contact en I). Une courbe (C<sub>2</sub>) du plan mobile enveloppe au cours du mouvement une courbe (C<sub>1</sub>) du plan fixe. On connaît le centre de courbure (γ<sub>2</sub>) de (C<sub>2</sub>).

Peut-on trouver le centre de courbure (γ<sub>1</sub>) de (C<sub>1</sub>) ? La construction de Savary permet de répondre par l'affirmative.

La base et la roulante sont tangentes en un point qui est le C.I.R. I. La tangente commune est désignée par Ix et la normale commune par Iy. G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub> sont sur la normale commune.

Le point caractéristique est M (point de contact de la courbe (C<sub>2</sub>) avec son enveloppe).

α) Transformons le problème géométrique en un problème cinématique. Installons en I et M deux équerres de Freinet qui constituent les plans (P<sub>3</sub>) et (P<sub>4</sub>). Il y a donc en présence quatre plans glissants (P<sub>1</sub>), (P<sub>2</sub>), (P<sub>3</sub>), (P<sub>4</sub>) donc

$$n = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ C.I.R distincts à savoir :}$$

1	2	3	4
<del>I<sub>12</sub></del>	<del>I<sub>23</sub></del>	I <sub>34</sub>	
<del>I<sub>13</sub></del>	<del>I<sub>24</sub></del>		
I <sub>14</sub>			

certains C.I.R sont connus à l'aide du théorème de l'équerre

$$I_{31} = G_1$$

$$I_{32} = G_2$$

$$I_{42} = \gamma_2$$

D'autre part  $I_{21} = I$

La recherche de  $\gamma_1$  est transformée en la recherche de  $I_{41}$  (théorème de l'équerre)

- Déterminons  $I_{34}$

Combinons  $I_{34}$  avec l'élément 2

$I_{34}$  est aligné avec  $I_{23}$  et  $I_{24}$ . D'autre part IM côté de l'équerre ( $P_4$ ) enveloppe le point I (sommet de l'équerre 3) dans le mouvement de  $P_4$  par rapport à  $P_3$

	2	3	4
$I_{23}$		$I_{34}$	
$I_{24}$			

Le C.I.R  $I_{34}$  est donc à l'intersection H de la normale en I à IM et de  $I_{23}I_{24}$

- Détermination de  $I_{41}$

Tous les C.I.R sont maintenant connus sauf  $I_{41} = \gamma_1$ . Combinons les éléments (4) et (1) aux éléments (3) et (2).

1	2	4
$I_{12}$	$I_{24}$	
$I_{14}$		

1	3	4
$I_{13}$	$I_{34}$	
$I_{14}$		

$I_{14}$  est à l'intersection de  $I_{12}I_{24}$  et de  $I_{13}I_{34}$ .

*β) Résumé de la construction*

- on joint  $G_2\gamma_2$
- on mène en I la normale à IM
- ces deux droites se coupent en  $H = I_{34}$
- on joint  $HG_1$  et IM
- $HG_1$  et IM se coupent au point  $\gamma_1$  cherché

b) exemples

*Exemple 1* : dans l'exemple de la barre AB se déplaçant dans un angle droit, déterminer le centre de courbure  $\gamma_1$  de l'enveloppe (astroïde) de la droite (AB)

La barre AB est une courbe  $C_2$ . Le point caractéristique M s'obtient en menant par I la normale à AB. Le centre de courbure  $\gamma_2$  de la barre est à l'infini dans la direction perpendiculaire à AB.

Le centre de courbure de la roulante est  $O_2$ .  
Le centre de courbure de la base est  $O_1$ .

$O_2\gamma_2$  est obtenu en traçant par  $O_2$  la parallèle à IM. L'intersection de  $O_2\gamma_2$  et de la perpendiculaire en I à IM donne H. Le point  $\gamma_1$  cherché est à l'intersection de  $O_1H$  et de IM.

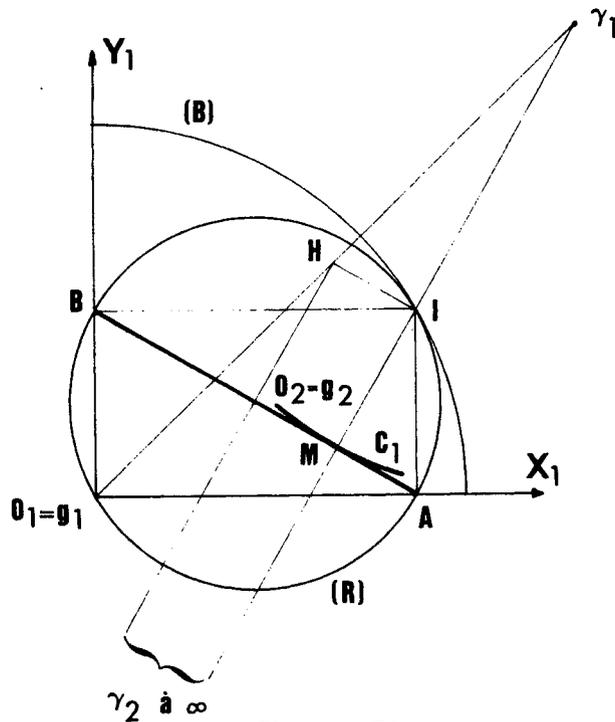


Figure 24

Exemple 2 : centre de courbure de l'enveloppe d'un diamètre de la roulette dans le mouvement cycloïdal. Lieu du centre de courbure.

Le point M est le point caractéristique. Le triangle  $G_2MI$  est rectangle.

Le point H est à l'intersection de la normale en I à IM et de la parallèle à MI menée par  $G_2$  ( $\gamma_2$  à l'infini dans la direction IM). H est donc diamétralement opposé à M sur le cercle de diamètre  $G_2I$ ; au cours du mouvement  $\theta = 2\psi$ . Le cercle de centre O et de diamètre  $G_2I$  roule sans glisser sur le cercle de centre  $G_2$  et de rayon R. Il roule donc aussi sur la base (B) et M engendre une cycloïde de roulette : le cercle de rayon  $\frac{R}{2}$

Le point H est un point fixe de la roulette  $(0, \frac{R}{2})$ . Il décrit donc une cycloïde égale mais décalée de  $\Pi$ .

Le centre de courbure est  $\gamma_1$ . On a  $\overrightarrow{H\gamma_1} = \overrightarrow{G_2I}$  (parallélogramme). Le lieu de  $\gamma_1$  est déduit de celui de H par la translation d'amplitude  $\overrightarrow{H\gamma_1} = \overrightarrow{G_2I}$ . C'est donc une cycloïde égale à la cycloïde enveloppe du rayon FJ.

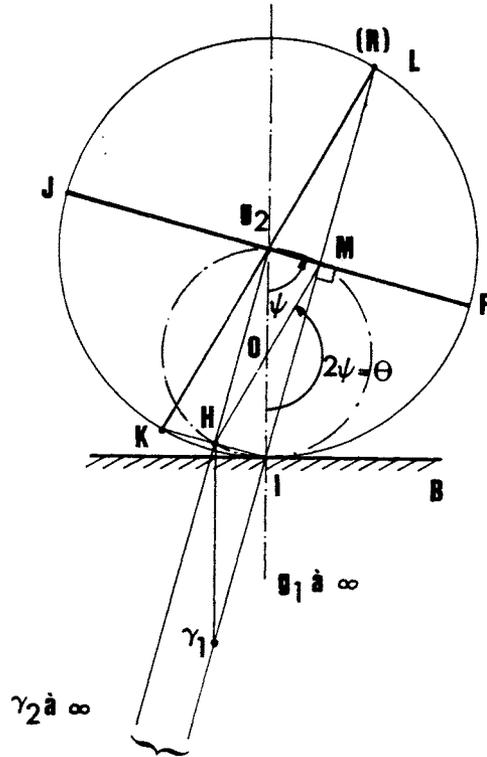


Figure 25

Exemple 3 : un cercle de rayon  $(R_2)$  roule sans glisser sur un cercle de rayon  $R_1$ . Trouver l'enveloppe d'un diamètre de  $(R_2)$ .

La construction se fait comme précédemment.

Enveloppe : c'est le lieu de M.

$$\widehat{MOI} = 2 \widehat{IG_2M}$$

Le point M appartient donc au cercle de diamètre  $IG_2$  qui roule sans glisser sur la base.

La trajectoire de M est donc une épicycloïde.

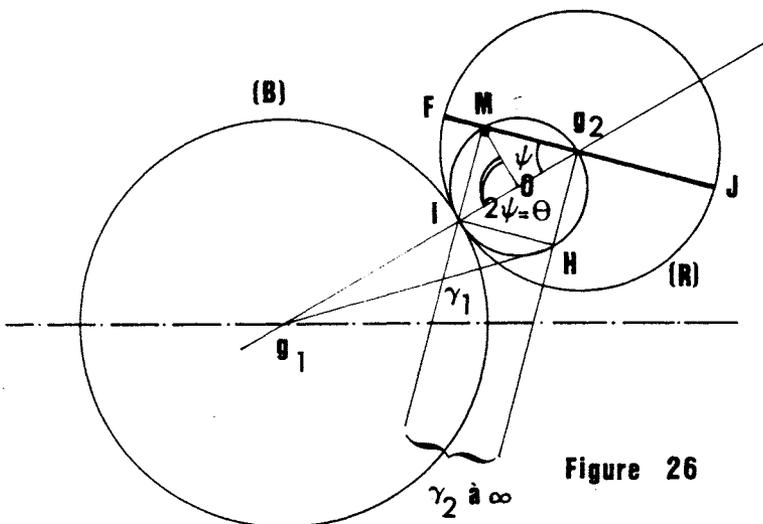


Figure 26

2°/ Centre de courbure de la trajectoire d'un point M de  $(P_2)$

a) Construction

La courbe  $(C_2)$  se réduit au cercle point M. Le point  $\gamma_2$  est confondu avec M. On cherche le centre de courbure de la trajectoire  $(C_1)$  de M.

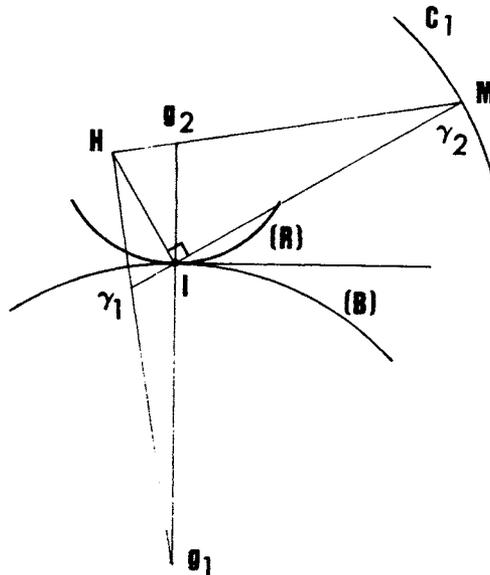


Figure 27

b) Exemples

Exemple 1 : centre de courbure d'une épicycloïde.

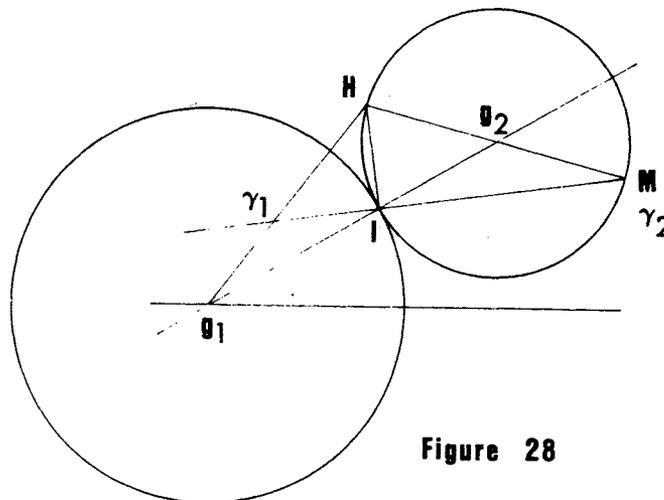


Figure 28

Exemple 2 : centre de courbure d'une cycloïde. Montrer que la développée est une cycloïde égale.

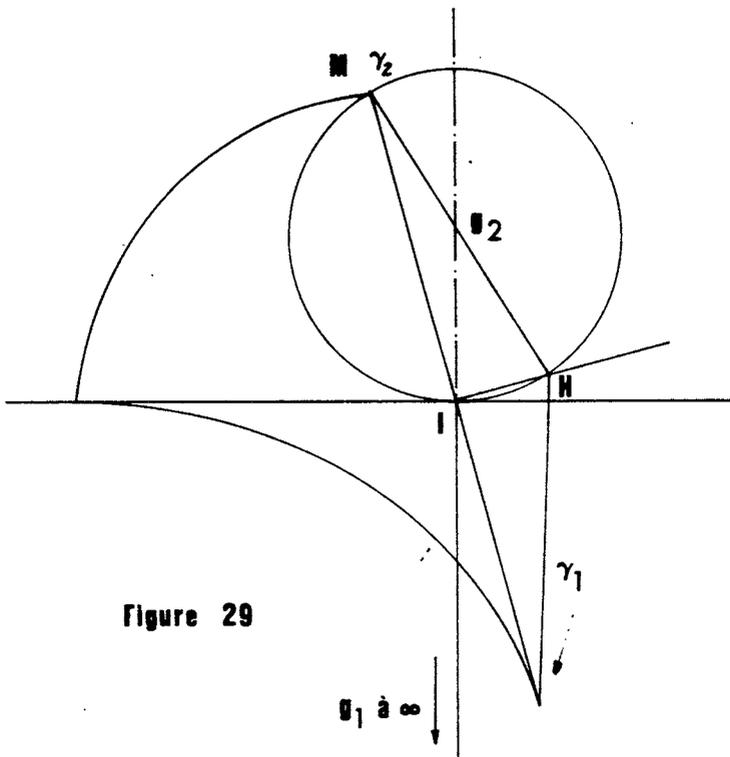


Figure 29

On construit facilement le point  $\gamma_1$

$$\text{On a } \overrightarrow{H\gamma_1} = 2 \overrightarrow{G_2I}$$

Par suite le point  $\gamma_1$  décrit la cycloïde déduite de la cycloïde décrite par H par la translation de vecteur  $2 \overrightarrow{G_2I}$ . C'est donc une cycloïde égale.

B/ Formule d'Euler Savary

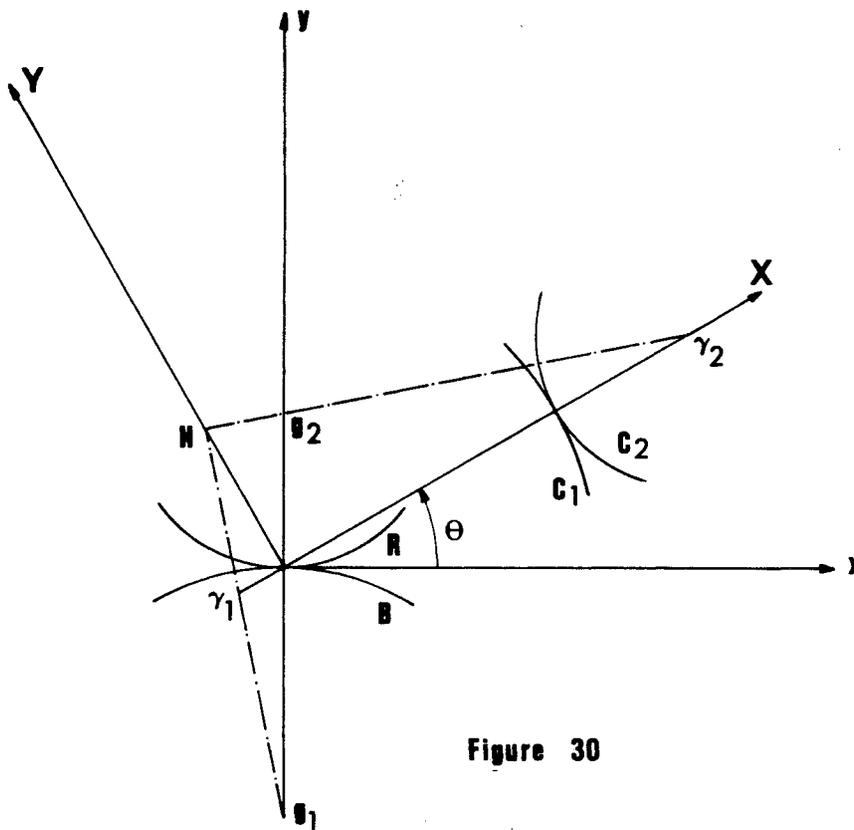


Figure 30

On oriente la tangente en I à la base et à la roulante par  $\vec{x}$  (arbitraire).  
 On construit  $\vec{y}$  directement perpendiculaire. On oriente  $\vec{IM}$  par  $\vec{X}$  arbitraire  
 et on construit  $\vec{Y}$  directement perpendiculaire. On pose

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{X}) &= \theta \\ \vec{IG}_1 &= R_1 \vec{y} \\ \vec{IG}_2 &= R_2 \vec{y} \\ \vec{IY}_1 &= \rho_1 \vec{X} \\ \vec{IY}_2 &= \rho_2 \vec{X} \\ \vec{IH} &= \mu \vec{Y} \end{aligned}$$

$R_1, R_2, \rho_1, \rho_2, \mu$  étant des valeurs algébriques.

On cherche une relation entre  $\rho_1, \rho_2, R_1, R_2$  et  $\theta$ . Pour cela on écrit l'équation des droites  $HY_1$  et  $HY_2$  dans le système d'axes  $I, \vec{X}, \vec{Y}$

- droite  $HY_1$   $\frac{X}{\rho_1} + \frac{Y}{\mu} = 1$

$X, Y$  coordonnées d'un point courant de la droite  $HY_1$  dans le système d'axes  $I, \vec{X}, \vec{Y}$

- droite  $H\gamma_2$        $\frac{X}{\rho_2} + \frac{Y}{\mu} = 1$       X, Y coordonnées d'un point courant de la droite  $H\gamma_2$

Ces droites passent respectivement par  $G_1$  et  $G_2$

$$\overrightarrow{IG_1} = \begin{bmatrix} R_1 \sin \theta \\ R_1 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(I, \vec{X}, \vec{Y})} \quad \overrightarrow{IG_1} = R_1 \vec{y}$$

$$\overrightarrow{IG_2} = \begin{bmatrix} R_2 \sin \theta \\ R_2 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(I, \vec{X}, \vec{Y})} \quad \overrightarrow{IG_2} = R_2 \vec{y}$$

d'où

$$\frac{R_1 \sin \theta}{\rho_1} + \frac{R_1 \cos \theta}{\mu} = 1$$

$$\frac{R_2 \sin \theta}{\rho_2} + \frac{R_2 \cos \theta}{\mu} = 1$$

$$\frac{\sin \theta}{\rho_1} + \frac{\cos \theta}{\mu} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{\sin \theta}{\rho_2} + \frac{\cos \theta}{\mu} = \frac{1}{R_2}$$

en retranchant membre à membre

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

On pose souvent  $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{h}$

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{h \sin \theta}$$

Remarque : cette relation est évidemment valable qu'il s'agisse de centre de courbure d'enveloppe ou de centre de courbure de trajectoire (dans ce dernier cas il suffit de faire  $M \equiv \gamma_2$ )

C/ Cercle des inflexions. Cercle des rebroussements

1°/ *Cercle des inflexions*

a) Définition du problème et détermination

On cherche le lieu des points qui à l'instant (t) sont point d'inflexion de leur trajectoire.

Si un point est point d'inflexion de sa trajectoire on a

$$\rho_1 = \infty \longrightarrow \frac{1}{\rho_1} = 0$$

Les points qui sont point d'inflexion vérifient donc

$$\frac{l}{\rho_2} = \frac{l}{h \sin \theta}$$

$$\rho_2 = h \sin \theta$$

C'est l'équation d'un cercle en coordonnées polaires : il passe par l'origine I, il est centré sur IG, son diamètre est  $d_1 = |h|$ . Il recoupe l'axe des y en K tel que  $\vec{IK} = h \vec{y}$ . Il est donc tangent en I à la base et à la roulante.

b) Retrouvons ceci à l'aide de la construction d'Euler Savary

$G_1, G_2$  sont connus

$\gamma_1$  est connu

Prenons une direction ( $\Delta$ ) quelconque passant par I et cherchons sur cette droite un point M répondant à la question (problème de trajectoire)

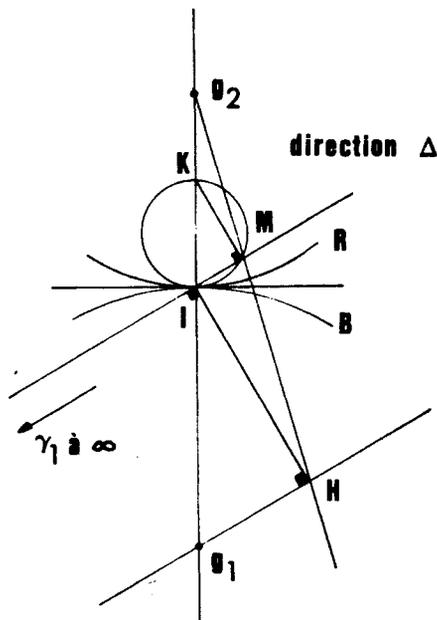


Figure 31

Le point  $\gamma_1$  est à l'infini dans la direction IM.  $\gamma_1 G_1$  est donc parallèle à IM. H est à l'intersection de  $\gamma_1 G_1$  et de la normale en I à IM. Le point M répondant à la question sur  $(\Delta)$  est donc à l'intersection de  $(\Delta)$  et de  $G_2 H$ . Le point H décrit le cercle de diamètre  $IG_1$  lorsqu'on fait varier la direction  $(\Delta)$

$$\text{D'autre part } \frac{\overrightarrow{G_2 G_1}}{\overrightarrow{G_2 I}} = \frac{\overrightarrow{G_2 H}}{\overrightarrow{G_2 M}}$$

Le point M décrit donc le cercle homothétique du cercle lieu de H, dans l'homothétie de centre  $G_2$  et de rapport

$$k = \frac{\overrightarrow{G_2 G_1}}{\overrightarrow{G_2 I}}$$

C'est un cercle de diamètre IK tel que  $k = \frac{\overrightarrow{G_2 I}}{\overrightarrow{G_2 K}}$

c) Exemple

Un cercle de rayon r roule sans glisser sur un cercle de rayon  $R = 2r$ . Trouver le cercle des inflexions.

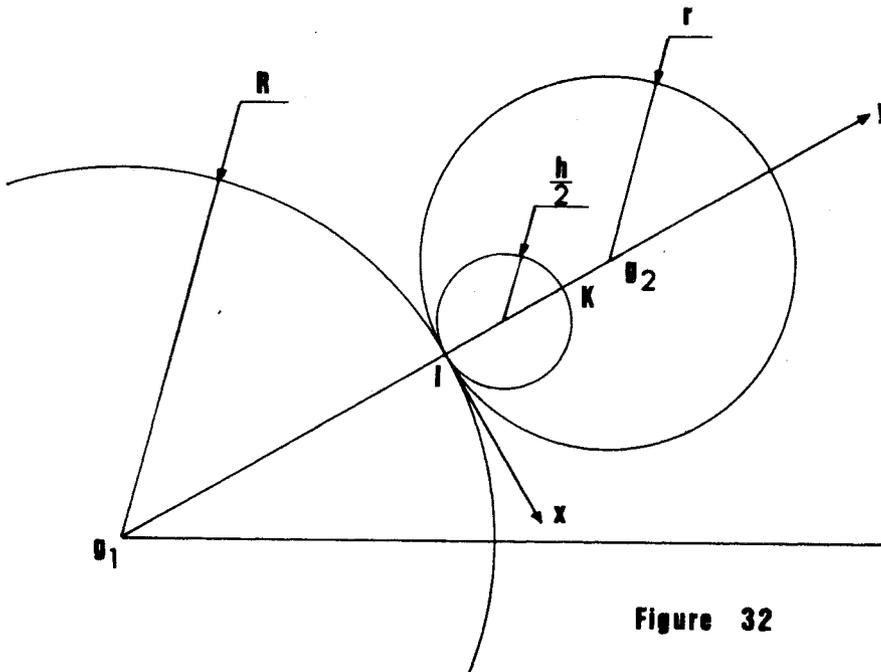


Figure 32

on a

$$\rho_2 = h \sin \theta$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{2}{3} r$$

Ce cercle passa par I où il est tangent aux deux cercles précédents, il a pour diamètre

$$h = \frac{2}{3} r$$

2°/ Cercle des rebroussements

a) Définition du problème et détermination analytique

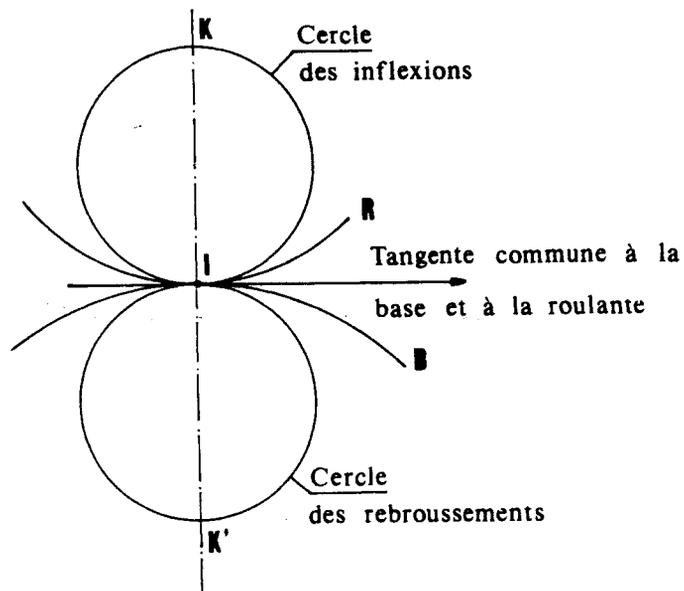
On cherche le lieu des centres de courbure des enveloppes des droites du plan mobile.

Si (C<sub>2</sub>) est la droite (D<sub>2</sub>)  $\rho_2 \rightarrow \infty \quad \frac{1}{\rho_2} = 0$

La formule d'Euler Savary s'écrit  $-\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{h \sin \theta}$

$$\rho_1 = -h \sin \theta$$

C'est l'équation d'un cercle passant par I, centré sur Iy de diamètre  $d = |h|$  et coupant l'axe des y en K' tel que  $IK' = -h \vec{y}$ . Il est donc symétrique du cercle des inflexions par rapport à la tangente commune à la base et à la roulante.



b) construction géométrique

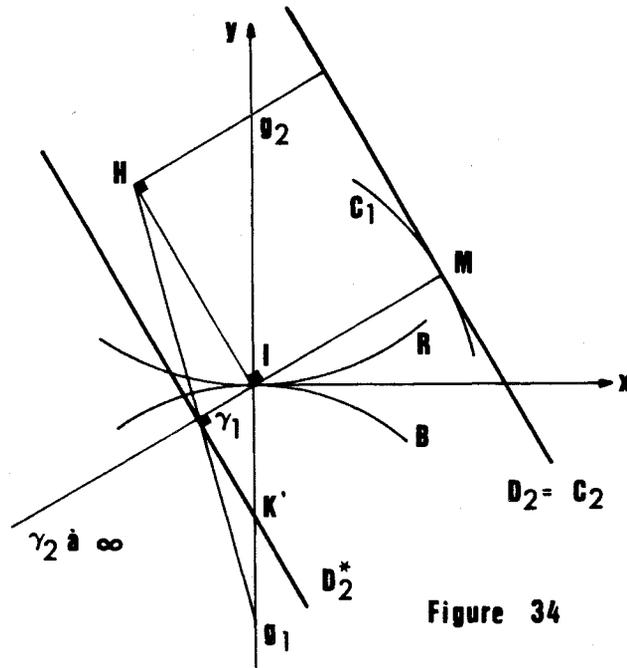


Figure 34

H décrit le cercle de diamètre  $IG_2$ .  $\gamma_1$  est l'homothétique de H dans l'homothétie de centre  $G_1$  et de rapport

$$\frac{\overrightarrow{G_1\gamma_1}}{\overrightarrow{G_1H}} = \frac{\overrightarrow{G_1I}}{\overrightarrow{G_1G_2}} = \frac{\overrightarrow{G_1K'}}{\overrightarrow{G_1I}}$$

Le point  $\gamma_1$  décrit donc le cercle homothétique du cercle lieu de H dans l'homothétie considérée : cercle de diamètre  $IK'$ .

c) Justification de l'appellation cercle des rebroussements

Les enveloppes de toutes les droites parallèles à  $(D_2)$  ont même centre de courbure. Considérons en particulier la droite  $(D_2^*)$  passant par  $\gamma_1$ . Le rayon de courbure  $|M\gamma_1|$  est nul. L'enveloppe de la droite  $(D_2^*)$  présente donc un point de rebroussement.

d) Exemples

*Exemple 1* : un cercle de rayon R roule sans glisser sur une droite. Trouver le cercle des rebroussements.

Méthode analytique

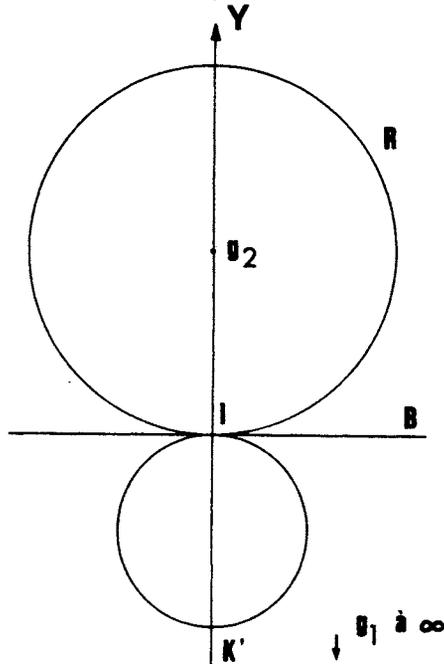


Figure 35

L'équation du cercle des inflexions s'écrit

$$\rho_1 = -h \sin \theta$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{R}$$

$$\rho_1 = -R \sin \theta$$

C'est le cercle de diamètre  $IK'$ ,  $K'$  étant défini par  $\overrightarrow{IK'} = -R \vec{y}$

Méthode géométrique

Le cercle des rebroussements est symétrique du cercle des inflexions par rapport à la tangente commune à la base et à la roulante. Le point  $G_2$  décrivant une droite est sur le cercle des inflexions. Le cercle des inflexions est le cercle de diamètre  $IG_2$ . D'où le cercle des rebroussements.

*Exemple 2* : les côtés d'un angle droit passent par deux points fixes A et B. Trouver le cercle des rebroussements dans le mouvement de l'angle par rapport au plan lié aux points A et B.

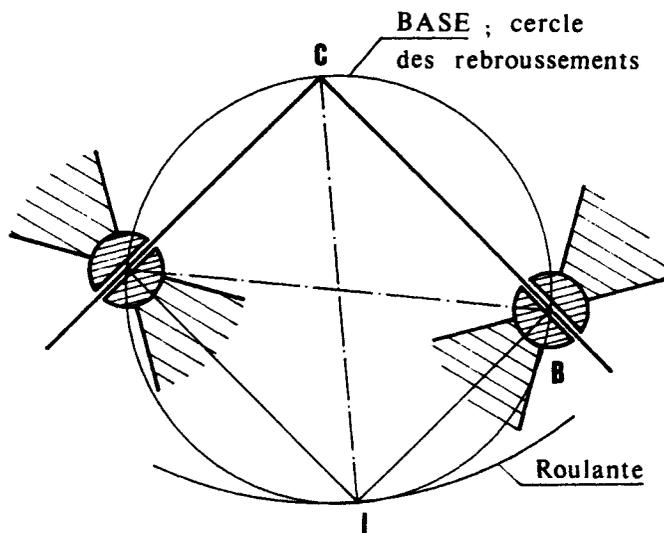


Figure 36

On construit le C.I.R I : à l'intersection des normale en A au côté CA et normale en B au côté CB la base est le cercle de diamètre AB la roulante est le cercle de centre C et rayon CI l'enveloppe de CA est le point A. Le point A est donc point de rebroussement à tout instant de l'enveloppe de CA. Il appartient donc au cercle des rebroussements. De même le point B appartient au cercle des rebroussements.

Les trois points A, B, I appartiennent au cercle des rebroussements, c'est donc le cercle de diamètre AB.

2.3.8 DISTRIBUTION DES ACCELERATIONS DES POINTS DU PLAN MOBILE

A/ Formule générale donnant l'accélération

Soit M un point quelconque du plan mobile ( $P_2$ )

$$\vec{V}_2^1(M) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM} \quad (I \text{ étant le C.I.R})$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \frac{d^1 \vec{IM}}{dt}$$

$$\vec{\Omega}_2^1 = \psi' \vec{z}_1$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge [\vec{V}^1(M) - \vec{V}^1(I)]$$

mais M est un point appartenant au plan mobile (par contre I est un point géométrique)

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge (\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IM}) - \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{V}^1(I)$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} - \psi'^2 \vec{IM} - \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{V}^1(I)$$

posons  $\vec{V}^1(I) = W \vec{x}$  (la vitesse du point I est portée par la tangente commune à la base et à la roulante)

$$\vec{IK} = -\frac{W}{\psi'} \vec{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_2^1(M) &= \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} \\ &\quad - \psi'^2 \vec{IM} \\ &\quad - \psi' \vec{z}_1 \wedge W \vec{x} \end{aligned}$$

$$\vec{IM} = \vec{IK} + \vec{KM}$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} - \psi'^2 (\vec{IK} + \vec{KM}) - \psi' W \vec{y}$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} + \psi'^2 \frac{W}{\psi'} \vec{y} - \psi'^2 \vec{KM} - \psi' W \vec{y}$$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} - \psi'^2 \vec{KM}$$

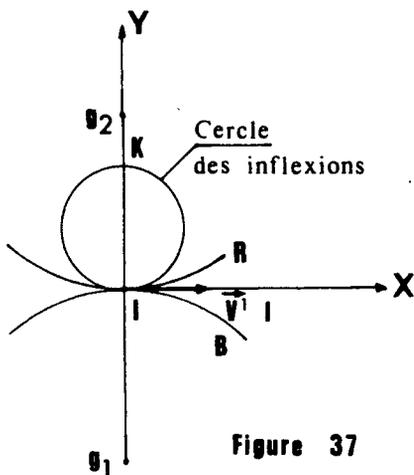


Figure 37

B/ Signification cinématique du point K

Calculons la vitesse et l'accélération du point K du plan ( $P_2$ )

$$\vec{V}_2^1(K) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{IK} = \psi' \vec{z}_1 \wedge \vec{IK}$$

$$\vec{J}_2^1(K) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IK}$$

En K, les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires ; la trajectoire y présente donc un point d'inflexion. Le point K est donc diamétralement opposé au point I sur le cercle des inflexions. Le point K est donc celui envisagé au chapitre précédent

$$\vec{IK} = -\frac{W}{\psi'} \vec{y} \quad \vec{IK} = h \vec{y}$$

$$W = -\psi' h$$

C/ Lieu des points dont l'accélération normale est nulle

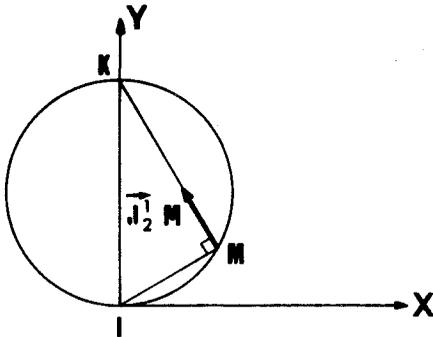


Figure 38

L'accélération est donc purement tangentielle. D'où

$$\vec{J}_2^1 \cdot \vec{IM} = 0$$

puisque IM est la normale à la trajectoire du point M.

$$0 = (\psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM}) \cdot \vec{IM} - \psi'^2 \vec{KM} \cdot \vec{IM}$$

$$\vec{KM} \cdot \vec{IM} = 0$$

C'est l'équation d'un cercle de diamètre IK. On a son équation analytique dans le repère (I,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ )

$$\vec{KM} = \begin{bmatrix} x \\ y + \frac{W}{\psi'} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{IM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{W}{\psi'} y = 0$$

D/ Lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle

L'accélération est donc purement normale. D'où

$$\vec{J}_2^1(M) \wedge \vec{IM} = 0$$

posons  $\vec{IM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$  (I,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ )

$$0 = (\psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM}) \wedge \vec{IM} - \psi'^2 \vec{KM} \wedge \vec{IM}$$

$$= \psi'' \vec{IM} (\vec{IM} \cdot \vec{z}_1) - \psi'' \vec{z}_1 (\vec{IM})^2 - \psi'^2 \vec{KM} \wedge \vec{IM}$$

$$\vec{KM} \wedge \vec{IM} = \begin{bmatrix} x \\ y + \frac{W}{\psi'} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -x \frac{W}{\psi'} \vec{z}_1$$

Figure 39

On a donc

$$0 = + z_1 \left[ - \psi'' (x^2 + y^2) + \psi'^2 \frac{W}{\psi'} x \right]$$

et finalement 
$$0 = x^2 + y^2 - \frac{W \cdot \psi'}{\psi''} x$$

*Le lieu des points d'accélération tangentielle nulle est un cercle centré sur la tangente commune à la base et à la roulante et passant par I. Il est orthogonal au cercle des inflexions.*

E/ Point d'accélération nulle. Centre des accélérations.

Il est à l'intersection des deux cercles précédents. L'accélération nulle suppose une accélération normale nulle et une accélération tangentielle nulle. On peut aussi écrire

$$\frac{Wy}{\psi'} = - \frac{W \psi' x}{\psi''}$$

$$\frac{y}{x} = - \frac{\psi'^2}{\psi''}$$

d'où : *le point d'accélération nulle se trouve à l'intersection du cercle des inflexions et de la droite d'équation*

$$y = - \frac{\psi'^2}{\psi''} x$$

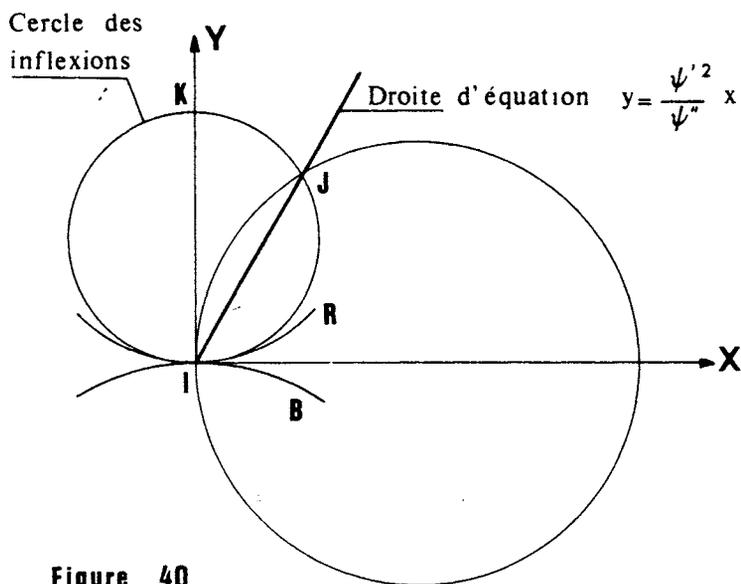


Figure 40

Remarque : si  $\psi'' = 0$  on a  $\vec{J}_2^1(M) = - \psi'^2 \vec{KM}$ . Le point d'accélération nulle est donc le point K.

F/ Justification de l'appellation centre des accélérations

L'accélération d'un point M quelconque est donnée par :

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} - \psi'^2 \vec{KM}$$

Pour le point J, centre des accélérations, on peut écrire :

$$\vec{J}_2^1(J) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IJ} - \psi'^2 \vec{KJ}$$

en retranchant membre à membre

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{MJ} - \psi'^2 \vec{MJ}$$

Tout se passe comme si l'accélération du point M était celle à l'instant t d'un mouvement circulaire de centre J. Les accélérations sont distribuées comme dans une rotation de centre J.

*Remarque :* Pour les vitesses il faut par contre envisager un mouvement circulaire de centre I (centre instantané de rotation). Les vitesses sont distribuées comme dans une rotation de centre I.

G/ Expression de l'accélération normale de M

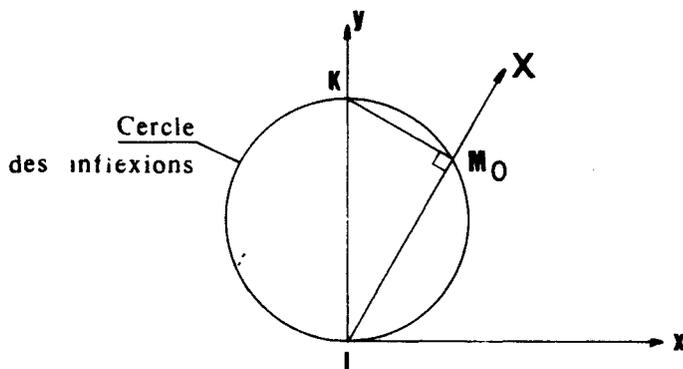


Figure 41

Orientons  $\vec{IM}$  par  $\vec{X}$ , arbitraire, et posons  $\vec{IM} = \rho \vec{X}$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{IM} - \psi'^2 \vec{KM}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= [\vec{J}_2^1(M) \cdot \vec{X}] \cdot \vec{X} \\ &= [\vec{J}_2^1(M) \cdot \frac{\vec{IM}}{\rho}] \vec{X} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_n = -\frac{\psi'^2}{\rho} (\vec{KM} \cdot \vec{IM}) \vec{X}$$

Soit  $M_0$  l'intersection de  $\vec{IM}$  avec le cercle des inflexions. On aura :

$$\vec{KM}_0 \cdot \vec{IM} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= -\frac{\psi'^2}{\rho} [(\vec{KM}_0 + \vec{M}_0M) \cdot \vec{IM}] \vec{X} \\ \vec{F}_n &= -\frac{\psi'^2}{\rho} (\vec{M}_0M \cdot \vec{IM}) \vec{X} \\ \vec{F}_n &= -\psi'^2 (\vec{M}_0M \cdot \vec{X}) \vec{X} \\ \vec{F}_n &= -\psi'^2 \vec{M}_0M \end{aligned}$$

H/ Détermination de l'accélération d'un point connaissant le centre des accélérations et l'accélération d'un autre point.

1°/ Théorème

Soient M et M' deux points du repère mobile (R<sub>2</sub>), soit J le centre des accélérations, soient les vecteurs  $\vec{J}_2^1(M)$  et  $\vec{J}_2^1(M')$ .

On se propose de montrer que J, M, et l'extrémité A du vecteur  $\vec{J}_2^1(M)$  ; J, M' et l'extrémité B du vecteur  $\vec{J}_2^1(M')$  constituent des figures semblables.

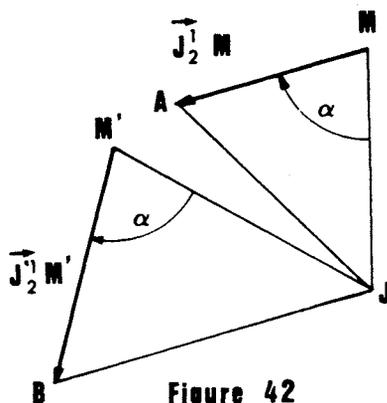


Figure 42

Calculons sinus et cosinus des angles orientés  $[\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)]$  et  $[\vec{JM}', \vec{J}_2^1(M')]$

$$\vec{J}_2^1(M) = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{JM} - \psi'^2 \vec{JM}$$

$$\vec{J}_2^1(M') = \psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{JM}' - \psi'^2 \vec{JM}'$$

$$\begin{aligned} \cos [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] &= \frac{\vec{JM} \cdot \vec{J}_2^1(M)}{|\vec{JM}| \cdot |\vec{J}_2^1(M)|} \\ &= \frac{-\psi'^2 \vec{JM}^2}{|\vec{JM}| \cdot |\vec{J}_2^1(M)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_2^1{}^2(M) &= \psi''^2 (\vec{JM})^2 + \psi'^4 (\vec{JM})^2 \\ &= \vec{JM}^2 (\psi''^2 + \psi'^4) \end{aligned}$$

$$\cos [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] = \frac{-\psi'^2 \vec{JM}^2}{|\vec{JM}| \cdot |\vec{JM}| \sqrt{\psi''^2 + \psi'^4}}$$

$$\boxed{\cos [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] = \frac{-\psi'^2}{\sqrt{\psi''^2 + \psi'^4}}}$$

$$\sin [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] = \frac{[\vec{JM} \wedge \vec{J}_2^1(M)] \cdot \vec{z}}{|\vec{JM}| \cdot |\vec{J}_2^1(M)|}$$

$$\begin{aligned}\vec{JM} \wedge \vec{J}_2^1(M) &= \vec{JM} \wedge [\psi'' \vec{z}_1 \wedge \vec{JM}] - \psi'^2 \vec{JM} \wedge \vec{JM} \\ &= + \psi'' (\vec{JM})^2 \cdot \vec{z}_1\end{aligned}$$

$$\sin [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] = + \frac{\psi'' (\vec{JM})^2}{|\vec{JM}| \cdot |\vec{JM}| \sqrt{(\psi'^4 + \psi''^2)}}$$

$$\boxed{\sin [\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)] = + \frac{\psi''}{\sqrt{\psi'^2 + \psi''^2}}}$$

de la même manière on aura

$$\cos [\vec{JM}', \vec{J}_2^1(M')] = - \frac{\psi'^2}{\sqrt{\psi'^4 + \psi''^2}}$$

$$\sin [\vec{JM}', \vec{J}_2^1(M')] = \frac{\psi''}{\sqrt{\psi'^4 + \psi''^2}}$$

Dans le plan orienté les angles  $[\vec{JM}, \vec{J}_2^1(M)]$  et  $[\vec{JM}', \vec{J}_2^1(M')]$  sont égaux. Donc les angles  $[\vec{MJ}, \vec{J}_2^1(M)]$  et  $[\vec{M'J}, \vec{J}_2^1(M')]$  sont aussi égaux. Ils sont repérés par  $\alpha$  sur la figure.

D'autre part  $|\vec{J}_2^1(M)| = |\vec{JM}| \cdot \sqrt{\psi'^4 + \psi''^2}$

$$|\vec{J}_2^1(M')| = |\vec{JM}'| \cdot \sqrt{\psi'^4 + \psi''^2}$$

d'où

$$\frac{|\vec{J}_2^1(M')|}{|\vec{J}_2^1(M)|} = \frac{|\vec{JM}'|}{|\vec{JM}|}$$

$$\frac{M'B}{MA} = \frac{JM}{JM'}$$

Les triangles M'BJ et MAJ sont donc directement semblables.

D'où la construction : à partir de JM' on construit un triangle JM'B directement semblable au triangle JMA

### 2°/ Application

Un cercle de rayon  $(R_2)$  roule sans glisser sur un cercle de rayon  $(R_1)$ . La vitesse du point  $O_2$  étant constante en module et donnée, calculer l'accélération d'un point M' du plan mobile.

$$\vec{V}_2^1(I) = 0$$

$$\vec{V}_2^1(I) = v_2^1 O_2 + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{O_2 I}$$

$$= \theta' \vec{z} \wedge \vec{O_1 O_2} + \psi' \vec{z} \wedge \vec{O_2 I}$$

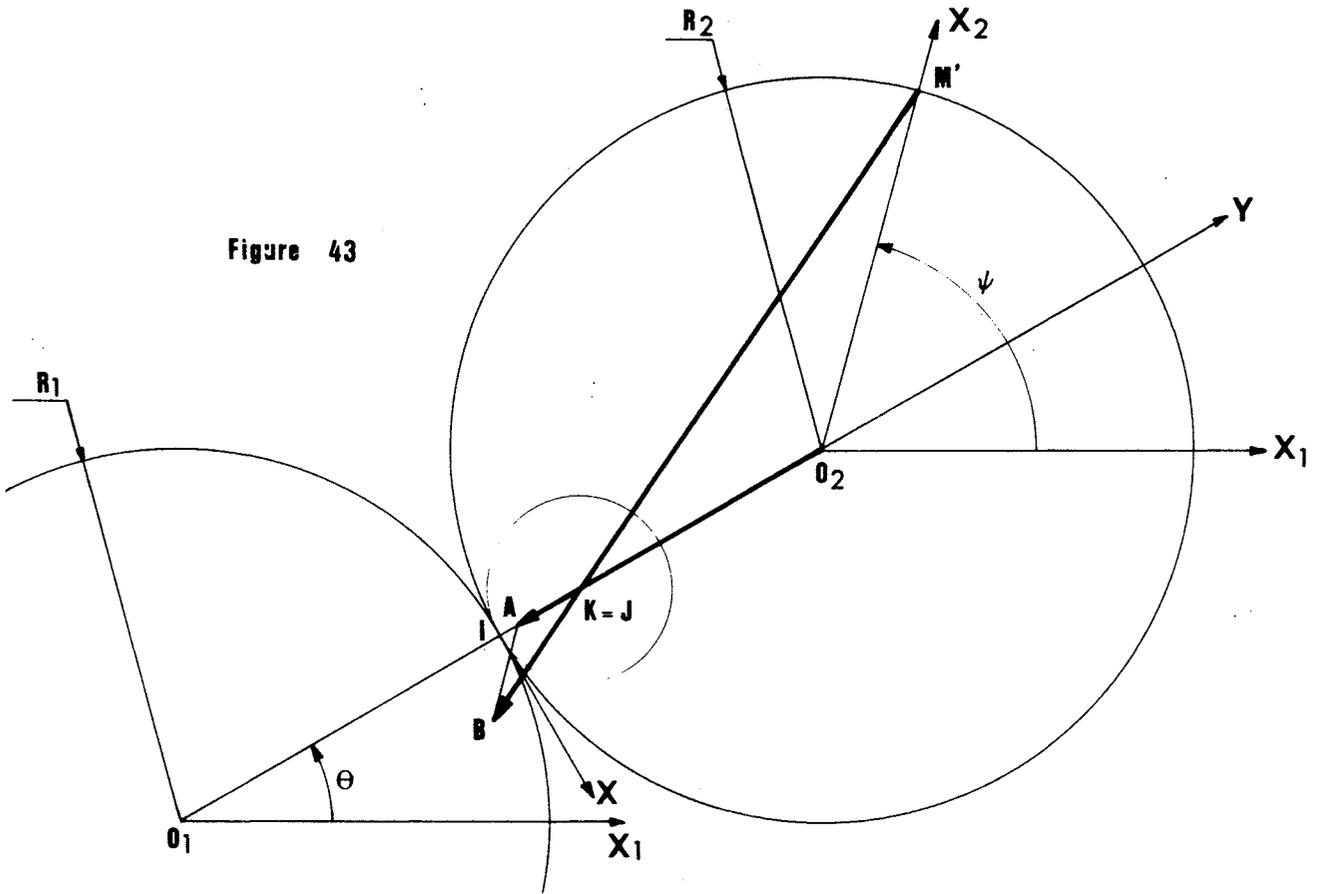
$$= \theta' \vec{z} \wedge (R_1 + R_2) \vec{y} + \psi' \vec{z} \wedge -R_2 \vec{y}$$

$$= [\theta' (R_1 + R_2) - \psi' R_2] \vec{z} \wedge \vec{y} = 0$$

Soit  $\psi' R_2 = \theta' (R_1 + R_2)$

or par hypothèse  $|v_2^1 O_2| = \text{cte} \longrightarrow \theta' (R_1 + R_2) = \text{cte} \longrightarrow \psi' = \text{cte}$

Figure 43



Le mouvement de  $C_2/C_1$  est tel que  $\psi' = \text{constante}$  et  $\psi'' = 0$ .  
 Par suite le point J centre des accélérations est confondu avec le point K.  
 (K est opposé du point I sur le cercle des inflexions).

Le cercle des inflexions a pour diamètre h tel que  $\frac{1}{h} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$   
 On se propose de faire la construction de l'accélération  
 d'un point M' situé sur le cercle  $C_2$ .

Un point M a une accélération connue :  $O_2$

$$\vec{J_2 O_2} = -\psi'^2 (R_1 + R_2) \vec{y}$$

Représentons cette accélération par le vecteur  $O_2 A$ . Le triangle JMA est déformé, triangle aplati du fait de la nullité de  $\psi''$ .

Le point M' a une accélération à déterminer. Soit  $\vec{M'B}$  le vecteur représentant cette accélération. Le triangle JM'B est aplati, M'B passe par J et le sens de l'accélération est de M' vers J.

$$\frac{J O_2}{J M'} = \frac{J A}{J B}$$

Les triangles  $J O_2 M'$  et  $J A B$  sont donc semblables.

Nota : nous aurions aussi pu faire  $\vec{J_2 M} = \vec{J O_2} = -\psi'^2 \vec{K O_2} = -\psi'^2 \vec{J O_2}$   
 $-\psi'^2 \vec{J M}$

$$\text{donc } \frac{O_2 A}{M' B} = \frac{J O_2}{J M'}$$

2.3.9 CONSTRUCTION DE BOBILLER

A/ Problème

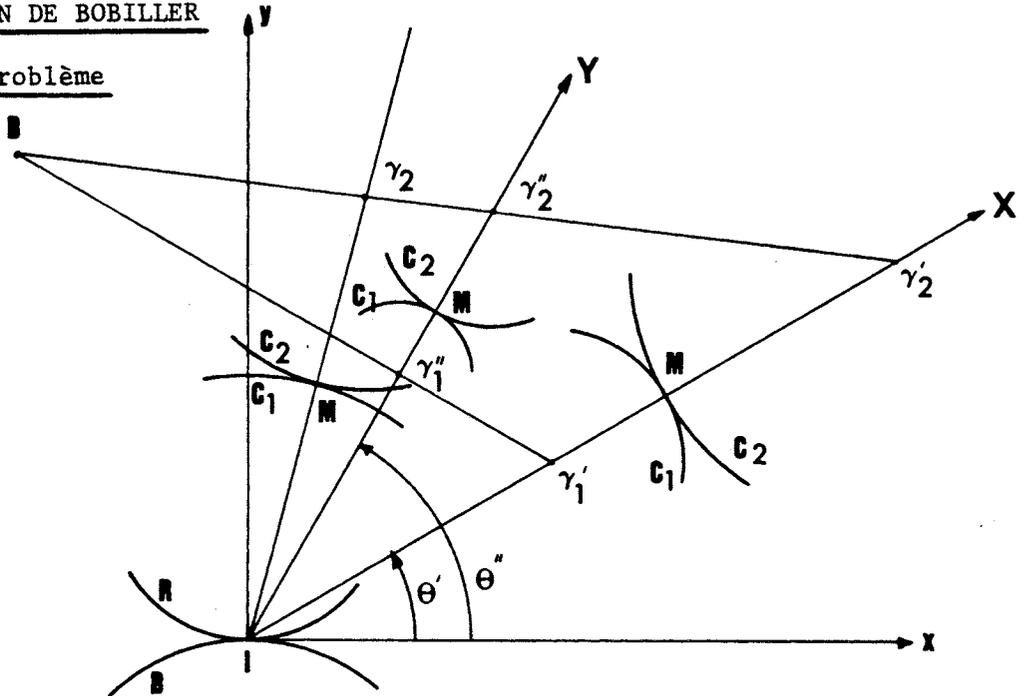


Figure 44

On veut construire le centre de courbure  $\gamma_1$  de l'enveloppe  $(C_1)$  d'une courbe  $(C_2)$  liée rigidement au repère mobile  $(R_2)$ , de centre de courbure  $\gamma_2$  connu. On ne connaît pas la base et la roulante dans le mouvement de  $(R_2)$  par rapport à  $(R_1)$ . La construction d'Euler-Savary ne peut donc pas s'appliquer. Mais on connaît les centres de courbure  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2''$  des enveloppes  $(C_1')$  et  $(C_2')$  de deux courbes mobiles  $(C_2'')$  et  $(C_2''')$  de centre de courbure  $\gamma_2'$  et  $\gamma_2''$ . La construction de Bobiller permet de résoudre le problème.

*Remarque 1 :* on peut avoir à déterminer le centre de courbure  $\gamma_1$  de la trajectoire  $(C_1)$  d'un point du plan mobile. On est immédiatement ramené au cas précédent en considérant qu'il s'agit d'un cercle point.

Soit  $C_1$  le cercle de centre  $O_1$  et de rayon  $R_1$

Soit  $C_2$  le cercle de centre  $O_2$  et de rayon  $R_2$

$C_2$  reste tangent extérieurement à  $C_1$  en  $I$  et roule sans glisser sur  $C_1$ .

On repère la position du centre  $O_2$  par l'angle  $\theta$ . On repère la position d'une direction fixe dans  $R_2$  par l'angle  $\psi$ .

$$\vec{\Omega}_2^1 = \psi' \vec{Z}$$

*Remarque 2 :* lorsque la courbe du plan mobile  $P_2$  est une droite  $D_2$  le centre de courbure  $\gamma_2$  est à l'infini dans la direction perpendiculaire à  $D_2$  et le point caractéristique  $M$  sur la normale menée de  $I$  à  $D_2$ .

B/ Droite de Bobiller

Orientons  $IM'$  et  $IM''$  par  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$ .  $(I, \vec{X}, \vec{Y})$  constituent un système d'axes obliques.

$$\begin{aligned} \text{Posons } \vec{I\gamma_1}' &= \rho_1' \vec{X} \\ \vec{I\gamma_2}' &= \rho_2' \vec{X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{I\gamma_1}'' &= \rho_1'' \vec{Y} \\ \vec{I\gamma_2}'' &= \rho_2'' \vec{Y} \end{aligned}$$

Ecrivons dans ce système d'axes les équations des droites  $\gamma_1\gamma_1''$  et  $\gamma_2\gamma_2''$

$$\text{Droite } \gamma_1\gamma_1'' \quad \frac{X}{\rho_1'} + \frac{Y}{\rho_1''} = 1$$

$$\text{Droite } \gamma_2\gamma_2'' \quad \frac{X}{\rho_2'} + \frac{Y}{\rho_2''} = 1$$

en retranchant membre à membre on aura le lieu du point d'intersection B

$$X \left( \frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} \right) + Y \left( \frac{1}{\rho_2''} - \frac{1}{\rho_1''} \right) = 0$$

mais d'après la formule d'Euler-Savary nous avons

$$\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\sin \theta'}$$

$$\frac{1}{\rho_2''} - \frac{1}{\rho_1''} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\sin \theta''}$$

$$\frac{X}{\sin \theta'} + \frac{Y}{\sin \theta''} = 0$$

les coefficients  $\left( \frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} \right)$  et  $\left( \frac{1}{\rho_2''} - \frac{1}{\rho_1''} \right)$  ne dépendent que de la direction des droites  $IM'$  et  $IM''$  et non de la position des points  $\gamma_1', \gamma_2'$  et  $\gamma_1'', \gamma_2''$  ( $\theta'$  et  $\theta''$  fixes) Pour un couple de droite donnée  $IM$  et  $IM'$ , les droites  $\gamma_1\gamma_1''$  et  $\gamma_2\gamma_2''$  se coupent sur une droite fixe d'équation

$$\frac{X}{\sin \theta'} + \frac{Y}{\sin \theta''} = 0$$

Cette droite passe par I. On l'appelle droite de Bobiller.

Remarque : on peut prendre comme courbes  $(C_2')$  et  $(C_2'')$  deux cercles points  $M'$  et  $M''$ .

### C/ Propriétés de la droite de Bobiller

Sur les directions  $IM'$  et  $IM''$  ( $\Delta'$  et  $\Delta''$ ), prenons deux points  $P'$  et  $P''$  situés sur le cercle des inflexions et appartenant au plan mobile. Il s'agit de deux cercles points  $\gamma_2'$  et  $\gamma_2''$ , les centres de courbure  $\gamma_1'$  et  $\gamma_1''$  de leur trajectoire sont à l'infini dans les directions  $IM'$  et  $IM''$ . Le point  $B_1$  est donc à l'infini dans la direction  $P'P''$ . La droite de Bobiller est donc parallèle à  $P'P''$ .

$$\text{Sur la figure on a immédiatement } \widehat{xIM'} = \widehat{P'P''I} = \widehat{P''IA}$$

*Conclusion : la droite de Bobiller relative aux directions  $\Delta'$  et  $\Delta''$  est l'antiparallèle de la tangente commune à la base et à la roulante par rapport au couple de directions  $\Delta'$  et  $\Delta''$ .*

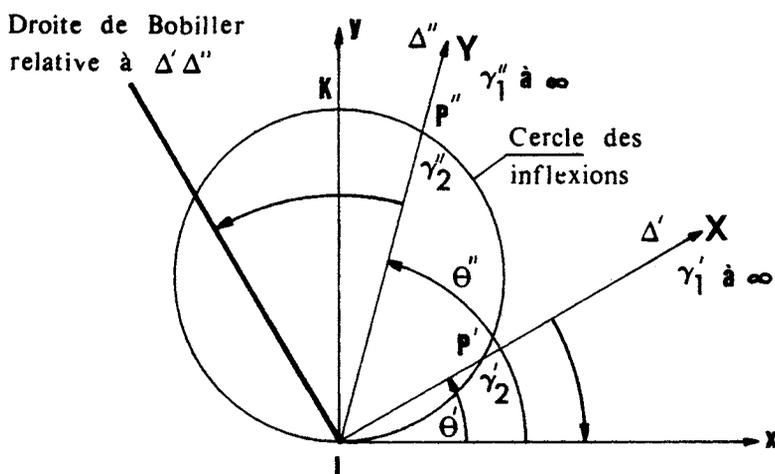


Figure 45

D/ Utilisation de la droite de Bobiller

Solution du problème proposé en début de paragraphe.

On construit la droite de Bobiller (D) relative au couple de droites  $IM'$  et  $IM''$ .  $IB (\Delta' \Delta'')$ . On peut alors tracer la tangente à la base et à la roulante : elle est antiparallèle de  $IM'$  et  $IM''$  par rapport à (D).

On construit la droite de Bobiller (D') relative au couple de droites  $IM'$  et  $IM$  (on peut évidemment prendre  $IM''$  au lieu de  $IM'$ ). (D') est antiparallèle des droites  $IM'$  et  $IM$  par rapport à la tangente  $Ix$ . Il suffit donc de reporter à partir de  $IM$  un angle  $\widehat{xIM'}$ . On joint  $\gamma_2' \gamma_2$  qui coupe (D') au point  $B'$ . L'intersection de  $B'\gamma_1'$  avec  $IM$  détermine  $\gamma_1$  cherché.

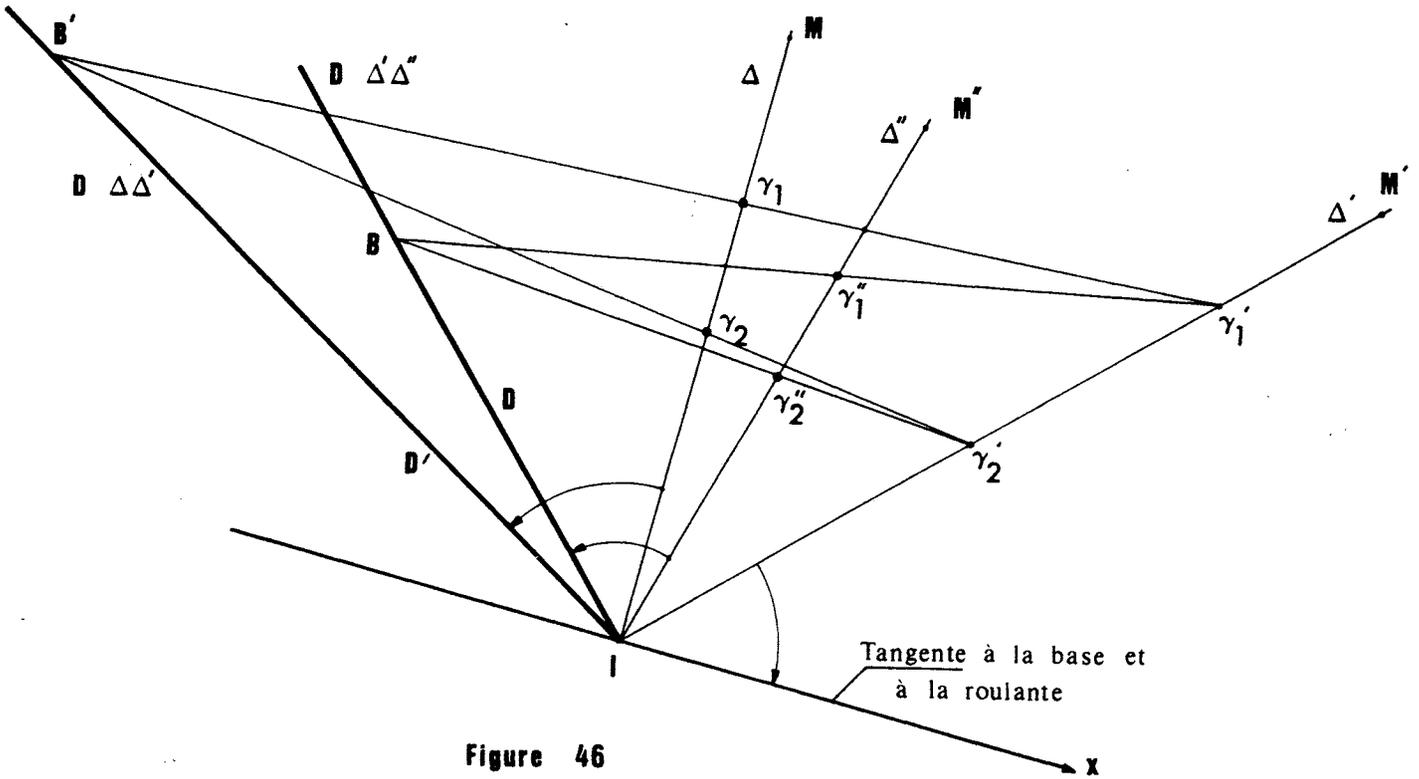


Figure 46

E/ Exemples

1°/ Déterminer le cercle des inflexions du système bielle manivelle (mouvement de la bielle par rapport au bâti). Déterminer le centre de courbure de la trajectoire d'un point du plan de la bielle.

a) Cercle des inflexions

On construit le C.I.R. I.

On connaît les trajectoires de deux points A et D de la bielle (respectivement le cercle de centre O et de rayon OA et la droite OD). On connaît les centres de courbure de ces trajectoires (respectivement le point O et le point à l'infini dans la direction de la perpendiculaire en D à OD). On obtient donc le point B appartenant à la droite de Bobillier à l'intersection de AD et de la normale en O à OD. On détermine facilement Ix tangente à la base et à la roulante. Le cercle des inflexions est centré sur la normale en I à la base et à la roulante et il passe par I et D (qui décrit une droite).

Le centre C du cercle des inflexions est donc à l'intersection de

b) centre de courbure  $\gamma_1$  de la trajectoire d'un point M du plan de la bielle.

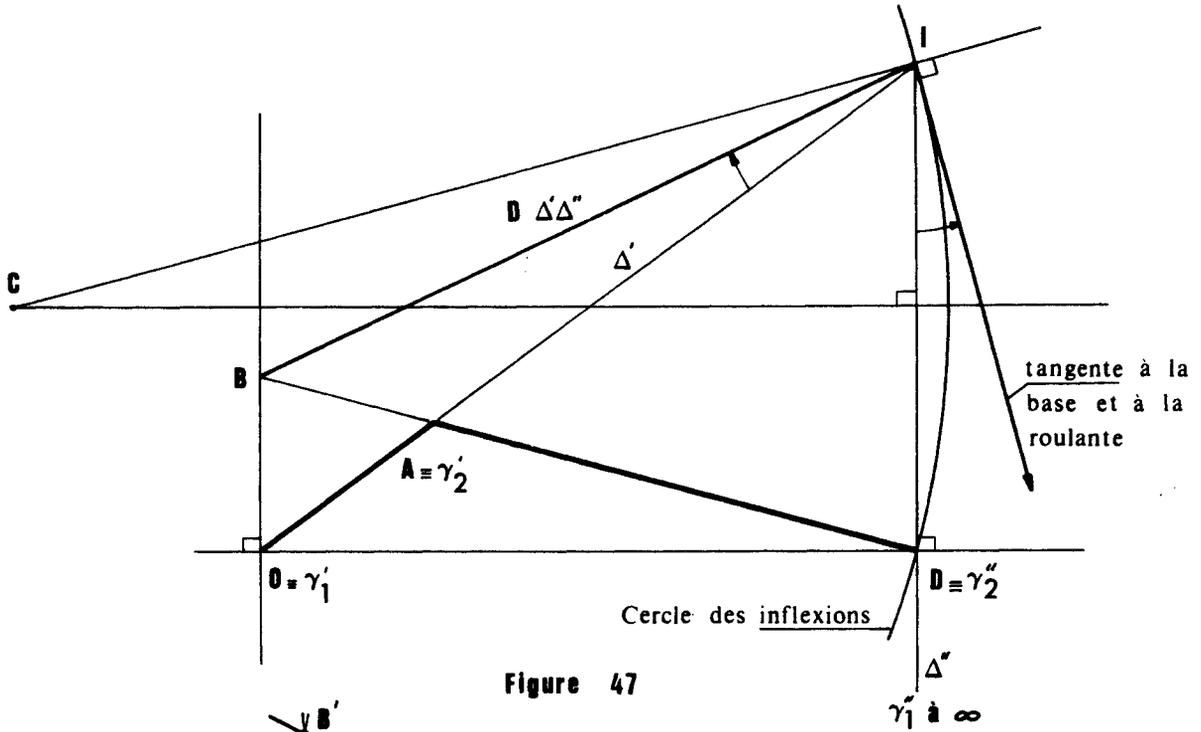


Figure 47

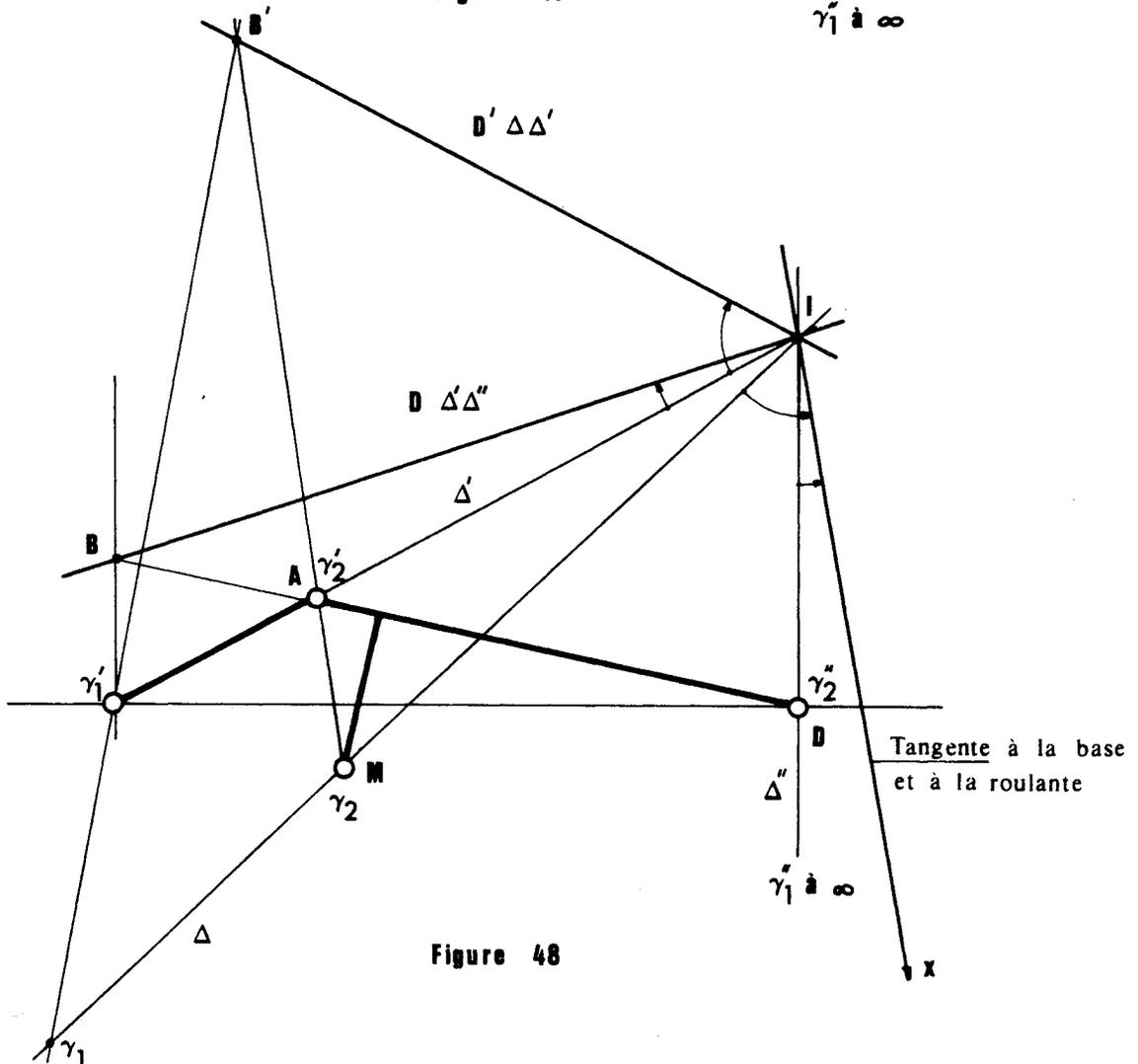


Figure 48

on construit la droite de Bobiller (D) relative aux directions ID et IA ( $\Delta''$  et  $\Delta'$ ). On peut alors construire la tangente à la base et à la roulante. On peut facilement construire la droite de Bobiller (D') relative aux directions IA et IM (elle est antiparallèle de Ix par rapport à IM et IA). ( $\Delta'$  et  $\Delta$ )

On joint AM qui coupe (D') en B'. On joint OB' qui coupe la droite IM au point  $\gamma_1$  cherché.

2°/ Déterminer la tangente à la base et à la roulante dans le mouvement de la roue par rapport au châssis, dans une suspension à quadrilatère articulé (système Lotus).

Chercher le centre de courbure  $\gamma_1$  d'un point  $M \equiv \gamma_3$  porté par l'axe de la roue.

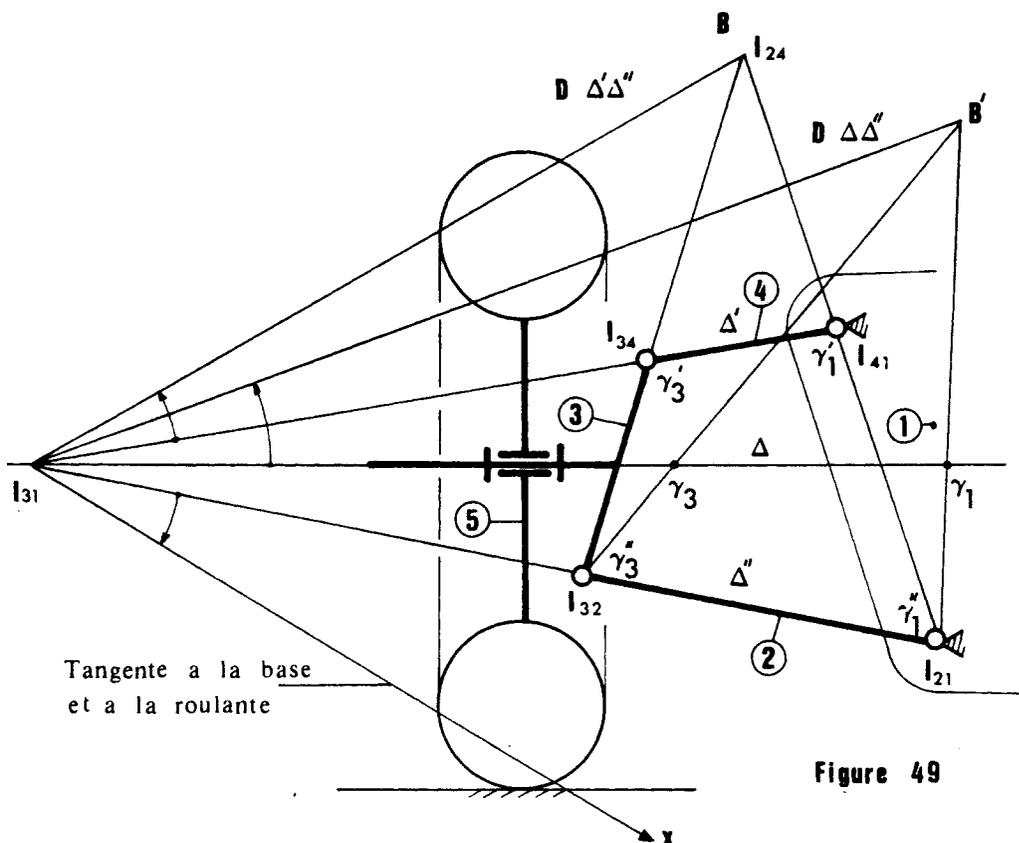


Figure 49

Déterminons au préalable le C.I.R des mouvements des barres dans les mouvements  $(P_1)/(P_j)$ . On dresse les tableaux des C.I.R et l'on a immédiatement les C.I.R inconnus  $I_{31}$  et  $I_{42}$ .

On connaît les trajectoires ( $\gamma_3''$  et  $\gamma_3'$  respectivement) de deux points du plan  $(P_3)I_{32}$  et  $I_{43}$  dans le mouvement par rapport au plan  $(P_1)$  et les centres de courbure  $I_{21}$  et  $I_{41}$  de leurs trajectoires ( $\gamma_1''$  et  $\gamma_1'$  respectivement). La droite de Bobiller (D) passe donc par le point d'intersection B de  $I_{32}I_{43}$  et de  $I_{21}I_{41}$ . (B n'est autre que  $I_{24}$ ).

On construit facilement Ix tangent à la base et à la roulante. Soit un point  $M \equiv \gamma_3$  du plan de la roue, on construit la droite de Bobiller (D') relative au couple de droites  $I_{31}I_{32}$  et  $I_{31}M$ . On joint  $I_{32}M$  qui coupe la droite (D') en (B') on joint  $B'I_{21}$  qui coupe  $I_{31}M$  en  $\gamma_1$ .

3°/ Môme problème. Suspension type Mac-Pherson

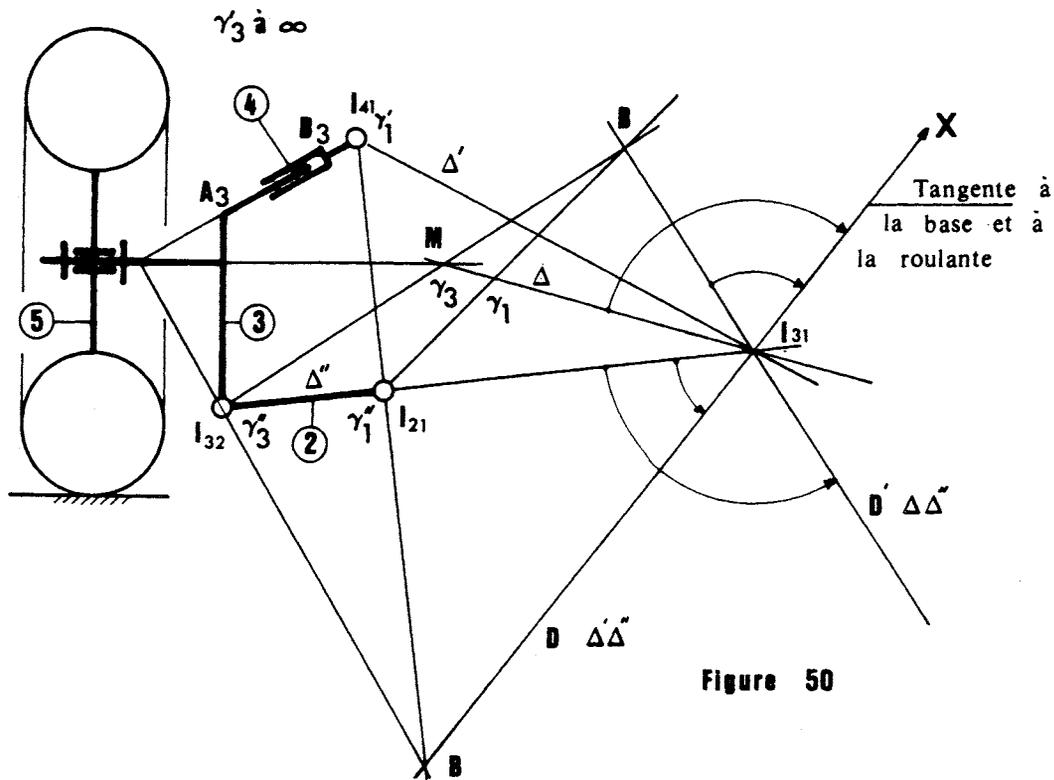


Figure 50

a) Détermination de I<sub>31</sub>

Dressons le tableau général des C.I.R

1	2	3	4
I <sub>12</sub>	I <sub>23</sub>	I <sub>34</sub>	
I <sub>13</sub>	I <sub>24</sub>		
I <sub>14</sub>			

I<sub>12</sub>, I<sub>14</sub> et I<sub>23</sub> sont connus directement on veut déterminer I<sub>31</sub>. Dressons la tableau auxilliaire

1	2	3
I <sub>12</sub>	I <sub>23</sub>	
I <sub>13</sub>		

I<sub>13</sub> est aligné avec I<sub>23</sub> et I<sub>12</sub> qui sont connus.

D'autre part la droite  $A_3B_3$  appartenant à l'élément 3 enveloppe le point  $I_{41}$  appartenant à l'élément 1. Le C.I.R.  $I_{31}$  se trouve donc sur la normale en  $I_{41}$  à  $AB$ . On obtient le C.I.R.  $I_{31}$  à l'intersection des deux droites précédentes.

b) Droite de Bobiller tangente en  $I_{31}$  à la base et à la roulante

On connaît la trajectoire du point  $I_{32}\gamma_3^1$  et son centre de courbure  $I_{21}\gamma_1^1$ . On connaît la droite  $A_3B_3$ , son centre de courbure  $\gamma_3^1$  (à l'infini) et le centre de courbure  $I_{41} \equiv \gamma_1^1$  de son enveloppe (cercle point  $I_{41}$ ).

On peut donc obtenir le point B appartenant à la droite de Bobiller (relative au couple de droites  $\Delta'$   $\Delta''$ ) et par suite la tangente à la base et à la roulante

c) Centre de courbure de la trajectoire d'un point du plan mobile

Soit  $M \equiv \gamma_3$  appartenant au solide (3). On construit la droite de Bobiller relative aux directions  $I_{31}M$  et  $I_{31}I_{21}$  ( $\Delta$  et  $\Delta''$ ) on obtient  $B'$  à l'intersection de  $I_{32}M$  et de ( $D'$ ). On joint  $B'I_{21}$  qui coupe  $I_{31}M$  au centre de courbure  $\gamma_1$  de la trajectoire de M.

2.3.10 CONSTRUCTION DE BRESSE - FORMULE DE BRESSE

A/ Construction de Bresse

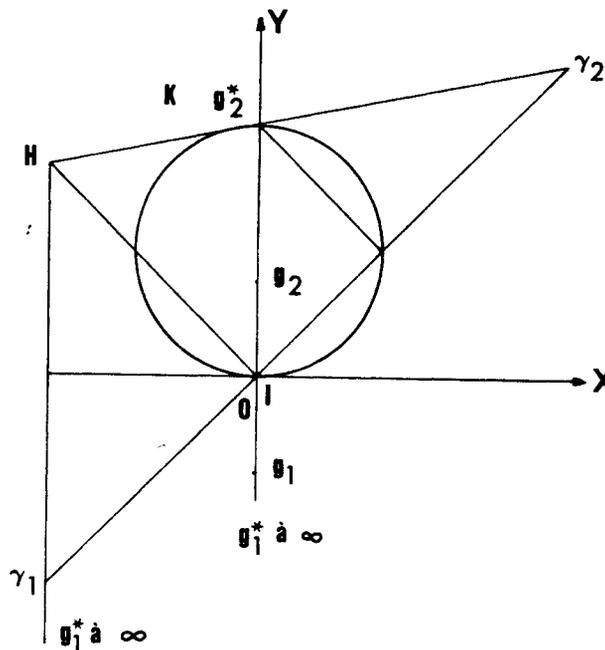


Figure 51

La formule d'Euler-Savary s'écrit

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\sin \theta}$$

On ne change rien à la construction d'Euler-Savary si l'on remplace  $G_1$  et  $G_2$  par deux points  $G_1^*$  et  $G_2^*$  tels que la quantité

$$\frac{1}{h} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

reste inchangée. Choisissons  $G_1^*$  à l'infini sur  $IG_1$ . On a donc

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{R_2^*} - \frac{1}{R_1^*} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_1^*} = 0$$

On a donc  $R_2^* = h$  et par suite  $G_2^* \equiv K$  point diamétralement opposé à  $I$  sur le cercle des inflexions.

*Conclusion*

*On remplace le centre de courbure de la base par le point à l'infini dans la direction de la normale en  $I$  à la base et à la roulante et on remplace le centre de courbure de la roulante par le point  $K$  diamétralement opposé à  $I$  sur le cercle des inflexions.*

B/ Formule de Bresse

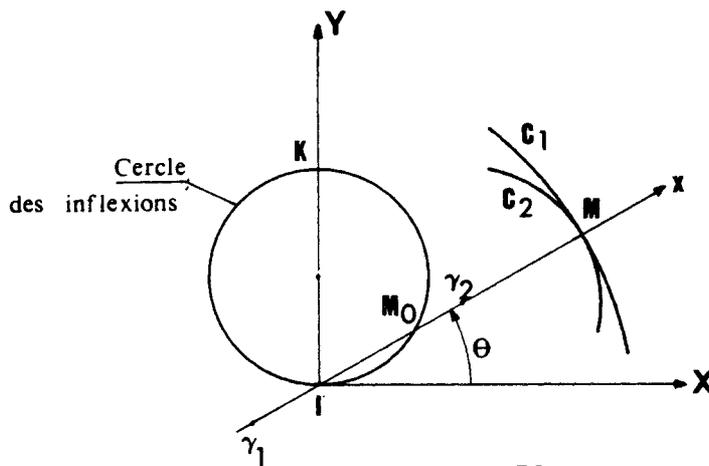


Figure 52

Soit la courbe (C<sub>2</sub>) de centre de courbure γ<sub>2</sub> dont l'enveloppe est la courbe (C<sub>1</sub>) de centre de courbure γ<sub>1</sub>.

Soit M<sub>0</sub> point d'intersection de IM avec le cercle des inflexions de diamètre IK. Le centre de courbure γ<sub>1</sub>' de la trajectoire de M<sub>0</sub> est à l'infini dans la direction IM.

$$\overrightarrow{IM_0} = \rho_2' \vec{X}$$

$$\overrightarrow{I\gamma_1'} = \rho_1' \vec{X}$$

$$\overrightarrow{I\gamma_2} = \rho_2 \vec{X}$$

$$\overrightarrow{I\gamma_1} = \rho_1 \vec{X}$$

Appliquons la formule d'Euler-Savary successivement au couple de points γ<sub>1</sub>, γ<sub>2</sub> et γ<sub>1</sub>', γ<sub>2</sub>'.

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{h \sin \theta}$$

$$\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} = \frac{1}{h \sin \theta} \quad \frac{1}{\rho_1'} = 0 \quad (\gamma_1' \text{ à l'infini})$$

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2'}$$

soit encore

$$\frac{1}{\overrightarrow{I\gamma_2}} - \frac{1}{\overrightarrow{I\gamma_1}} = \frac{1}{\overrightarrow{IM_0}}$$

$$\overrightarrow{IM_0} (\overrightarrow{I\gamma_1} - \overrightarrow{I\gamma_2}) = \overrightarrow{I\gamma_2} \cdot \overrightarrow{I\gamma_1}$$

$$\overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{\gamma_2\gamma_1} = \overrightarrow{I\gamma_2} \cdot \overrightarrow{I\gamma_1}$$

$$(\overrightarrow{I\gamma_2} + \overrightarrow{\gamma_2 M_0}) \cdot \overrightarrow{\gamma_2\gamma_1} = \overrightarrow{I\gamma_2} \cdot \overrightarrow{I\gamma_1}$$

$$\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1} \cdot \overrightarrow{\gamma_2 M_0} = \overrightarrow{I\gamma_2} (\overrightarrow{I\gamma_1} - \overrightarrow{\gamma_2\gamma_1})$$

$$\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1} \cdot \overrightarrow{\gamma_2 M_0} = \overrightarrow{I\gamma_2}^2$$

Les points γ<sub>1</sub> et M<sub>0</sub> sont situés du même côté de la demi-droite de sommet γ<sub>2</sub> passant par I (Iγ<sub>2</sub>'<sup>2</sup> > 0)

### C/ Concavité de la trajectoire d'un point

Si la courbe (C<sub>2</sub>) se réduit à un point (cercle point) le point γ<sub>2</sub> est confondu avec M. On a alors

$$\overrightarrow{M\gamma_1} \cdot \overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{IM}^2$$

Les points γ<sub>1</sub> et M<sub>0</sub> étant situés du même côté de M, la concavité de la courbe trajectoire de M est tournée vers M<sub>0</sub>

Application

Soit un plan fixe  $P_1$  auquel on lie le repère  $O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1$ .  
 Soit un plan mobile  $P_2$  auquel on lie le repère  $O_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2$ .  
 Le point  $A_2$  de  $P_2$  appartenant à  $\vec{O}_2\vec{Y}_2$  est astreint à se déplacer sur une droite  $D_1$  de  $P_1$  parallèle à  $\vec{O}_1\vec{Y}_1$ .

La droite  $\vec{O}_2\vec{X}_2$  de  $P_2$  est astreinte par une articulation à passer par l'origine  $O_1$  de  $P_1$ .

On demande de

- définir le cercle des inflexions
- définir le cercle des rebroussements
- chercher la concavité de la trajectoire d'un point  $M$  du plan mobile  
 ( $M$  appartient à  $\vec{O}_2\vec{X}_2$ )

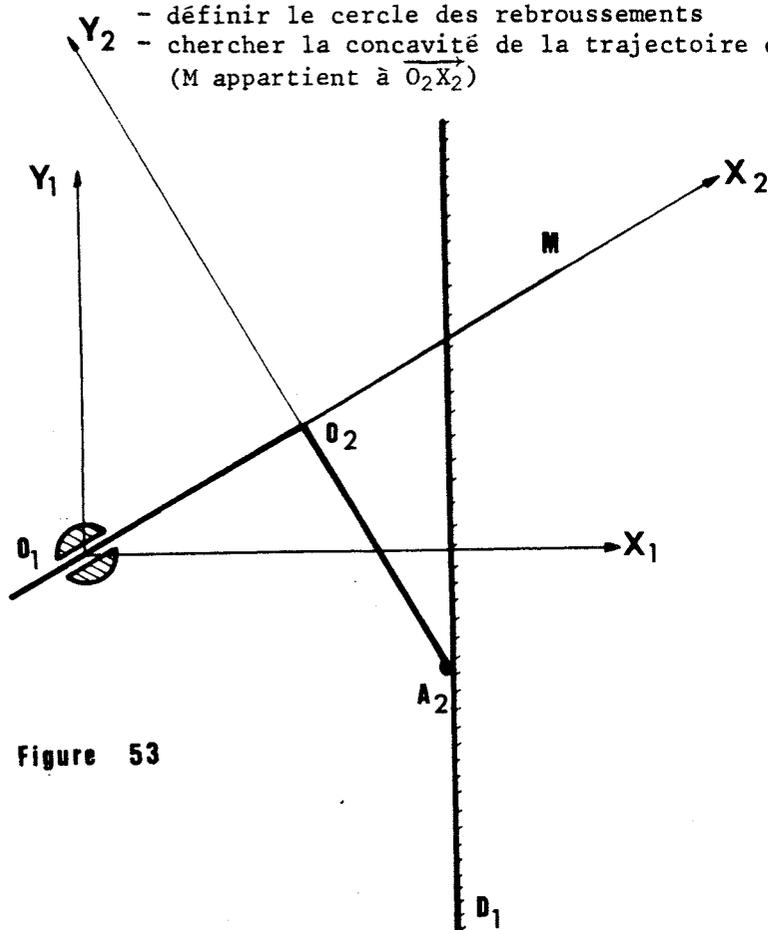


Figure 53

a) Détermination du C.I.R

La droite  $\vec{O}_2\vec{X}_2$  enveloppe le cercle point  $O_1$  donc  $I$  se trouve sur la normale en  $O_1$  à  $\vec{O}_2\vec{X}_2$ . Le point  $A_2$  a pour trajectoire  $D_1$  dans  $P_1$  :  $I$  se trouve sur la normale en  $A_2$  à  $D_1$ .  $I$  est donc complètement déterminé.

b) Cercles des inflexions et des rebroussements

$I$  appartient au cercle des inflexions et au cercle des rebroussements où les deux cercles sont tangents.

$A_2$  du plan mobile a une trajectoire rectiligne dans  $P_1$ . Il appartient au cercle des inflexions.

La droite  $\vec{O}_2\vec{X}_2$  de  $P_2$  enveloppe le point  $O_1$ .  $O_1$  appartient au cercle des rebroussements.

Les cercles des inflexions et des rebroussements sont symétriques par rapport à I:

Le point  $A'$  symétrique de  $A_2$  par rapport à I appartient au cercle des rebroussements.

Le point  $O'$  symétrique de  $O_1$  par rapport à I appartient au cercle des inflexions.

Le cercle des inflexions est circonscrit au triangle  $IO'A_2$ .

Le cercle des rebroussements est circonscrit au triangle  $IO_1A'$ .

c) Concavité de la courbe, lieu de M.

Joignons  $IM$ .  $IM$  recoupe le cercle des inflexions en  $M_0$ . Le centre de courbure de la trajectoire de  $M$  est sur la demi-droite issue de  $M$  qui contient  $M_0$  d'où le sens de la courbure.

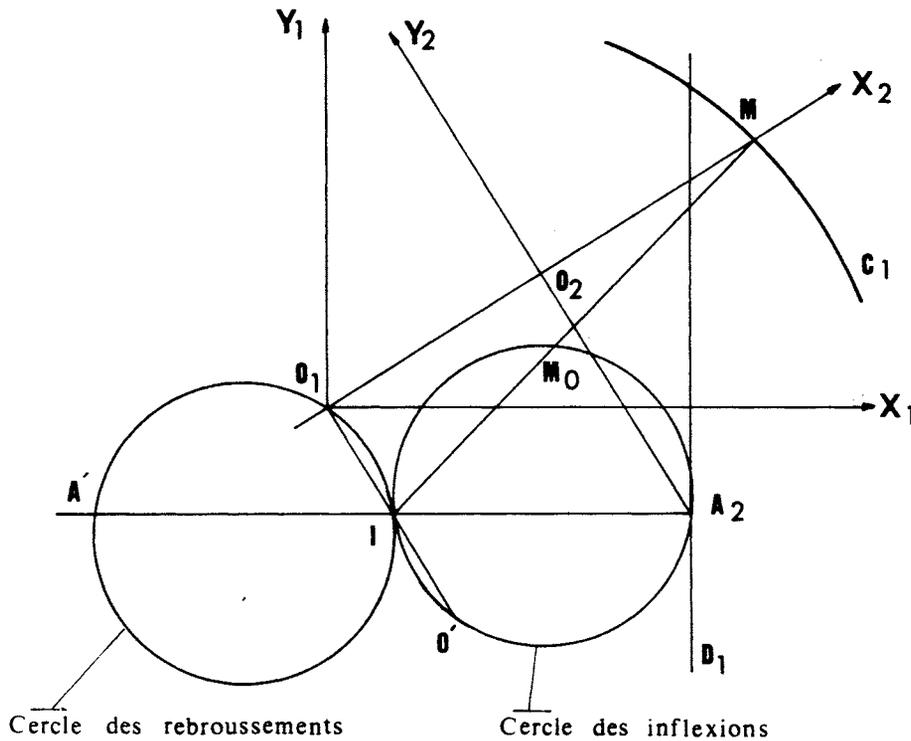


Figure 54

# **MECANIQUE GENERALE COURS ET EXERCICES EN 16 VOLUMES**

---

## **CHAPITRE 1**

- COURS - *TORSEURS* VOLUME 1
- EXERCICES - *TORSEURS* VOLUME 2

## **CHAPITRE 2**

- COURS PARTIES 1 & 2 - *CINEMATIQUE* VOLUME 3
- COURS PARTIE 3 - *CINEMATIQUE* VOLUME 4
- EXERCICES - *CINEMATIQUE* VOLUME 5

## **CHAPITRE 3**

- COURS - *LES TENSEURS CARTESIENS D'ORDRE 2* VOLUME 6
- EXERCICES - *LES TENSEURS CARTESIENS D'ORDRE 2* VOLUME 7

## **CHAPITRE 4**

- COURS - *GEOMETRIE DES MASSES* VOLUME 6
- EXERCICES - *GEOMETRIE DES MASSES* VOLUME 7

## **CHAPITRE 5**

- COURS - *CINETIQUE* VOLUME 6
- EXERCICES - *CINETIQUE* VOLUME 7

## **CHAPITRE 6**

- COURS - *THEOREMES GENERAUX DE LA DYNAMIQUE* VOLUME 8
- EXERCICES - *THEOREMES GENERAUX DE LA DYNAMIQUE* VOLUME 9

## **CHAPITRE 7**

- COURS - *EQUATIONS DE LAGRANGE - EQUATIONS D'APPELS* VOLUME 10
- EXERCICES - *EQUATIONS DE LAGRANGE - EQUATIONS D'APPELS* VOLUME 11

## **CHAPITRE 8**

- COURS - *EQUILIBRE - STABILITE - PETITS MOUVEMENTS VOISINS* VOLUME 12
- EXERCICES - *EQUILIBRE - STABILITE - PETITS MOUVEMENTS VOISINS* VOLUME 13

## **CHAPITRE 9**

- COURS - *MOUVEMENT STATIONNAIRE - STABILITE* VOLUME 14
- EXERCICES - *MOUVEMENT STATIONNAIRE - STABILITE* VOLUME 15

## **CHAPITRE 10**

- COURS - *THEORIE DU CHOC* VOLUME 16