

Lecture au sujet de l'ALGEBRE :

I. Après les Babyloniens, les Egyptiens, Chinois, Grecs et Indiens... voici **Diophante** [au 3^e siècle de l'ère chrétienne] qui introduisit le concept d'inconnue et considéré comme "le père" de l'algèbre : Son ouvrage essentiel, l'*Arithmétique*, influença et les mathématiciens arabes et ceux de la Renaissance.

II. AL-KHWARIZMI Muhammad, perse, vers 780-850 (de qui vient le mot : algorithme)



Al-Khwarizmi Muhammad ibn Moussa est né à *Khwarizem* (Ouzbékistan), d'où son nom. Il fut astronome sous le règne du Calife Abd Allah al Mahmoud (786-833) qui encouragea la philosophie et les sciences en ordonnant la traduction (vers 827) des textes de la Grèce antique. C'est ainsi, par exemple, que fut connue l'oeuvre de Ptolémée, dite *Al majisti* (la très grande) : l'*Almageste*.

La notoriété d'Al-Khwarizmi nous est parvenue moins par ses talents d'astronome que par son intervention dans l'art du calcul *algébrique* : auteur du célèbre ouvrage *Kitab Al jabr w'al mouqabala*, translittération latine du titre arabe, *Livre sur la science de la transposition et de la réduction*. Ce traité, écrit à la demande du Calife Al Mamoun de Bagdad (813-833), place Al-Khwarizmi comme un des premiers *algébristes*, mais ces travaux auraient été inspirés de ceux de l'indien Brahmagupta.

En trigonométrie, il est coutume d'attribuer à Al-Khwarizmi, dans un traité écrit à Bagdad, la volonté d'asseoir l'utilisation systématique de la *деми-корде*, équivalente au sinus dans un cercle de rayon 1, en remplacement des cordes de Ptolémée. Selon P. Youschkevitch, son ouvrage ne fut connu que vers l'an 1000 et sans doute complété par Abu Al Qasim Maslama, un astronome installé à Cordoue.

« *Algèbre* » (14^e siècle) vient de l'arabe *al jabr* utilisé par Al-Khwarizmi pour signifier la *transposition* qui se traduit essentiellement par l'ajout d'une même quantité dans les deux membres de l'équation afin d'éliminer des termes par soustraction. La *mouqabala* consiste à diviser éventuellement afin d'avoir soit la solution soit une équation normée (dont le coefficient en x^2 est 1) pour le second degré.

Les termes arabes désignant l'équation (*muadala*), l'inconnue (*geẓr* = racine, ou *cheï* = chose) et le carré de l'inconnue (*mahal*) apparaissent... Al-Khwarizmi fait allusion aux nombres négatifs des mathématiciens Indiens mais ne les accepte pas comme solutions. Ainsi, outre les méthodes géométriques déjà utilisées par Euclide, il énonce donc des *règles algébriques* pour équations de degré 2 (seulement) sans racines négatives vues comme impossibles ... Elles ne seront prises en compte en Occident qu'après Girard (qui a donné l'aire d'un triangle sphérique) et Descartes.

Le terme racine est utilisé pour signifier "quelque chose de caché" qu'il s'agit de déterminer. Le même terme est utilisé pour désigner les nombres solutions d'équations comme $x^2 = a$, $x^3 = a$...

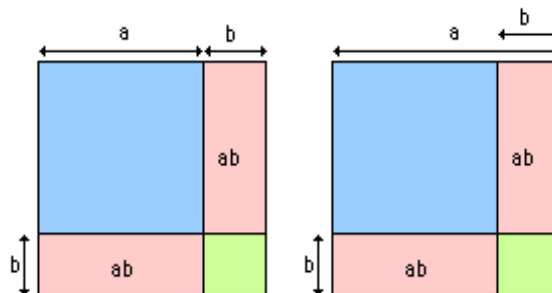
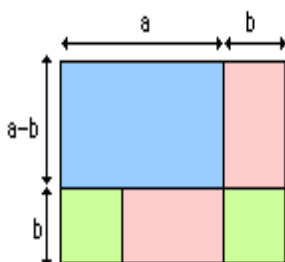
Algorithme :

La démarche méthodique et la puissance de ses calculs, par l'usage des chiffres arabes, valut donc à Al-Khwarizmi de voir son nom utilisé dès le 12^e siècle en Occident : *algoritmo* en espagnol, *algorisme* en français), mot formé sur son nom et le mot grec *arithmos* (nombre) et qui a donné : *arithmétique*.

Afin de valider ses *algorithmes*, il utilisa aussi, comme

Euclide auparavant, le support géométrique des aires:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b) \times (a - b), \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$



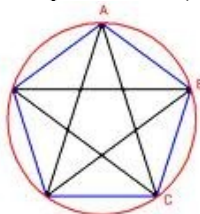
Mais avec Al-Khwarizmi et Abu Kamil, on s'affranchit peu à peu du support géométrique ...

III. LES EQUATIONS ALGEBRIQUES de degré 2, 3, 4

A. Les équations de degré 2 : $a.x^2 + b.x + c = 0$.

Sur l'exemple du Nombre d'Or :

1. Pour obtenir son carré, ajouter 1 : Donc : $x^2 = x + 1$ PHI=1,618...
2. Pour avoir l'inverse, enlever 1 : donc : $1/x = x - 1$ $1/PHI = 1,618... - 1 = 0,618...$
3. Euclide et le pentagone régulier Si $H = (A,C) \cap (B,E)$ il montre que $AC/AB = AB/AH = PHI$ en ayant $AB = BC = HC$: Le côté du pentagone étoilé divisé par le côté du pentagone régulier vaut toujours PHI
Ou encore : les 5 branches de l'étoile se coupent 2 à 2 (ou bien H divise AC) selon le Nombre d'Or.



Notons sur le nombre d'Or ou la "divine proportion" :

- La célèbre suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21... ($u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, $u_0=0$, $u_1=1$) est telle que u_{n+1} / u_n tend vers PHI (d'ailleurs en oscillant autour de cette limite).
- C'est au milieu du XVIème siècle, à Venise, qu'est publié: « De la divine proportion » exposant toutes les propriétés connues alors de cette fameuse et antique "proportion en extrême et moyenne raison".
Son auteur est un moine savant de Bologne : Fra Luca Pacioli di Borgo ... Et quant à l'illustrateur de l'ouvrage, c'est Léonard de Vinci lui-même qui surnommait cette proportion: "section dorée", d'où l'appellation de : "Nombre d'Or"...
- Un exemple tiré d'un **Que sais-je:** **Gravure** (d'une Vierge à l'Enfant) d'un maître du nord de la France, vers 1425.



B. Les équations de degré 3 : Au début du XVI siècle c'est à Bologne que se trouve le centre le plus actif de recherches; notamment sur la résolution des équations de degré trois, sur lesquelles s'étaient penchés Diophante, Al-Khayyâm et Al-Din-al-Tusi , en vain ...

Le premier à ouvrir une brèche est **Scipione del Ferro** qui parvient à des solutions dans quelques cas. Il communique ses travaux à son gendre Annibal de la Nave, qui ne put s'empêcher d'en parler à un ami : **Anton Maria del Fiore**. A la mort de del Ferro, del Fiore se mit à lancer des défis aux mathématiciens du monde entier (ce qui ne dépassera pas le Nord de l'Italie !)

C'est **Tartaglia** qui va relèver le défi, plagié par **Cardan** ! ...

(A noter: une première apparition de racines carrées de nombres négatifs: Bombelli ...)

C. Les équations de degré 4 : **Ferrari** élève de Cardan... On se ramène, en théorie, au degré 3.

IV. L'ALGEBRE depuis le XVIIe siècle : Le tournant du 5ème degré...

On s'intéresse en particulier à la possibilité d'exprimer les racines par formules générales à l'aide de radicaux. Les échecs pour le degré 5 amènent le mathématicien Abel (après Vandermonde, Lagrange, et Gauss) à approfondir les transformations sur les racines d'une équation. Abel démontre l'impossibilité, dans le cas général, de résoudre *par radicaux* une équation algébrique (ou polynomiale) de degré 5.

Évariste Galois (1811 - 1832), dans un mémoire fulgurant, introduit pour la première fois la notion de groupe (en étudiant les permutations des racines d'une telle équation) et complète les travaux d' Abel.

Même l'équation $X^5 - X - 1 = 0$ (par exemple) est non résoluble par radicaux ! ...

Cette recherche remontait au plus profond des temps et le très célèbre Diophante s'y intéressa spécialement. Avant lui citons "le théorème de Pythagore" dont on retrouve traces dans des tables babyloniennes vers 2000 ans avant Jésus-Christ... Mais c'est au 19è, suite aux remarquables travaux de Lagrange, Abel Galois (Ruffini) que **groupes**, **anneaux** et **corps** sont nés.

Et le sujet n'était pas clos : π ne semblait pas solution d'une équation du type énoncé; ni e , base des logarithmes népériens. Un nombre **non** algébrique est dit **transcendant** (terme dû à Liouville).

C'est le cas du célèbre nombre π (Lindemann) et de e (Hermite inspirant Lindemann après lui).

Sur les groupes: Il y a les abéliens et les non abéliens; les groupes infinis et les finis.

Il y a **seulement** deux groupes d'ordre 4, Le groupe cyclique U_4 et le groupe de Klein

- le groupe cyclique commutatif ($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par exemple; ou, c'est pareil : U_4)

- et le groupe commutatif non cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (dit *groupe de Klein*) isomorphe, par exemple, aux *isométries du plan laissant invariant un rectangle* ou au groupe multiplicatif (**produit matriciel**) dont les éléments

$$\text{sont : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = L$$

$\times$	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	I	L	K
K	K	L	I	J
L	L	K	J	I

et dont la table est le « carré latin » ci-contre.

Autre exercice: le plus petit groupe non abélien possède 6 éléments et il est représenté par *le groupe des isométries du plan laissant invariant un triangle équilatéral*. C'est aussi S_3

Un intérêt (élémentaire) des groupes ? est de montrer (aisément) le Théorème de Wilson : $p \geq 2$ premier si et seulement si p divise $1+(p-1)!$ (mais peu utile car $(p-1)!$ gigantesque)

Note : Carré latin et carré magique: (On parle aussi de matrice magique)

Un carré latin est tel que chaque terme apparaît une et une seule fois par ligne et colonne. Ainsi la table d'un groupe (exemple ci-dessus) est un « carré latin ». Mais il y a des carrés latins qui ne sont pas des tables de groupe (ci-dessous, sinon abéliens); toutefois ce sont des « carrés magiques » :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & C & B & D \\ D & B & C & A \\ C & A & D & B \\ B & D & A & C \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Les **carrés magiques** remontent aux temps anciens et présents dans toutes les grandes civilisations. Son origine semble provenir de l'Inde et de la Chine, 2000 ans avant J.-C... On le retrouve dans les mathématiques Arabes... Fermat et Euler les ont étudiés. Le peintre et graveur Albrecht Dürer s'y est intéressé : on retrouve un carré magique [le 1er ci-dessus] dans une de ses gravures : Melancolia. Les lignes, colonnes, diagonales ont toujours même somme. Autre exemple toujours sans répétition :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Note : A propos de carré magique évoquons un très célèbre carré de lettres, le carré SATOR. Ce carré palindrome (= qui se lit dans les deux sens) a été retrouvé si souvent, en particulier:

- dans les ruines de Pompeï (enseveli par l'éruption du Vésuve en 79 ap. J.C, donc antérieur!)
- dans celles de Rennes-le-château, le château de Jarnac (Charentes), Loches, Chinon ...
- en l'église Saint-Laurent à Rochemaure (Ardèche) ; au Puy-en-Velay (Saint Michel) ...
- au Pays de Galles, en Espagne, Italie, Turquie, Ethiopie, Egypte, Syrie ...

Le voici : SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS Soit, mot à mot :

Le laboureur à sa charrue (ou en son champ) dirige les travaux ?

Cette importance (ci dessous au Puy-en-Velay) suscitait un grand étonnement. Finalement, en 1925 c'est un pasteur protestant saxon, **Felix Grosser**, qui nota et découvrit la composition : « PATER NOSTER »... et relia les 2 A et 2 O restant à « Je suis l'Alpha et l'Omega » de l'Apocalypse :

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

A	P	A	T	E	R	N	O	S	T	E	R	O
A	P	A	T	E	R	N	O	S	T	E	R	O

Alors, pour cet incroyable carré « SATOR », diverses interprétations surgirent ... En voici deux :

- Le semeur (Christ ?) à sa charrue (Croix ?) retient par son œuvre (Sacrifice ?) les roues (Destin?)
- Dieu (Sator ?) dirige (tenet ?) la création (rotas ?) le travail de l'homme et le produit de la terre...



V. Un retour sur les chiffres arabes, plus exactement indiens :

Les chiffres de notre système décimal dits "arabes" ne furent introduits en Europe que vers l'an 1000. En réalité, ils proviendraient de l'[Inde](#) et furent transmis, après de nombreuses retouches, par les Arabes à l'Occident grâce spécialement à [Gerbert d'Aurillac](#). Au moyen âge, les mathématiciens arabes occidentaux [citons Fès capitale culturelle et spirituelle du Maroc, où se trouve [Quaraouiyine](#), l'établissement éducatif existant le plus âgé dans le monde; et [Cordoue](#) en Espagne] utilisaient :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Alors que les chiffres arabes orientaux (Bagdad, Égypte et actuels) sont différents :

•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Le mot français : « **chiffre** » est une déformation du mot arabe (prononcer approximativement **sifrone** désignant **zéro**. En italien, zéro se dit **zero**, et serait une contraction de **zefiro**. Ainsi nos termes **chiffre** et **zéro** ont la même origine... Notons que le zéro n'eut pas, chez les Arabes et au Moyen Age, le statut de véritable nombre, ce qui freina notablement l'introduction des nombres relatifs.

VI. Enfin, l'Algèbre linéaire : Descartes, Gauss, Jordan, Cayley, Hamilton, Grassmann ...

Systèmes linéaires, matrices, déterminants, espaces vectoriels... Puis les dimensions infinies... (Fin)