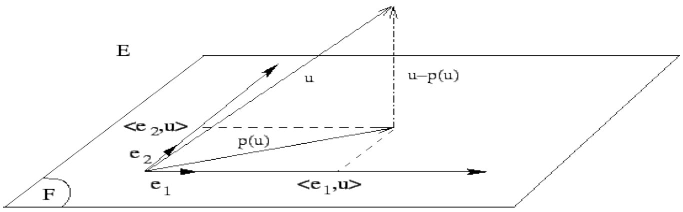
Mathématiques : Géométrie et Art …

I. Espaces vectoriels euclidiens / Espaces affines euclidiens :

En vectoriel Projections orthogonales sur un sous espace de dimension finie.

Théorème **Soit E un espace vectoriel avec un produit scalaire, F un sous e.v. de dimension finie muni d'une base orthonormée (e1, e2,…, en). Alors *p* définit un projecteur :**

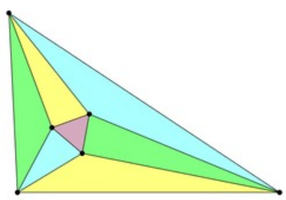
$$p : u \to p(u) = \langle u, e_1 \rangle .e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle .e_n$$

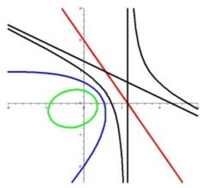


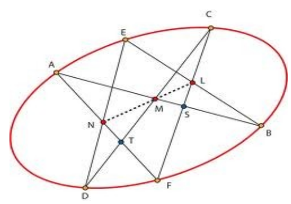
On dit que p est la projection orthogonale sur F car : $(u - p(u)) \in F^{\perp}$

En affine Joli résultat d'énoncé élémentaire découvert au début du 20ème siècle !

Théorème de Morley (trisectrices) : les intersections des couples de trisectrices les plus proches de chaque côté du triangle, sont sommets d'un triangle équilatéral !



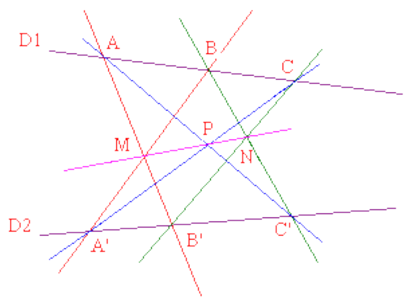




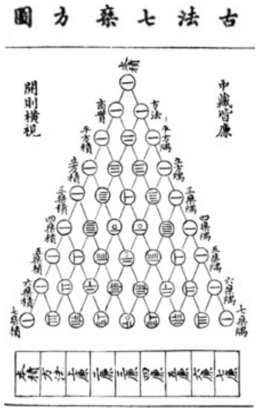
II. Pascal, les coniques et le « Triangle »… les coniques (ci-dessus) sont les courbes les plus simples après les droites car équation polynômiale de degré 2.

Ci-dessus à droite, le **Théorème** de **«l'hexagramme mystique» de Pascal** qu'il découvrit à …16 ans (!) et dont il tirait plus de 400 corollaires. Sa démonstration est perdue mais Leibnitz en était ébloui.

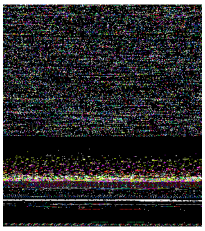
Et ci-dessous, dans le cas où la « conique » dégénère en 2 droites, on obtient le **Théorème de Pappus :**



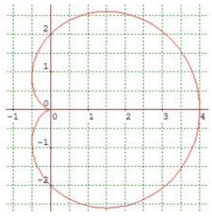
Le «Triangle de Pascal» : La civilisation indienne a été la première dans laquelle les historiens en ont retrouvé des traces. Puis chinoise [dessous, à gauche], arabe [à droite]... Toutefois : on dit «Triangle de Pascal» car son étude fut particulièrement approfondie.



De B. Pascal (mathématicien, physicien, philosophe et écrivain) quelques « pensées » : 1) "Par l'espace, l'univers me comprend et m'engloutit comme un point ; par la pensée, je le comprends" 2) "Le coeur a ses raisons que la raison ignore" 3) "L'homme passe infiniment l'homme"... *Par contre les « limaçons » de Pascal sont de son père Etienne :*



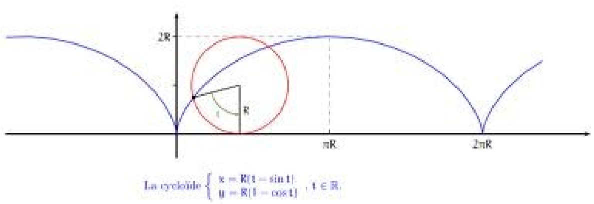
et parmi ceux-ci la cardioïde :

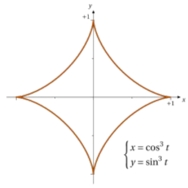


...

III. Géométrie des courbes et surfaces :

Courbe « rectifiable » : une courbe dont la longueur est calculable ... : mis à part quelques cas particuliers (polygones, cercles, parabole, cycloïde, cardioïde, astroïde…) le périmètre de la plupart est très difficile à calculer: car intervient une intégrale s'exprimant rarement au moyen de fonctions élémentaires !





Astroïde

Ainsi, l'ellipse paraît simple : il ne s'agit, après tout, que d'un cercle applati (« dilaté »); son aire aisée à calculer : πab. Mais son périmètre P ne peut être obtenu qu'avec une intégrale elliptique

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

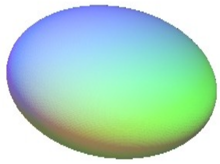
qui s'exprime sous forme de série, avec e son excentricité formule de J.H.Lambert (1772) :

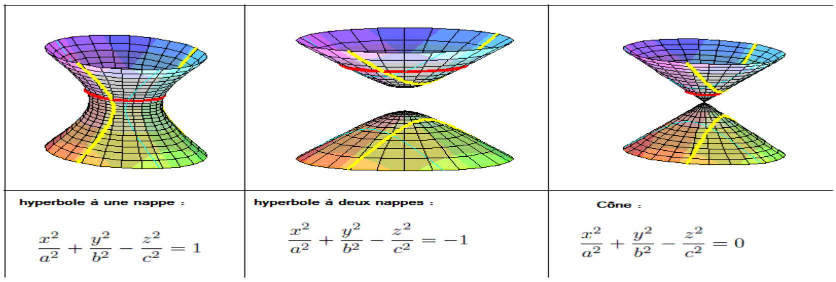
$$P = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots\right]$$

C'est ainsi que le « simple » problème de la longueur de l'ellipse conduit à une branche nouvelle et très complexe des mathématiques… (les intégrales et fonctions elliptiques). Fagnano, Euler, Gauss avec la lemniscate avaient ouvert la voie. Puis Abel, Jacobi …

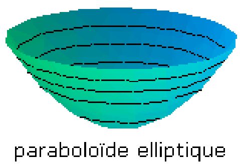
Les surfaces. **L'analogue des coniques (qui sont les courbes de degré 2 dans le plan) est constitué de surfaces, en dimension 3, dites : « quadriques » . Les voici :**

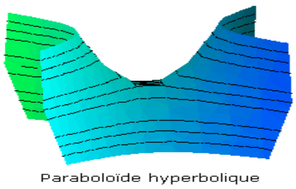
Ellipsoïde **Hyperboloïde à 1 nappe / puis à 2 nappes / Cône 2ème degré**

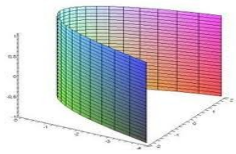




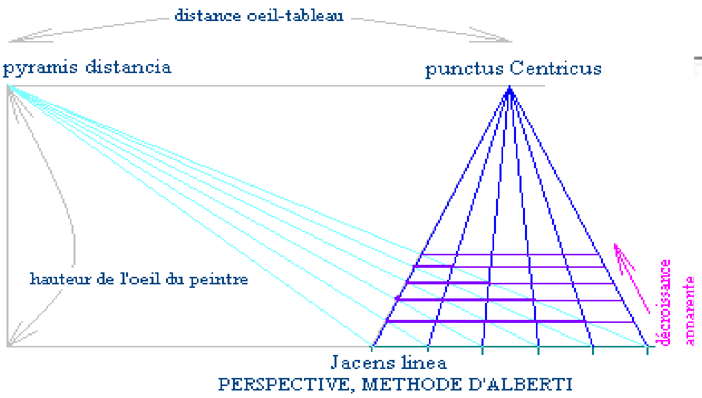
Paraboloïde elliptique **Paraboloïde hyperbolique** **Cylindres (ici parabolique)**

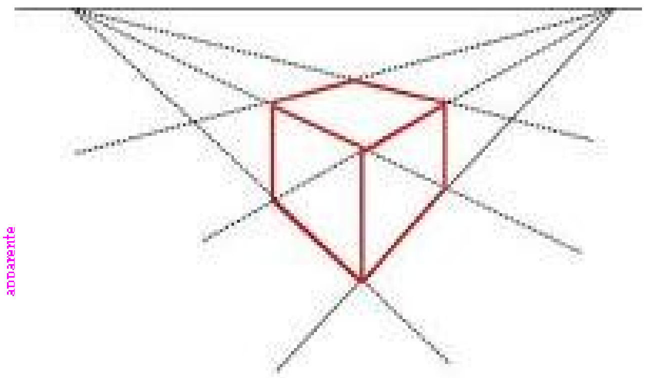






IV. Géométrie projective et perspectives (quelques images, photos et tableaux …)





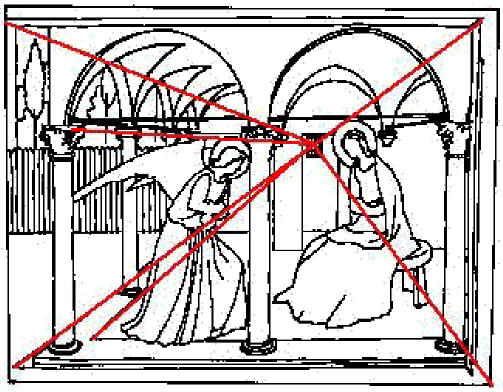
Venise

Cambodge ligne d'horizon au milieu

Berlin

Muraille de Chine

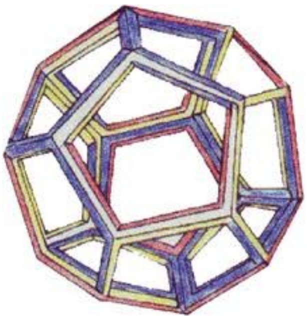
La perspective linéaire schématisée :

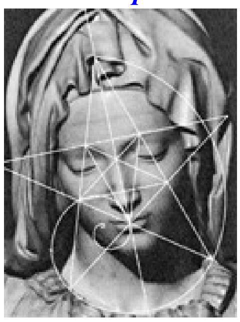


Van Gogh, Chambre à Arles :

V. Et pour finir

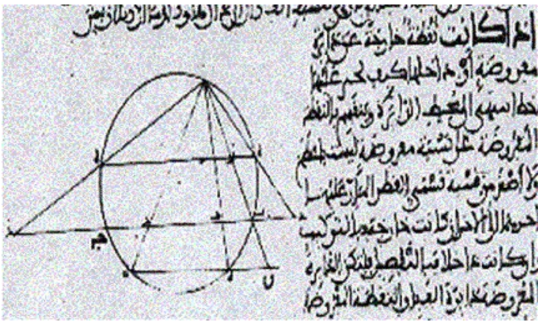
1) Le dodécaèdre [à gauche] par Léonard de Vinci (cf. *Divine Proportion* de Luca Pacioli, 1509)





2) Le Pentagone régulier dans le Visage de La « Pieta » de Michel Ange [cf. **Les « 3 génies de la Renaissance»** : Léonard de Vinci **-Leonardo di ser Piero da Vinci-** ; Michel Ange **-Michaelangelo Buonarrotti-** ; et Raphael - **Raffaello Sanzio**]

3) Sur les mathématiques arabes, quelques dernières illustrations :



Et une devinette: **Le Père Jules a 3 petites filles … Au voisin qui lui rend visite, il dit : le produit de leurs âges est 36, la somme vaut au numéro de votre maison; quels sont les âges? Le voisin réfléchit et répond: il me manque une donnée! C'est juste, réplique le Père Jules; j'ai oublié de dire que l'aînée a fêté son anniversaire la semaine dernière ... Alors ?**