

Lecture succincte sur ALGEBRE, ANALYSE, GEOMETRIE :

I. Algèbre: Après les Babyloniens, Egyptiens, Chinois, Grecs et Indiens ... voici Diophante au 3^e siècle de l'ère chrétienne qui introduisit le concept d'inconnue; considéré comme le "père" de l'algèbre son ouvrage essentiel, l'Arithmétique, influença et les mathématiciens arabes et ceux de la Renaissance.

II. AL-KHWARIZMI Muhammad, perse, vers 780-850 (de qui vient le mot :algorithme)

Al-Khwarizmi Muhammad ibn Moussa est né à *Khwarizem* (Ouzbékistan), d'où son nom. Ce fut un astronome reconnu sous le règne du Calife Abd Allah al Mahmoun (786-833) qui encouragea la philosophie et les sciences en ordonnant la traduction (vers 827) des textes de la Grèce antique. Ainsi, par exemple, fut connue l'oeuvre de Ptolémée dite *Al majisti* (la très grande) : l'*Almageste*.

La notoriété d'Al-Khwarizmi nous est parvenue moins par ses talents d'astronome que par son intervention dans l'art du calcul *algébrique* : auteur du célèbre ouvrage *Kitab Al jabr w'al mouqabala*, translittération latine du titre arabe, *Livre sur la science de la transposition et de la réduction*. Ce traité, écrit à la demande du Calife Al Mamoun de Bagdad (813-833), place Al-Khwarizmi comme un des premiers *algébristes*, mais ces travaux auraient été inspirés de ceux de l'indien Brahmagupta.

En trigonométrie, il est coutume d'attribuer à Al-Khwarizmi, dans un traité écrit à Bagdad, la volonté d'asseoir l'utilisation systématique de la *semi-corde*, équivalente au sinus dans un cercle de rayon 1, en remplacement des cordes de Ptolémée. Selon P. Youschkevitch, son ouvrage ne fut connu que vers l'an 1000 et sans doute complété par Abu Al Qasim Maslama, autre astronome installé à Cordoue.

« *Algèbre* » (14^e siècle) vient de l'arabe *al jabr* utilisé par Al-Khwarizmi pour signifier la *transposition* qui se traduit essentiellement par l'ajout d'une même quantité dans les deux membres de l'équation afin d'éliminer des termes par soustraction. La *mouqabala* consiste à diviser éventuellement afin d'avoir la solution ($3.x=1$) ou une équation normalisée pour le second degré. Les termes arabes désignant l'équation (*muadala*), l'inconnue (*gezr* = racine, ou *cheï* = chose) et le carré de l'inconnue (*mahal*) apparaissent ... Al-Khwarizmi fait allusion aux nombres négatifs des mathématiciens Indiens mais ne les accepte pas comme solution. Aussi, outre les méthodes *géométriques* connues d' Euclide, il énonce des *règles algébriques* (pour équations de degré 2 seulement) mais sans racines négatives ... qui seront prises en compte en Occident qu'après Girard (qui a donné l'aire d'un triangle sphérique) et Descartes. Le terme racine est utilisé pour signifier "quelque chose de caché" qu'il s'agit de déterminer. Ce même terme est utilisé pour désigner les nombres solutions inconnues d'équations ...

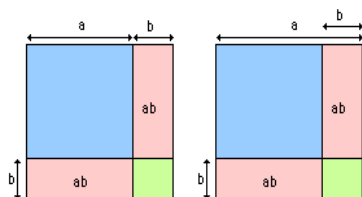
Algorithme :

La démarche méthodique d'Al-Khwarizmi, sa puissance de calcul par usage des chiffres arabes, lui valut de voir son nom utilisé dès le 12^e siècle en Occident : *algoritmo* en espagnol ; et algorithme en français: mot formé sur son nom et le mot grec *arithmos* (*nombre*) qui a aussi donné : *arithmétique*.

Il utilisa aussi, comme Euclide, le support des aires : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
... Toutefois, on s'affranchit peu à peu du support géométrique ...

III. LES EQUATIONS ALGEBRIQUES de degré 2, 3, 4

A. Les équations de degré 2 : $a.x^2 + b.x + c = 0$. Exemple $x^2 = x + 1$ et le Nombre d'Or :



C'est au milieu du XVI^e siècle à Venise qu'est publié: «De la divine proportion» exposant toutes les propriétés connues alors de cette fameuse et antique "proportion en extrême et moyenne raison". L'auteur est un moine savant de Bologne: Fra Luca Pacioli di Borgo ; et l'illustrateur de l'ouvrage est Léonard de Vinci (!) qui nommait cette proportion "section dorée" d'où l'appellation "Nombre d'Or". Fig. 3,4: escalier de la « *Sagrada Familia* » (Barcelone) ; et Gravure d'une *Vierge à l'Enfant* (vers 1425, « Que sais-je »).

B. Les équations de degré 3 :

Au début du XVI siècle, c'est à Bologne que se trouve le centre le plus actif de recherches ... notamment sur la résolution des équations de degré 3, sur lesquelles s'étaient penchés Diophante, Al-Khayyâm et Al-Din-al-Tusi : en vain ... Le premier à ouvrir une brèche est **Scipione del Ferro** qui parvient à des solutions dans quelques cas. Il communique ses travaux à son gendre Annibal de la Nave, qui en parle à un ami : **Anton Maria del Fiore**. A la mort de del Ferro, del Fiore se mit à lancer des défis aux mathématiciens du monde entier (=le Nord de l'Italie !) C'est **Tartaglia** qui va relever le défi ; plagié par **Cardan** ! (apparition de racines carrées de nombres négatifs : **Bombelli**.)

C. Les équations de degré 4 : **Ferrari** élève de Cardan... On se ramène en théorie au degré 3.

IV. L'ALGÈBRE depuis le XVIIe siècle : (*) « Le tournant du 5ème degré... »

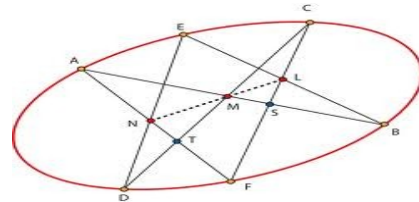
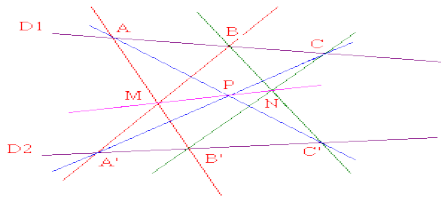
Abel démontre l'impossibilité en général, de résoudre par radicaux l'équation algébrique de degré 5. Évariste Galois (1811 - 1832), dans un mémoire fulgurant, introduit pour la première fois la notion de groupe en étudiant les permutations des racines d'une telle équation et complète les travaux d'Abel. Même l'équation $X^5 - X - 1 = 0$ (par exemple) est non résoluble par radicaux ! ...

V. L'Algèbre LINEAIRE ... VI. Espaces vectoriels euclidiens / affines euclidiens :

En vectoriel Projections orthogonales sur un sous espace de dimension finie ...

En affine ... Ci-dessous, le Théorème de «l'hexagramme mystique» de Pascal découvert à 16 ans et dont il tirait plus de 400 corollaires. Sa démonstration est perdue mais Leibnitz en était ébloui.

Et à gauche, dans le cas où la « conique » dégénère en 2 droites, c'est le **Théorème de Pappus** :



De B. Pascal (mathématicien, physicien, philosophe et écrivain), quelques « pensées » : 1) "Par l'espace, l'univers me comprend et m'engloutit comme un point ; par la pensée, je le comprends" ... 2) "Le coeur a ses raisons, que la raison ignore" ... 3) "L'homme passe infiniment l'homme" ... Etc...

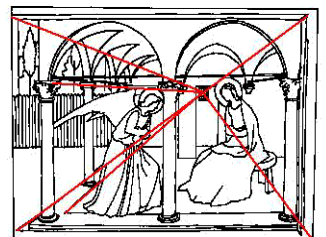
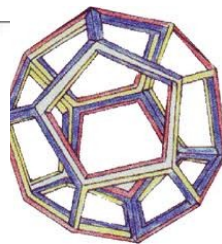
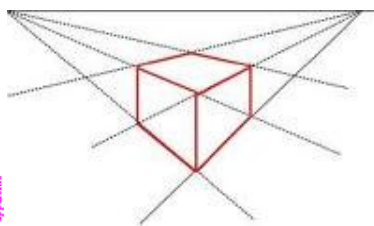
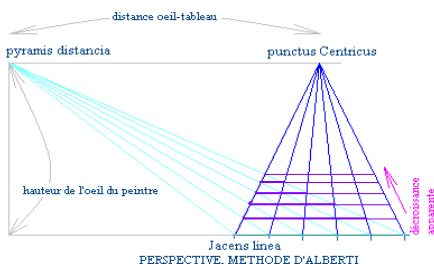
VII. ANALYSE et VIII. GEOMETRIE (projective aussi)

L'ellipse paraît simple : il ne s'agit, après tout, que d'un «cercle aplati» (ou « dilaté »); son aire est aisée à calculer : πab . Mais son périmètre P ne peut être obtenu qu'à l'aide d'une intégrale elliptique

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

qui s'exprime sous forme de série, avec e qui est l'excentricité formule de J.H.Lambert (1772) :

$$P = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$$



A droite : dodécaèdre dessiné par Léonard de Vinci (à qui on doit une autre « Annonciation » ...)

Venise



Cambodge ligne d'horizon au milieu



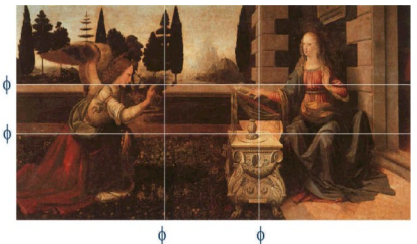
Berlin



Muraille de Chine



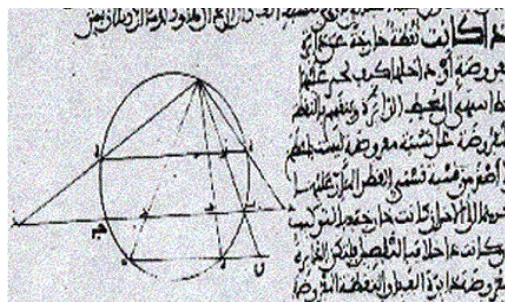
Van Gogh, Chambre à Arles :



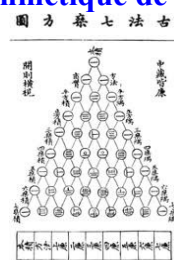
V. Et pour finir (ci-contre et après) :

- 1) Le Pentagone régulier dans le Visage de La « Pietà » de Michel Ange [cf. Les « 3 génies de la Renaissance » : Léonard de Vinci -Leonardo di ser Piero da Vinci- ; Michel Ange -Michaelangelo Buonarroti- ; et Raphael -Raffaello Sanzio] Tout-à-fait à droite : « L'Annonciation » de Léonard de Vinci.

2) Sur les mathématiques arabes, quelques dernières illustrations



3) Le triangle arithmétique de Pascal :



Et une devinette: Le Père Jules a 3 petites filles ... A un voisin qui lui rend visite, il dit : le produit de leurs âges est 36 ; et la somme vaut le numéro de votre maison ; quels sont leurs âges ? Le voisin réfléchit et répond : il me manque une donnée ! C'est juste, réplique le Père Jules; j'ai oublié de dire que l'aînée a fêté son anniversaire avant-hier ! Alors ?